

第5講 例題

1

【解答】 (1) $a_1=1$ (2) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{2}{3}$ (3) $a_n=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2$

【解説】

(1) $S_1=a_1$ であるから, $S_n=-2a_n-2n+5$ ……① において

$n=1$ とすると $a_1=-2a_1-2\cdot 1+5$

よって $a_1=1$

(2) ① から $S_{n+1}=-2a_{n+1}-2(n+1)+5$ ……②

②-① から $S_{n+1}-S_n=-2a_{n+1}+2a_n-2$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ であるから

$a_{n+1}=-2a_{n+1}+2a_n-2$

ゆえに $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{2}{3}$

(3) $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{2}{3}$ を変形して $a_{n+1}+2=\frac{2}{3}(a_n+2)$

よって, 数列 $\{a_n+2\}$ は, 初項 $a_1+2=3$, 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列である。

ゆえに $a_n+2=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

よって $a_n=3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2$

2

【解答】 $a_n=\frac{5\cdot 2^n+(-1)^n}{3}$

【解説】

$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ を変形すると

$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$ ……①

$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$ ……②

① から, 数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ は初項 $a_2+a_1=10$, 公比 2 の等比数列で

$a_{n+1}+a_n=10\cdot 2^{n-1}$ すなわち $a_{n+1}+a_n=5\cdot 2^n$ ……③

② から, 数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=1$, 公比 -1 の等比数列で

$a_{n+1}-2a_n=1\cdot (-1)^{n-1}$ すなわち $a_{n+1}-2a_n=(-1)^{n-1}$ ……④

③-④ から $3a_n=5\cdot 2^n-(-1)^{n-1}$ よって $a_n=\frac{5\cdot 2^n+(-1)^n}{3}$

3

【解答】 (1) $a_n=\frac{1}{n}$ (2) $a_n=3n-1$

【解説】

(1) 両辺に $n(n+1)$ を掛けると $(n+1)a_{n+1}=na_n$

$na_n=b_n$ とおくと $b_{n+1}=b_n$

また, $b_1=1\cdot a_1=1$ から $b_n=b_{n-1}=\dots=b_1=1$

したがって $b_n=1$

よって $a_n=\frac{1}{n}$

(2) 両辺を $n(n+1)$ で割ると $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{a_n}{n}=b_n$ とおくと $b_{n+1}=b_n+\frac{1}{n(n+1)}$

ゆえに $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ また $b_1=a_1=2$

よって, $n\geq 2$ のとき

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}$

$b_1=2$ であるから, この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに $b_n=3-\frac{1}{n}$ ($n\geq 1$)

よって $a_n=3n-1$

4

【解答】 $a_n=2^{2-2^{2-n}}$

【解説】

$a_1=1>0$ で, $a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ (>0) であるから, すべての自然数 n に対して $a_n>0$ である。よって, $a_{n+1}=2\sqrt{a_n}$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 2\sqrt{a_n}$ ゆえに $\log_2 a_{n+1}=1+\frac{1}{2}\log_2 a_n$

$\log_2 a_n=b_n$ とおくと $b_{n+1}=1+\frac{1}{2}b_n$ これを変形して $b_{n+1}-2=\frac{1}{2}(b_n-2)$

ここで $b_1-2=\log_2 1-2=-2$

よって, 数列 $\{b_n-2\}$ は初項 -2 , 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で

$b_n-2=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ すなわち $b_n=2-2^{2-n}$

したがって, $\log_2 a_n=2-2^{2-n}$ から $a_n=2^{2-2^{2-n}}$

5

【解答】 $a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$, $b_n=2\cdot 3^{n-1}+1$

【解説】

$a_{n+1}=2a_n+b_n$ ……①, $b_{n+1}=a_n+2b_n$ ……② とする。

①+② から $a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$ また $a_1+b_1=4$

よって, 数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 4, 公比 3 の等比数列で

$a_n+b_n=4\cdot 3^{n-1}$ ……③

①-② から $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

ゆえに $a_n-b_n=a_{n-1}-b_{n-1}=\dots=a_1-b_1$

$a_1-b_1=-2$ であるから $a_n-b_n=-2$ ……④

③+④ から $2a_n=4\cdot 3^{n-1}-2$ よって $a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

③-④ から $2b_n=4\cdot 3^{n-1}+2$ よって $b_n=2\cdot 3^{n-1}+1$

よって $a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$, $b_n=2\cdot 3^{n-1}+1$

【別解】 $a_{n+1}=2a_n+b_n$ から $b_n=a_{n+1}-2a_n$ ……①

よって $b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}$ ……②

①, ② を $b_{n+1}=a_n+2b_n$ に代入して

$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_n+2(a_{n+1}-2a_n)$

ゆえに $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$

よって $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$

また $a_2-a_1=(2a_1+b_1)-a_1=a_1+b_1=4$

ゆえに, 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は初項 4, 公比 3 の等比数列で

$a_{n+1}-a_n=4\cdot 3^{n-1}$

数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $4\cdot 3^{n-1}$ であるから, $n\geq 2$ のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4\cdot 3^{k-1}=1+4\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=2\cdot 3^{n-1}-1$

初項は $a_1=1$ なので, この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

また $b_n=a_{n+1}-2a_n=(2\cdot 3^n-1)-2(2\cdot 3^{n-1}-1)=2\cdot 3^{n-1}+1$

よって $a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$, $b_n=2\cdot 3^{n-1}+1$

6

【解答】 $p_n=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$

【解説】

$(n+1)$ 回の試行で 8 のカードが奇数回取り出されるのは,

[1] n 回の試行で 8 のカードが奇数回取り出され, $(n+1)$ 回目に 8 のカードが取り出されない

[2] n 回の試行で 8 のカードが偶数回取り出され, $(n+1)$ 回目に 8 のカードが取り出される

のいずれかであり, [1], [2] は互いに排反であるから

$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{7}{8}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}p_n+\frac{1}{8}$

変形すると $p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$

また $p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}$

よって, 数列 $\left\{p_n-\frac{1}{2}\right\}$ は初項 $-\frac{3}{8}$, 公比 $\frac{3}{4}$ の等比数列であるから

$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{3}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

したがって $p_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$

第5講 例題演習

1

【解答】 $a_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$

【解説】

$a_1 = S_1$ であるから $a_1 = 1 - 2a_1$ ゆえに $a_1 = \frac{1}{3}$

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから $a_{n+1} = (n+1 - 2a_{n+1}) - (n - 2a_n)$

よって $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}$

これを变形して $a_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(a_n - 1)$ また $a_1 - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$

ゆえに、数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $-\frac{2}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列で

$$a_n - 1 = -\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{したがって} \quad a_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$$

2

【解答】 (1) $a_n = \frac{2^{n-1} - (-3)^{n-1}}{5}$ (2) $a_n = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

【解説】

(1) $a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0$ を变形すると

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = -3(a_{n+1} - 2a_n) \quad \text{また} \quad a_2 - 2a_1 = 1$$

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} + 3a_n) \quad \text{また} \quad a_2 + 3a_1 = 2$$

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 1、公比 -3 の等比数列で

$$a_{n+1} - 2a_n = (-3)^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

数列 $\{a_{n+1} + 3a_n\}$ は初項 2、公比 2 の等比数列で

$$a_{n+1} + 3a_n = 2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②-① から $5a_n = 2^{n-1} - (-3)^{n-1}$ よって $a_n = \frac{2^{n-1} - (-3)^{n-1}}{5}$

(2) $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ を变形すると

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$$

$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = a_2 - a_1 = 1$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列。

よって、 $n \geq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$
 $= 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

これは $n=1$ の場合にも適するから $a_n = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

【別解 1】 $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ を变形して

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = \dots\dots = a_2 - \frac{1}{2}a_1 = \frac{3}{2}$$

2^{n+1} を掛ける と $2^{n+1}a_{n+1} - 2^n a_n = 3 \cdot 2^n$ $2^n a_n = b_n$ とおくと

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^n - 4 \quad \text{よって} \quad a_n = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

【別解 2】 $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ を变形すると

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n), \quad a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n$$

よって $a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \dots\dots \textcircled{1}$, $a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2} \dots\dots \textcircled{2}$

①, ② から、 a_{n+1} を消去すると $a_n = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

3

【解答】 (1) $a_n = \frac{1}{n}$ (2) $a_n = n$ (3) $a_n = 5n - 2$

【解説】

(1) 漸化式から $(n+1)a_{n+1} = na_n = (n-1)a_{n-1} = \dots\dots = 1 \cdot a_1$

ゆえに $na_n = 1 \cdot a_1 = 1$ よって $a_n = \frac{1}{n}$

(2) 漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n}$

ゆえに $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} = \frac{a_{n-1}}{n-1} = \dots\dots = \frac{a_1}{1}$

よって $\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} = 1$ したがって $a_n = n$

(3) 漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{2}{n(n+1)}$

ゆえに $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

よって $\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 3 + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 5 - \frac{2}{n}$

したがって $a_n = 5n - 2$

4

【解答】 $a_n = 2^{2^{n-1}-1}$

【解説】

漸化式から、数列 $\{a_n\}$ の各項は正である。

よって、 $a_{n+1} = 2a_n^2$ の両辺は正であるから、両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2a_n^2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + 1$$

$\log_2 a_n = b_n$ とおくと $b_{n+1} = 2b_n + 1$

これを变形して $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$

また $b_1 + 1 = \log_2 a_1 + 1 = \log_2 1 + 1 = 1$

よって、数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 1、公比 2 の等比数列であるから $b_n + 1 = 2^{n-1}$

ゆえに $b_n = 2^{n-1} - 1$ したがって $a_n = 2^{b_n} = 2^{2^{n-1}-1}$

5

【解答】 $a_n = \frac{7^n + 3^{n-1}}{2}$, $b_n = \frac{7^n - 3^{n-1}}{2}$

【解説】

$a_{n+1} = 5a_n + 2b_n \dots\dots \textcircled{1}$, $b_{n+1} = 2a_n + 5b_n \dots\dots \textcircled{2}$ とする。

①+② から $a_{n+1} + b_{n+1} = 7(a_n + b_n)$

また $a_1 + b_1 = 4 + 3 = 7$

よって、数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 7、公比 7 の等比数列で $a_n + b_n = 7 \cdot 7^{n-1}$

すなわち $a_n + b_n = 7^n \dots\dots \textcircled{3}$

①-② から $a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n)$

また $a_1 - b_1 = 4 - 3 = 1$

よって、数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 1、公比 3 の等比数列で $a_n - b_n = 1 \cdot 3^{n-1}$

すなわち $a_n - b_n = 3^{n-1} \dots\dots \textcircled{4}$

③+④ から $2a_n = 7^n + 3^{n-1}$ よって $a_n = \frac{7^n + 3^{n-1}}{2}$

③-④ から $2b_n = 7^n - 3^{n-1}$ よって $b_n = \frac{7^n - 3^{n-1}}{2}$

6

【解答】 $p_n = \frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

【解説】

点 P が $n+1$ 秒後に頂点 A にいるのは、 n 秒後に頂点 O, B, C のいずれかにいて、その 1 秒後に頂点 A に移動する場合である。

点 P が n 秒後に頂点 O, B, C のいずれかにいる確率は $1 - p_n$

よって $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$

これを变形して $p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$

また $p_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

よって、数列 $\left\{p_n - \frac{1}{4}\right\}$ は初項 $\frac{1}{12}$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列で

$$p_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

したがって $p_n = \frac{1}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$

1

【解答】 $a_n = n \cdot 3^{n-1}$

【解説】

$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$ を変形すると $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n)$

また $a_2 - 3a_1 = 6 - 3 = 3$

よって、数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 3、公比 3 の等比数列で

$$a_{n+1} - 3a_n = 3 \cdot 3^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} - 3a_n = 3^n$$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3}$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{3}$ また $b_1 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$ 、公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列で

$$b_n = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{3}$$

$a_n = 3^n \cdot b_n$ であるから $a_n = 3^n \cdot \frac{n}{3} = n \cdot 3^{n-1}$

2

【解答】 (1) $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (2) $a_n = \frac{n^2 + n - 1}{2}$

【解説】

(1) $a_n = n(n+1)b_n$ を $na_{n+1} = (n+2)a_n + 1$ に代入して

$$n \cdot (n+1)(n+2)b_{n+1} = (n+2) \cdot n(n+1)b_n + 1$$

両辺を $n(n+1)(n+2)$ で割ると $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(2) (1) から $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

$b_{n+1} - b_n = c_n$ とおくと $c_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$

ここで $b_1 = \frac{a_1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

よって、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n(n+1)} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$n=1$ のとき $\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

$b_1 = \frac{1}{4}$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

よって $a_n = n(n+1)b_n = n(n+1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n(n+1)} \right) = \frac{n^2 + n - 1}{2}$

3

【解答】 $a_n = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$

【解説】

解答 1. 漸化式を変形して $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-1} \quad (n \geq 2)$

ゆえに $a_n = \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{n-2}{n+1} \cdot \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} a_1$

これを繰り返して

$$a_n = \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{n-2}{n+1} \cdot \frac{n-3}{n} \cdot \frac{n-4}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} a_1$$

よって $a_n = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(n+2)(n+1)n} \cdot \frac{2}{3}$ すなわち $a_n = \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$n=1$ のとき $\frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

$a_1 = \frac{2}{3}$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

解答 2. 漸化式の両辺に $n(n+1)$ を掛けると

$$n(n+1)(n+2)a_n = (n-1)n(n+1)a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

よって $n(n+1)(n+2)a_n = (n-1)n(n+1)a_{n-1} = \dots = 1 \cdot 2 \cdot 3a_1 = 4$

したがって $a_n = \frac{4}{n(n+1)(n+2)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$n=1$ のとき $\frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

$a_1 = \frac{2}{3}$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

4

【解答】 (1) $(x, y) = (1, 5)$, $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

$$(2) \quad a_n = \frac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}, \quad b_n = \frac{8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}$$

【解説】

(1) $a_{n+1} + xb_{n+1} = 3a_n + b_n + x(2a_n + 4b_n)$

$$= (3+2x)a_n + (1+4x)b_n$$

よって、 $a_{n+1} + xb_{n+1} = y(a_n + xb_n)$ とすると

$$(3+2x)a_n + (1+4x)b_n = ya_n + xyb_n$$

これがすべての n について成り立つための条件は

$$3+2x = y, \quad 1+4x = xy$$

これを解くと $(x, y) = (1, 5)$, $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

(2) (1) から $a_{n+1} + b_{n+1} = 5(a_n + b_n)$, $a_1 + b_1 = 4$;

$$a_{n+1} - \frac{1}{2}b_{n+1} = 2\left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right), \quad a_1 - \frac{1}{2}b_1 = -\frac{1}{2}$$

よって、数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 4、公比 5 の等比数列 ;

数列 $\left\{a_n - \frac{1}{2}b_n\right\}$ は初項 $-\frac{1}{2}$ 、公比 2 の等比数列。

ゆえに $a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$, $a_n - \frac{1}{2}b_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2 \div 3 \text{ から} \quad a_n = \frac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \div \frac{3}{2} \text{ から} \quad b_n = \frac{8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}$$

5

【解答】 (1) $a_{n+1} = 3a_n + 5b_n$, $b_{n+1} = a_n + 3b_n$ (2) $c_n = (3 - \sqrt{5})^n$

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{2} \{ (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n \}, \quad b_n = \frac{\sqrt{5}}{10} \{ (3 + \sqrt{5})^n - (3 - \sqrt{5})^n \}$$

【解説】

$$\begin{aligned} (1) \quad a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{5} &= (3 + \sqrt{5})^{n+1} = (3 + \sqrt{5})^n(3 + \sqrt{5}) \\ &= (a_n + b_n\sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) \\ &= 3a_n + 5b_n + (a_n + 3b_n)\sqrt{5} \end{aligned}$$

a_{n+1} , b_{n+1} , $3a_n + 5b_n$, $a_n + 3b_n$ は有理数、 $\sqrt{5}$ は無理数であるから

$$a_{n+1} = 3a_n + 5b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 3b_n$$

$$\begin{aligned} (2) \quad c_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{5} = 3a_n + 5b_n - (a_n + 3b_n)\sqrt{5} \\ &= a_n(3 - \sqrt{5}) - \sqrt{5}b_n(3 - \sqrt{5}) \\ &= (3 - \sqrt{5})(a_n - b_n\sqrt{5}) = (3 - \sqrt{5})c_n \end{aligned}$$

よって $c_{n+1} = (3 - \sqrt{5})c_n$

また、 $3 + \sqrt{5} = a_1 + b_1\sqrt{5}$ であるから $a_1 = 3$, $b_1 = 1$

ゆえに $c_1 = a_1 - b_1\sqrt{5} = 3 - \sqrt{5}$

よって、数列 $\{c_n\}$ は初項 $3 - \sqrt{5}$ 、公比 $3 - \sqrt{5}$ の等比数列で

$$c_n = (3 - \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5})^{n-1} = (3 - \sqrt{5})^n$$

(3) 条件から $a_n + b_n\sqrt{5} = (3 + \sqrt{5})^n \quad \dots\dots \textcircled{1}$

(2) の結果から $a_n - b_n\sqrt{5} = (3 - \sqrt{5})^n \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ から $2a_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$

よって $a_n = \frac{1}{2} \{ (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n \}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ から $2\sqrt{5}b_n = (3 + \sqrt{5})^n - (3 - \sqrt{5})^n$

よって $b_n = \frac{\sqrt{5}}{10} \{ (3 + \sqrt{5})^n - (3 - \sqrt{5})^n \}$

1

【解答】 (1) 略 (2) $b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}$, $a_n = 3 - \frac{2}{n}$

【解説】

(1) ある自然数 n について $a_{n+1} = 3$ とすると、条件式から

$$a_n - 9 = 3(a_n - 5) \quad \text{ゆえに} \quad a_n = 3$$

よって $a_{n+1} = a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = 3$ これは条件 $a_1 = 1$ に反する。

ゆえに、 $a_{n+1} = 3$ を満たす自然数 n はない。

また $a_1 \neq 3$

したがって、すべての自然数 n に対して $a_n \neq 3$ である。

(2) $a_{n+1} - 3 = \frac{a_n - 9}{a_n - 5} - 3$ から $a_{n+1} - 3 = -\frac{2(a_n - 3)}{a_n - 5}$

(1) より $a_n \neq 3$ であるから、両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1} - 3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a_n - 5}{a_n - 3} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{a_{n+1} - 3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{a_n - 3}$$

ゆえに $b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}$ また $b_1 = \frac{1}{a_1 - 3} = -\frac{1}{2}$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $-\frac{1}{2}$ 、公差 $-\frac{1}{2}$ の等差数列で

$$b_n = -\frac{1}{2} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2}$$

したがって $a_n = 3 + \frac{1}{b_n} = 3 - \frac{2}{n}$

2

【解答】 $\frac{2n}{n+1}$

【解説】

条件 [B] から

$$\log(n+1) + \log a_n = \log(n-1) + \log a_{n-1}$$

ゆえに $(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1}$

よって $(n+1)na_n = n(n-1)a_{n-1}$

したがって $(n+1)na_n = (n-1)(n-2)a_{n-2} = \dots = 2 \cdot 1 \cdot a_1 = 2$

ゆえに $a_n = \frac{2}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 2 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1} \end{aligned}$$

3

【解答】 (1) $a_2 = \frac{15}{2}$, $a_3 = \frac{65}{4}$ (2) $a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} + a_n$

(3) $a_n = 2^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

【解説】

(1) $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{2}{3}a_n a_{n+1}$ …… ① とおく。

① で $n=1$ のとき $a_1^2 = \frac{2}{3}a_1 a_2$

$a_1 = 5$ を代入して $5^2 = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot a_2$ よって $a_2 = \frac{15}{2}$

また、① で $n=2$ のとき $a_1^2 + a_2^2 = \frac{2}{3}a_2 a_3$

$a_1 = 5$, $a_2 = \frac{15}{2}$ を代入して $5^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{15}{2}\right) \cdot a_3$

ゆえに $a_3 = \frac{65}{4}$

(2) $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 = \frac{2}{3}a_{n+1}a_{n+2}$ …… ②

とおく。

② - ① から $a_{n+1}^2 = \frac{2}{3}a_{n+1}(a_{n+2} - a_n)$ …… ③

$a_1 = 5 \neq 0$ であるから、すべての自然数 n について (①の左辺) $\neq 0$

よって、 $a_n a_{n+1} \neq 0$ である。

ゆえに、すべての自然数 n について $a_n \neq 0$ である。

③ から $a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_{n+2} - a_n)$

したがって $a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} + a_n$ …… ④

(3) ④ を変形して

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - 2a_n) \quad \dots\dots ⑤$$

$$a_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+1} = 2\left(a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n\right) \quad \dots\dots ⑥$$

⑤ より、数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = -\frac{5}{2}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 2a_n = -\frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \dots\dots ⑦$$

⑥ より、数列 $\left\{a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n\right\}$ は初項 $a_2 + \frac{1}{2}a_1 = 10$ 、公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n = 10 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^n \quad \dots\dots ⑧$$

⑧ - ⑦ から $\frac{5}{2}a_n = 5 \cdot 2^n - 5 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

したがって $a_n = 2^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

4

【解答】 (1) $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{4}$

(2) $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$, $c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$

(3) $b_n = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$

【解説】

(1) 赤玉を持っていることを○, 持っていないことを×とし, A, B, Cの順に○, ×を表すことにする。

2回の操作によるA, B, Cの玉の移動は, 右ようになるから

$$a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{2}, c_1 = 0,$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(2) A, B, Cが赤玉を持っているとき, 硬貨の表裏の出方によって, 赤玉の移動は右ようになる。

$$\text{ゆえに} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n,$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n,$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

(3) 操作を n 回繰り返した後, A, B, Cのいずれかが赤玉を持っているから,

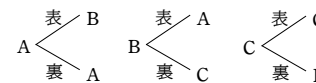
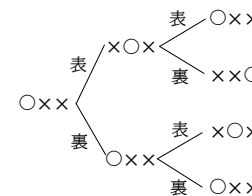
$$a_n + b_n + c_n = 1 \text{ であり, (2) から } b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + c_n) = \frac{1}{2}(1 - b_n)$$

$$\text{よって} \quad b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left(b_n - \frac{1}{3} \right)$$

数列 $\left\{b_n - \frac{1}{3}\right\}$ は, 初項 $b_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ゆえに $b_n = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$



第6講 例題

1

【解答】(1) 略 (2) 略

【解説】

(1) 与えられた等式を①とする。

$$[1] \quad n=1 \text{ のとき} \quad (\text{左辺})=11, (\text{右辺})=\frac{1}{9}(10^2-1)=11$$

ゆえに, ①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$1+10+10^2+\dots+10^k=\frac{1}{9}(10^{k+1}-1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$n=k+1$ のとき, ①の左辺について考えると, ②により

$$\begin{aligned} & 1+10+10^2+\dots+10^k+10^{k+1} \\ &= \frac{1}{9}(10^{k+1}-1)+10^{k+1} = \frac{10^{k+1}+9 \cdot 10^{k+1}-1}{9} \\ &= \frac{1}{9}(10 \cdot 10^{k+1}-1) = \frac{1}{9}\{10^{(k+1)+1}-1\} \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2]より, ①はすべての自然数 n について成り立つ。

(2) 与えられた等式を①とする。

$$[1] \quad n=1 \text{ のとき} \quad (\text{左辺})=3, (\text{右辺})=\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (4+5)=3$$

ゆえに, ①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + k(2k+1) = \frac{1}{6}k(k+1)(4k+5) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$n=k+1$ のとき, ①の左辺について考えると, ②により

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + k(2k+1) + (k+1)\{2(k+1)+1\} \\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(4k+5) + (k+1)\{2(k+1)+1\} = \frac{1}{6}(k+1)\{k(4k+5) + 6(2k+3)\} \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(4k^2+17k+18) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+9) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)+5\} \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2]より, ①はすべての自然数 n について成り立つ。

2

【解答】略

【解説】

すべての自然数 n について, 次の事柄を証明すればよい。

「 $5^{n+1}+6^{2n-1}$ は 31 の倍数である」 $\dots\dots \textcircled{1}$

$$[1] \quad n=1 \text{ のとき} \quad 5^{n+1}+6^{2n-1}=5^2+6^1=25+6=31$$

よって, ①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, ①が成り立つと仮定すると, m を整数として

$$5^{k+1}+6^{2k-1}=31m$$

と表される。 $n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned} 5^{(k+1)+1}+6^{2(k+1)-1} &= 5^{k+2}+6^{2k+1} = 5 \cdot 5^{k+1} + 36 \cdot 6^{2k-1} \\ &= 5 \cdot 5^{k+1} + (5 \cdot 6^{2k-1} + 31 \cdot 6^{2k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 5(5^{k+1}+6^{2k-1}) + 31 \cdot 6^{2k-1} \\ &= 5 \cdot 31m + 31 \cdot 6^{2k-1} \\ &= 31(5m+6^{2k-1}) \end{aligned}$$

$5m+6^{2k-1}$ は整数であるから, $5^{(k+1)+1}+6^{2(k+1)-1}$ は 31 の倍数となり, $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2]から, すべての自然数 n について①は成り立つ。

3

【解答】略

【解説】

$2^n > n^2 \dots\dots \textcircled{1}$ とする。

[1] $n=5$ のとき

$$(\text{左辺})=2^5=32, (\text{右辺})=5^2=25$$

ゆえに, 不等式①は $n=5$ のとき成り立つ。

[2] $k \geq 5$ として, $n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} & 2^k > k^2 \\ & n=k+1 \text{ のとき, ①の両辺の差を考えると} \\ & 2^{k+1} - (k+1)^2 = 2 \cdot 2^k - (k^2 + 2k + 1) \\ & > 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) \\ & = k^2 - 2k - 1 = k(k-2) - 1 > 0 \end{aligned}$$

すなわち $2^{k+1} > (k+1)^2$

よって, $n=k+1$ のときにも不等式①は成り立つ。

[1], [2]から, 不等式①は $n \geq 5$ を満たすすべての自然数 n について成り立つ。

4

【解答】(1) $a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{5}, a_4 = \frac{4}{7}$ (2) $a_n = \frac{n}{2n-1}$, 証明略

【解説】

$$(1) \quad a_2 = \frac{3a_1-1}{4a_1-1} = \frac{3 \cdot 1-1}{4 \cdot 1-1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{3a_2-1}{4a_2-1} = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}-1}{4 \cdot \frac{2}{3}-1} = \frac{3 \cdot 2-3}{4 \cdot 2-3} = \frac{3}{5}$$

$$a_4 = \frac{3a_3-1}{4a_3-1} = \frac{3 \cdot \frac{3}{5}-1}{4 \cdot \frac{3}{5}-1} = \frac{3 \cdot 3-5}{4 \cdot 3-5} = \frac{4}{7}$$

(2) (1)から, $a_n = \frac{n}{2n-1} \dots\dots \textcircled{1}$ と推測される。

$$[1] \quad n=1 \text{ のとき} \quad a_1 = \frac{1}{2 \cdot 1-1} = 1 \text{ から, ①は成り立つ。}$$

$$[2] \quad n=k \text{ のとき, ①が成り立つと仮定すると} \quad a_k = \frac{k}{2k-1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$n=k+1$ のときを考えると, ②から

$$a_{k+1} = \frac{3a_k-1}{4a_k-1} = \frac{3 \cdot \frac{k}{2k-1}-1}{4 \cdot \frac{k}{2k-1}-1} = \frac{3k-(2k-1)}{4k-(2k-1)} = \frac{k+1}{2k+1} = \frac{k+1}{2(k+1)-1}$$

よって, $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2]から, すべての自然数 n について①は成り立つ。

5

【解答】略

【解説】

$$[1] \quad n=1 \text{ のとき} \quad x^1+y^1=x+y$$

$$n=2 \text{ のとき} \quad x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

よって, $n=1, 2$ のとき, x^n+y^n は整数である。

[2] $k \geq 2$ として, $n=k-1, k$ のとき, x^n+y^n が整数であると仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$x^{k+1}+y^{k+1}=(x^k+y^k)(x+y)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})$$

仮定より, $x^k+y^k, x^{k-1}+y^{k-1}$ は整数であるから, $x^{k+1}+y^{k+1}$ は整数である。

よって, $n=k+1$ のときにも x^n+y^n は整数である。

[1], [2]から, すべての自然数 n について, x^n+y^n は整数である。

第6講 例題演習

1

【解答】(1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $1+10+10^2+\dots+10^{n-1}=\frac{1}{9}(10^n-1)$ ……①とする。

[1] $n=1$ のとき

$$\text{左辺}=1 \quad \text{右辺}=\frac{1}{9}(10-1)=1$$

よって、 $n=1$ のとき、①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つ、すなわち

$$1+10+10^2+\dots+10^{k-1}=\frac{1}{9}(10^k-1) \quad \dots\dots ②$$

と仮定する。 $n=k+1$ のとき、①の左辺について考えると、②から

$$\begin{aligned} 1+10+10^2+\dots+10^{k-1}+10^k &= \frac{1}{9}(10^k-1)+10^k \\ &= \frac{1}{9}(10^k-1+9\cdot 10^k) \\ &= \frac{1}{9}(10^{k+1}-1) \end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について①は成り立つ。

(2) この等式を (A) とする。

[1] $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1^2=1, \quad (\text{右辺})=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot(2\cdot 1-1)\cdot(2\cdot 1+1)=1$$

よって、 $n=1$ のとき、(A) が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき (A) が成り立つ、すなわち

$$1^2+3^2+5^2+\dots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)$$

であると仮定すると、 $n=k+1$ のときの (A) の左辺は

$$\begin{aligned} 1^2+3^2+5^2+\dots+(2k-1)^2+(2k+1)^2 &= \frac{1}{3}k(2k-1)(2k+1)+\frac{1}{3}(2k+1)\{k(2k-1)+3(2k+1)\} \\ &= \frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3) = \frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3) \end{aligned}$$

$n=k+1$ のときの (A) の右辺は

$$\frac{1}{3}(k+1)\{2(k+1)-1\}\{2(k+1)+1\} = \frac{1}{3}(k+1)(2k+1)(2k+3)$$

よって、 $n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について (A) が成り立つ。

2

【解答】略

【解説】

「 $4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である」を①とする。

[1] $n=1$ のとき $4^{2\cdot 1+1}+3^{1+2}=64+27=91=13\cdot 7$

よって、①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、①が成り立つと仮定すると

$4^{2k+1}+3^{k+2}=13m$ (m は整数) ……② とおける。

$n=k+1$ のときを考えると、②から

$$\begin{aligned} 4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2} &= 4^2\cdot 4^{2k+1}+3^{k+3}=16(13m-3^{k+2})+3^{k+3} \\ &= 13\cdot 16m-(16-3)\cdot 3^{k+2}=13(16m-3^{k+2}) \end{aligned}$$

$16m-3^{k+2}$ は整数であるから、 $4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}$ は 13 の倍数である。

よって、 $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について①は成り立つ。

【別解】二項定理を利用すると

$$\begin{aligned} 4^{2n+1}+3^{n+2} &= 4\cdot 4^{2n}+3^2\cdot 3^n=4\cdot 16^n+9\cdot 3^n=4(13+3)^n+9\cdot 3^n \\ &= 4(13^n+{}_nC_113^{n-1}\cdot 3+{}_nC_213^{n-2}\cdot 3^2+\dots+{}_nC_{n-1}13\cdot 3^{n-1}+3^n)+9\cdot 3^n \\ &= 4\cdot 13(13^{n-1}+{}_nC_113^{n-2}\cdot 3+{}_nC_213^{n-3}\cdot 3^2+\dots+{}_nC_{n-1}3^{n-1})+4\cdot 3^n+9\cdot 3^n \end{aligned}$$

よって、 $4^{2n+1}+3^{n+2}$ は 13 の倍数である。

3

【解答】略

【解説】

[1] $n=3$ のとき (左辺) $=3^2=9$, (右辺) $=3^2-3+2=8$

よって、①は成り立つ。

[2] $n=k$ ($k\geq 3$) のとき、①が成り立つと仮定すると $3^{k-1}>k^2-k+2$ ……②

$$\begin{aligned} n=k+1 \text{ のとき, ①の両辺の差を考えると, ②から} \\ 3^k-\{(k+1)^2-(k+1)+2\} &= 3\cdot 3^{k-1}-(k^2+k+2) \\ &> 3(k^2-k+2)-(k^2+k+2) \\ &= 2k^2-4k+4=2(k-1)^2+2>0 \end{aligned}$$

ゆえに $3^k>(k+1)^2-(k+1)+2$

よって、 $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2] から、 $n\geq 3$ であるすべての自然数 n について①は成り立つ。

4

【解答】(1) $a_2=\frac{4}{3}$, $a_3=\frac{6}{5}$, $a_4=\frac{8}{7}$, $a_n=\frac{2n}{2n-1}$ (2) 証明略

【解説】

$$(1) a_2=2-\frac{a_1}{2a_1-1}=2-\frac{2}{2\cdot 2-1}=\frac{4}{3},$$

$$a_3=2-\frac{a_2}{2a_2-1}=2-\frac{\frac{4}{3}}{2\cdot \frac{4}{3}-1}=\frac{6}{5},$$

$$a_4=2-\frac{a_3}{2a_3-1}=2-\frac{\frac{6}{5}}{2\cdot \frac{6}{5}-1}=\frac{8}{7}$$

よって、 $a_n=\frac{2n}{2n-1}$ ……①と推測される。

(2) [1] $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=a_1=2, \quad (\text{右辺})=\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1-1}=2$$

よって、①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると $a_k=\frac{2k}{2k-1}$

$n=k+1$ のとき、与えられた漸化式から

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2-\frac{a_k}{2a_k-1}=2-\frac{\frac{2k}{2k-1}}{\frac{4k}{2k-1}-1}=2-\frac{2k}{2k+1} \\ &= \frac{2k+2}{2k+1} = \frac{2(k+1)}{2(k+1)-1} \end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について①は成り立つ。

5

【解答】(1) 略 (2) $(x,y)=(2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$

【解説】

数学的帰納法で証明する。与えられた命題を [A] とする。

[1] $n=1$ のとき $x+y$ は偶数である。

$n=2$ のとき $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x+y, xy$ は偶数であるから x^2+y^2 も偶数である。

よって、 $n=1, 2$ のとき [A] は成り立つ。

[2] $n=k-1, k(k\geq 2)$ のとき、[A] が成り立つと仮定すると

$$x^{k+1}+y^{k+1}=(x+y)(x^k+y^k)-xy(x^{k-1}+y^{k-1})$$

$(x+y)(x^k+y^k), xy(x^{k-1}+y^{k-1})$ はともに偶数であるから、 $x^{k+1}+y^{k+1}$ も偶数である。よって、 $n=k+1$ のときも [A] は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n に対して [A] は成り立つ。

第6講 レベルA

1

【解答】 略

【解説】

与えられた等式を①とする。

[1] $n=1$ のとき (左辺) $=1+1=2$, (右辺) $=2^1 \cdot 1=2$

よって, ①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つ, すなわち

$$(k+1)(k+2)(k+3) \cdots (2k) = 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき, ①の左辺について考えると, ②から

$$\begin{aligned} & (k+2)(k+3)(k+4) \cdots \{2(k+1)\} \\ &= (k+2)(k+3)(k+4) \cdots 2k(2k+1) \cdot 2(k+1) \\ &= (k+1)(k+2)(k+3) \cdots \cdot 2k \times 2(2k+1) \\ &= 2^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \times 2(2k+1) \\ &= 2^{k+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \cdot \{2(k+1)-1\} \end{aligned}$$

よって, $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n について①は成り立つ。

2

【解答】 略

【解説】

[1] $n=1$ のとき

$a_1=7$ を $3^1=3$ で割ると, 商は2, 余りは1である。

よって, $n=1$ のときは成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

a_k を 3^k で割ったときの余りが1であると仮定する。

このとき, $a_k=3^k m+1$ (m は0以上の整数) と表されたとする。

$$\begin{aligned} n=k+1 \text{ のとき } a_{k+1} &= (a_k)^3 = (3^k m+1)^3 = 3^{3k} m^3 + 3 \cdot 3^{2k} m^2 + 3 \cdot 3^k m + 1 \\ &= 3^{k+1} (3^{2k-1} m^3 + 3^k m^2 + m) + 1 \end{aligned}$$

$k \geq 1$ から, $3^{2k-1} m^3 + 3^k m^2 + m$ は整数である。

よって, a_{k+1} を 3^{k+1} で割ったときの余りは1である。

ゆえに, $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n について, a_n を 3^n で割ったときの余りは1になる。

3

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 < \frac{(n+1)^3}{3} \cdots \cdots \textcircled{1}$ とする。

[1] $n=1$ のとき (左辺) $=1^2=1$, (右辺) $=\frac{(1+1)^3}{3} = \frac{8}{3}$

よって, ①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つ, すなわち

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 < \frac{(k+1)^3}{3} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と仮定する。 $n=k+1$ のとき, ①の両辺の差を考えると, ②から

$$\begin{aligned} \frac{(k+2)^3}{3} - \{1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\} &> \frac{(k+2)^3}{3} - \frac{(k+1)^3}{3} - (k+1)^2 \\ &= \frac{3k^2+9k+7}{3} - (k^2+2k+1) \\ &= k + \frac{4}{3} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに $1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 < \frac{(k+2)^3}{3}$

よって, $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n について①は成り立つ。

(2) $\frac{a^n+b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \cdots \cdots \textcircled{1}$ とする。

[1] $n=1$ のとき (左辺) $=\frac{a+b}{2}$, (右辺) $=\frac{a+b}{2}$

よって, ①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, ①が成り立つ, すなわち

$$\frac{a^k+b^k}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と仮定する。 $n=k+1$ のとき, ①の両辺の差を考えると, ②から

$$\begin{aligned} \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} &= \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^k \\ &\geq \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} - \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^k+b^k}{2} \\ &= \frac{2a^{k+1}+2b^{k+1}-a^{k+1}-ab^k-ab^k-b^{k+1}}{4} \\ &= \frac{a^{k+1}+b^{k+1}-ab^k-a^k b}{4} = \frac{(a-b)(a^k-b^k)}{4} \end{aligned}$$

この式は, $a \geq b$ のときも, $a \leq b$ のときも0以上になるから

$$\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$$

よって, $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n について①は成り立つ。

4

【解答】 (1) $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{5}{6}, a_3 = \frac{23}{24}, a_4 = \frac{119}{120}$ (2) $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, 証明略

【解説】

(1) $a_1 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}, a_2 = a_1 + \frac{2}{3!} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3!} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6},$

$$a_3 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4!} = \frac{5 \cdot 4 + 3}{24} = \frac{23}{24},$$

$$a_4 = \frac{23}{24} + \frac{4}{5!} = \frac{23 \cdot 5 + 4}{120} = \frac{119}{120}$$

(2) $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \cdots \cdots [A]$ と推定される。

[1] $n=1$ のとき (1) から, [A] は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, [A] が成り立つと仮定する。

すなわち $a_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$

このとき

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} \\ &= 1 - \frac{(k+2)-(k+1)}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!} \end{aligned}$$

ゆえに, $n=k+1$ のときも [A] は成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n について, [A] は成り立つ。

5

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) 三角関数の加法定理から

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

辺々引くと $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

よって $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$

(2) 与えられた等式を①とする。

[1] $n=1$ のとき

$$\text{(左辺)} = (1+2\cos x)\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2} + 2\cos x\sin\frac{x}{2}$$

$$= \sin\frac{x}{2} + \sin\left(x+\frac{x}{2}\right) - \sin\left(x-\frac{x}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{3x}{2}$$

$$\text{(右辺)} = \sin\frac{(2 \cdot 1 + 1)x}{2} = \sin\frac{3x}{2}$$

よって, ①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき, ①が成り立つ, すなわち

$$(1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots+2\cos kx)\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{(2k+1)x}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき, ①の左辺を考えると, ②により

$$\{1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots+2\cos kx+2\cos(k+1)x\}\sin\frac{x}{2}$$

$$= (1+2\cos x+2\cos 2x+\cdots+2\cos kx)\sin\frac{x}{2} + 2\cos(k+1)x\sin\frac{x}{2}$$

$$= \sin\frac{(2k+1)x}{2} + \sin\left((k+1)x+\frac{x}{2}\right) - \sin\left((k+1)x-\frac{x}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{(2k+1)x}{2} + \sin\frac{(2k+3)x}{2} - \sin\frac{(2k+1)x}{2}$$

$$= \sin\frac{(2k+3)x}{2} = \sin\frac{\{2(k+1)+1\}x}{2}$$

よって, $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2] により, すべての自然数 n について, ①は成り立つ。

第6講 レベルB

1

【解答】 (1) $a_{n+1} = a_n + 2b_n, b_{n+1} = a_n + b_n$ (2) [略]

$$(3) a_n = \frac{1}{2} \{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \}, b_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \}$$

【解説】

$$(1) a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{n+1} = (1 + \sqrt{2})^n (1 + \sqrt{2}) = (a_n + b_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$$

$$= a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2}$$

$$a_n, b_n \text{ は有理数であるから } a_{n+1} = a_n + 2b_n, b_{n+1} = a_n + b_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(2) $n=1$ のとき $a_1 = b_1 = 1$ より, 成り立つ.

$n=k$ のとき $(1 - \sqrt{2})^k = a_k - b_k\sqrt{2}$ が成り立つと仮定すると

$$(1 - \sqrt{2})^{k+1} = (1 - \sqrt{2})^k (1 - \sqrt{2}) = (a_k - b_k\sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$$

$$= a_k + 2b_k - (a_k + b_k)\sqrt{2}$$

① から $a_k + 2b_k = a_{k+1}, a_k + b_k = b_{k+1}$ であるから

$(1 - \sqrt{2})^{k+1} = a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{2}$ となり, 与式は $n=k$ のとき成り立つと仮定すると $n=k+1$ のときも成り立つ.

よって, 任意の自然数 n に対して $(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ が成り立つ.

(3) $a_n + b_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n \cdots \cdots \textcircled{2}, a_n - b_n\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^n \cdots \cdots \textcircled{3}$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ から } a_n = \frac{1}{2} \{ (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \}, b_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \}$$

2

【解答】 略

【解説】

数学的帰納法により証明する.

[1] $n=0$ のとき

$$(\text{左辺}) = f_0(2\cos\theta) = 1$$

$$(\text{右辺}) = \frac{\sin(0+1)\theta}{\sin\theta} = 1$$

よって, 成り立つ.

$n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = f_1(2\cos\theta) = 2\cos\theta$$

$$(\text{右辺}) = \frac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$$

よって, 成り立つ.

[2] $n=k-1, k (k \geq 1)$ のとき成り立つと仮定する.

$$\text{すなわち } f_{k-1}(2\cos\theta) = \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$$

$$f_k(2\cos\theta) = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

$n=k+1$ のとき

$$(\text{左辺}) = f_{k+1}(2\cos\theta)$$

$$= 2\cos\theta f_k(2\cos\theta) - f_{k-1}(2\cos\theta)$$

$$= 2\cos\theta \cdot \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$$

$$= 2\cos\theta \cdot \frac{\sin k\theta \cos\theta + \cos k\theta \sin\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{(2\cos^2\theta - 1)\sin k\theta + 2\sin\theta \cos\theta \cos k\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos 2\theta \sin k\theta + \sin 2\theta \cos k\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta} = (\text{右辺})$$

よって, 成り立つ.

以上から, $n \geq 0$ であるすべての n について $f_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ と表される.

3

【解答】 略

【解説】

「 $\alpha^n + \beta^n - 3^n$ は 5 の整数倍になる」 $\cdots \cdots$ ① とする.

① を数学的帰納法を用いて証明する.

ここで, 解と係数の関係から $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 5$

[1] $n=1, 2$ のとき

$$n=1 \text{ のとき } \alpha + \beta - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$n=2 \text{ のとき } \alpha^2 + \beta^2 - 3^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 9 = 3^2 - 2 \cdot 5 - 9 = -10 = 5 \cdot (-2)$$

よって, $n=1, 2$ のとき, ① は成り立つ.

[2] $n=k, k+1$ のとき ① が成り立つと仮定する.

このとき, 整数 l, m を用いて

$$\alpha^k + \beta^k - 3^k = 5l, \alpha^{k+1} + \beta^{k+1} - 3^{k+1} = 5m$$

と表せる.

$n=k+2$ のとき

$$\alpha^{k+2} + \beta^{k+2} - 3^{k+2} = (\alpha + \beta)(\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}) - \alpha\beta(\alpha^k + \beta^k) - 3^{k+2}$$

$$= 3(5m + 3^{k+1}) - 5(5l + 3^k) - 3^{k+2}$$

$$= 5(3m - 5l - 3^k)$$

$3m - 5l - 3^k$ は整数であるから, $\alpha^{k+2} + \beta^{k+2} - 3^{k+2}$ は 5 の整数倍になる.

よって, $n=k+2$ のときも ① は成り立つ.

[1], [2] から, すべての正の整数 n に対して ① は成り立つ.

4

【解答】 略

【解説】

数列 $\{a_n\}$ がすべての正の整数 n に対して

$$0 \leq 3a_n \leq \sum_{k=1}^n a_k \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たしているとき, すべての n に対して

$$a_n = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

であることを数学的帰納法で証明する.

[1] $n=1$ のとき

① において $n=1$ とすると

$$0 \leq 3a_1 \leq a_1$$

すなわち $0 \leq 3a_1$ かつ $3a_1 \leq a_1$

$$0 \leq a_1 \text{ かつ } a_1 \leq 0$$

よって $a_1 = 0$

したがって, ② は $n=1$ のとき成り立つ.

[2] $n=1, 2, \dots, l$ のとき ② が成り立つ, すなわち

$$a_1 = a_2 = \dots = a_l = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

であると仮定する.

$n=l+1$ のときを考えると, ① から

$$0 \leq 3a_{l+1} \leq \sum_{k=1}^{l+1} a_k$$

すなわち $0 \leq 3a_{l+1} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_l + a_{l+1}$

これと ③ から $0 \leq 3a_{l+1} \leq a_{l+1}$

よって $a_{l+1} = 0$

したがって, ② は $n=l+1$ のときも成り立つ.

[1], [2] から, ② はすべての正の整数 n に対して成り立つ.

章末問題A

1

【解答】 (ア) 3 (イ) 2 (ウ) $3(4^n - 1)$ (エ) 4 (オ) $6(4^n - 1)$

【解説】
 $a_2 = 6$ から $a_1 r = 6$ ……①

$a_5 = 48$ から $a_1 r^4 = 48$

よって $a_1 \cdot r^3 = 48$

これと①から $6r^3 = 48$ すなわち $r^3 = 8$

r は実数であるから $r = \sqrt[3]{8}$

このとき、①から $a_1 = 7.5$

よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ であり $a_n^2 = (3 \cdot 2^{n-1})^2 = 9 \cdot 4^{n-1}$

ゆえに、数列 $\{a_n^2\}$ は初項 9、公比 4 の等比数列であるから

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = \frac{9(4^n - 1)}{4 - 1} = 3(4^n - 1)$$

$b_n = a_n a_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} \cdot 3 \cdot 2^n = 18 \cdot 4^{n-1}$ であるから、数列 $\{b_n\}$ も公比 4 の等比数列である。

よって $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \frac{18(4^n - 1)}{4 - 1} = 6(4^n - 1)$

2

【解答】 $f(x) = x^2 - 3x + 2$

【解説】

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k^2 + ak + b) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + a \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + bn \right\}$$

$$= \frac{1}{6} (n+1)(2n+1) + \frac{a}{2} (n+1) + b = \frac{1}{3} n^2 + \frac{a+1}{2} n + \frac{3a+6b+1}{6}$$

よって、 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{3} f(n)$ から $\frac{1}{3} n^2 + \frac{a+1}{2} n + \frac{3a+6b+1}{6} = \frac{1}{3} n^2 + \frac{a}{3} n + \frac{b}{3}$

これがすべての自然数 n に対して成り立つから $\frac{a+1}{2} = \frac{a}{3}$, $\frac{3a+6b+1}{6} = \frac{b}{3}$

これを解いて $a = -3$, $b = 2$

したがって $f(x) = x^2 - 3x + 2$

3

【解答】 (1) $\sqrt{3}$ (2) $6n - 1$

【解説】

(1) m を整数とする。 $\sin \frac{k\pi}{3}$ の値は、

$k = 6m + 1$ のとき $\sin \left(2m\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 6m + 2$ のとき $\sin \left(2m\pi + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 6m + 3$ のとき $\sin(2m\pi + \pi) = 0$

$k = 6m + 4$ のとき $\sin \left(2m\pi + \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 6m + 5$ のとき $\sin \left(2m\pi + \frac{5\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 6m$ のとき $\sin 2m\pi = 0$

$2007 = 6 \times 334 + 3$ であるから

$$\sum_{k=1}^{2007} \sin \frac{k\pi}{3} = 334 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = \sqrt{3}$$

(2) $S = \sum_{k=1}^{12n-1} \left(\cos \frac{k\pi}{12} \right)^2$ とおくと

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{12n-1} \left(1 + \cos \frac{k\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(12n - 1 + \sum_{k=1}^{12n-1} \cos \frac{k\pi}{6} \right) \dots\dots ①$$

ここで $\sum_{k=1}^{12n-1} \cos \frac{k\pi}{6}$

$$= \left(\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{6} + \dots\dots + \cos \frac{11\pi}{6} \right)$$

$$+ \left(\cos \frac{12\pi}{6} + \cos \frac{13\pi}{6} + \dots\dots + \cos \frac{23\pi}{6} \right) + \dots\dots$$

$$+ \left(\cos \frac{12n-12}{6} \pi + \cos \frac{12n-11}{6} \pi + \dots\dots + \cos \frac{12n-1}{6} \pi \right)$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 + \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + (-1) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right) + 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$+ \left\{ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 + \left(-\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + (-1) \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \right) + 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \times (n-1)$$

$$= -1 + 0 \times (n-1) = -1$$

よって、①から $S = \frac{1}{2} (12n - 1 - 1) = 6n - 1$

4

【解答】 (1) $a_{2m} = 3m - 1$

(2) n が偶数のとき $S_n = \frac{3}{4} n^2$, n が奇数のとき $S_n = \frac{3}{4} n^2 + \frac{1}{4}$

(3) $n = 29$

【解説】

(1) 1, 2, 4, 5, 7, 8, ……であり $a_{2m-1} = 1 + 3(m-1) = 3m - 2$,
 $a_{2m} = a_{2m-1} + 1 = 3m - 1$

(2) n が偶数のとき、 $n = 2m$ とすると

$$S_n = S_{2m} = \sum_{k=1}^m (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^m (3k - 2 + 3k - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^m (6k - 3) = 3m^2 = 3 \left(\frac{n}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} n^2$$

n が奇数のとき、 $n = 2m - 1$ とすると

$$S_n = S_{2m-1} = S_{2m} - a_{2m} = 3m^2 - (3m - 1)$$

$$= 3 \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 - 3 \cdot \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{3}{4} n^2 + \frac{1}{4}$$

(3) $\frac{3}{4} x^2 = 600$ を解くと $x = 20\sqrt{2} = 28.28\dots\dots$

$n \leq 28$ のとき $S_n \leq S_{28} = \frac{3}{4} \cdot 28^2 = 588 < 600$

$$S_{29} = \frac{3}{4} \cdot 29^2 + \frac{1}{4} = 631 > 600$$

よって、求める n の値は $n = 29$

5

【解答】 (1) $a_n = 2n - 1$, $b_n = 3^n$ (2) $S_n = 1 - \frac{n+1}{3^n}$

【解説】

(1) $\{a_n\}$ の公差を d , $\{b_n\}$ の公比を r とする。

$a_1 = 1$, $b_1 = 3$ であるから $a_n = 1 + (n-1)d$, $b_n = 3r^{n-1}$

$a_2 + 2b_2 = 21$ から $1 + d + 6r = 21$

よって $d = 20 - 6r$ ……①

$a_4 + 2b_4 = 169$ から $1 + 3d + 6r^3 = 169$

よって $6r^3 + 3d - 168 = 0$ ……②

①を②に代入すると $6r^3 + 3(20 - 6r) - 168 = 0$

整理すると $r^3 - 3r - 18 = 0$ すなわち $(r-3)(r^2 + 3r + 6) = 0$

r は正の数であるから $r = 3$

①に代入して $d = 2$

よって、求める一般項は $a_n = 2n - 1$, $b_n = 3^n$

(2) (1) から $S_n = \frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \dots\dots + \frac{2n-1}{3^n}$

$$\frac{1}{3} S_n = \frac{1}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots\dots + \frac{2n-3}{3^n} + \frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

辺々を引くと

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots\dots + \frac{2}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\dots + \frac{1}{3^{n-1}} \right) - \frac{1}{3} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{1}{3} - \frac{2n-1}{3^{n+1}} = 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n - \frac{1}{3} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2(n+1)}{3^{n+1}}$$

よって $S_n = \frac{3}{2} \left\{ \frac{2}{3} - \frac{2(n+1)}{3^{n+1}} \right\} = 1 - \frac{n+1}{3^n}$

6

【解答】 (1) $a_1 = 6$, $a_2 = 18$ (2) $a_n = 3n(n+1)$ (3) $\frac{100}{303}$

【解説】

(1) $a_1 = S_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 6$

$a_2 = S_2 - a_1 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 6 = 18$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^3 + 3n^2 + 2n) - \{(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 2(n-1)\}$$

$$= 3n^2 + 3n = 3n(n+1) \dots\dots ①$$

また、(1) から $a_1 = 6$

ここで、①において $n = 1$ とすると $a_1 = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$

よって、 $n = 1$ のときも①は成り立つ。

したがって $a_n = 3n(n+1)$

章末問題A

(3) $\frac{1}{a_k} = \frac{1}{3n(n+1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{100}{303}$$

7

解答 28

解説

$$\frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})(\sqrt{n-1} - \sqrt{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{n-1-n} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

同様に $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

また $\frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1})}$

$$= \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n+1}}{n-1-(n+1)} = \frac{1}{2}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$$

よって (与式) $= \sum_{n=1}^{100} \left\{ (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \frac{1}{2}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \right\}$

$$= \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{100} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$$

$$= \frac{3}{2} \{ (\sqrt{2} - 0) + (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - \sqrt{2})$$

$$+ \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{98}) + (\sqrt{101} - \sqrt{99}) \}$$

$$= \frac{3}{2}(\sqrt{101} + \sqrt{100} - \sqrt{1})$$

$$= \frac{3}{2}(\sqrt{101} + 9) = \frac{\sqrt{909} + 27}{2}$$

ここで $30^2 < 909 < 31^2$ から $30 < \sqrt{909} < 31$

よって $\frac{30+27}{2} < \frac{\sqrt{909} + 27}{2} < \frac{31+27}{2}$

すなわち $28.5 < \frac{\sqrt{909} + 27}{2} < 29$

よって、整数部分は 28

8

解答 (1) $a + \frac{1}{2a} + \frac{7}{2}$ (2) $k = \frac{1}{2}n(n+1)$ (3) 第 2031 項は $\frac{1}{2}$ より大きい

解説

(1) $\log_2 1 + \log_2 2 + \log_3 1 + \log_3 2 + \log_3 3 + \log_4 1 + \log_4 2 + \log_4 3 + \log_4 4 + \log_5 1$

$$= 0 + 1 + 0 + a + 1 + 0 + \log_4 2 + \log_4 3 + 1 + 0$$

$$= 3 + a + \frac{\log_3 2}{\log_3 4} + \frac{1}{\log_3 4}$$

$$= 3 + a + \frac{a}{2a} + \frac{1}{2a} = a + \frac{1}{2a} + \frac{7}{2}$$

(2) 与えられた数列を

$$\log_2 1, \log_2 2 | \log_3 1, \log_3 2, \log_3 3 | \log_4 1, \log_4 2,$$

$$\log_4 3, \log_4 4 | \log_5 1, \log_5 2, \dots$$

のように、底の等しいものを 1 つの群として区切って考える。

初項から数えて n 番目の 0 となる項は、第 n 群の最初の項、すなわち $\log_{n+1} 1$ である。

この項が第 k 項であるとする、第 m 群の項は $(m+1)$ 個あるから、 $n \geq 2$ のとき

$$k = (2+3+\dots+n) + 1 = \frac{1}{2}n(n+1) \dots \textcircled{1}$$

1 番目の 0 となる項は第 1 項であるから、 $n=1$ のとき $k=1$ である。

よって、 $\textcircled{1}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(3) 第 2031 項の対数の底を $n (n \geq 2)$ とすると、(2) より

$$\frac{1}{2}(n-1)n \leq 2031 < \frac{1}{2}n(n+1) \dots \textcircled{2}$$

$(n-1)n, n(n+1)$ は、 $n \geq 2$ のとき単調に増加し

$$\frac{1}{2}(64-1) \cdot 64 = 2016, \frac{1}{2} \cdot 64(64+1) = 2080$$

ゆえに、 $\textcircled{2}$ を満たす自然数 n は $n=64$

よって、第 2016 項が底 64 になる最初の項であるから、第 2031 項は

$$\log_{64}(2031 - 2016 + 1) = \log_{64} 16$$

また $\log_{64} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 64} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

したがって、第 2031 項は $\frac{1}{2}$ より大きい。

9

解答 $(n-1)2^{n+1} + 2$

解説

$1 < x < 2^{n+1}$ および $0 < y \leq \log_2 x$ をみたす領域内の $y=k$ 上に $(2^{n+1} - 2^k)$ 個の格子点が存在する。

よって、求める格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^n (2^{n+1} - 2^k) = (n-1)2^{n+1} + 2$$

10

解答 (1) $r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (2) 略

解説

(1) 右の図において、 $n \geq 2$ のとき

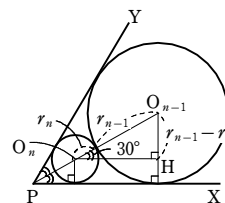
$$O_{n-1}O_n = r_{n-1} + r_n, O_{n-1}H = r_{n-1} - r_n$$

$$\angle O_{n-1}O_nH = 30^\circ \text{ から } O_{n-1}O_n = 2O_{n-1}H$$

よって $r_{n-1} + r_n = 2(r_{n-1} - r_n)$

ゆえに $r_n = \frac{1}{3}r_{n-1}$ また $r_1 = 1$

数列 $\{r_n\}$ は初項 1、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから



$$r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(2) $S_n = \pi r_n^2 = \pi \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$, $S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{9}{8}\pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\}$

よって $S_1 + S_2 + \dots + S_n < \frac{9}{8}\pi < 1.125 \times 3.15 = 3.54375 < 3.6$

11

解答 (1) $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$, $b_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (2) $a_n = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (3) $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

解説

(1) 漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると $3 \cdot \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n}$

よって、 $b_n = \frac{a_n}{n}$ とおくと $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$

また $b_1 = \frac{a_1}{1} = 2$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 2、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから $b_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2) $a_n = nb_n = 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) $a_{k+1} - \frac{1}{3}a_k = 2(k+1)\left(\frac{1}{3}\right)^k - \frac{1}{3} \cdot 2k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^k$

よって $\sum_{k=1}^n \left(a_{k+1} - \frac{1}{3}a_k \right) = \sum_{k=1}^n 2\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

12

解答 (1) $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{7}{6}$, $a_4 = \frac{5}{8}$ (2) $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ (3) $a_n = \frac{2^n - 1}{n!}$

解説

(1) $a_2 = \frac{2}{2}a_1 + \frac{1}{2!} = \frac{2}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2!} = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3!} = \frac{7}{6}$,

$$a_4 = \frac{2}{4}a_3 + \frac{1}{4!} = \frac{2}{4} \cdot \frac{7}{6} + \frac{1}{4!} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

(2) $b_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \left\{ \frac{2}{n+1} a_n + \frac{1}{(n+1)!} \right\}$

$$= \frac{n!}{2^n} a_n + \frac{1}{2^{n+1}} = b_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

(3) (2) より $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2^{n+1}}$

$n \geq 2$ のとき $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

初項は $b_1 = \frac{1}{2}$ であるから、この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n = \frac{2^n}{n!} b_n = \frac{2^n - 1}{n!}$

章末問題A

13

【解答】 $a_n = n!$

【解説】

$n \geq 2$ のとき

$$a_{n+1} = 1 + a_1 + 2a_2 + \dots + (n-1)a_{n-1} + na_n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_n = 1 + a_1 + 2a_2 + \dots + (n-1)a_{n-1} \quad \dots \textcircled{2}$$

①-② から $a_{n+1} - a_n = na_n$

ゆえに $a_{n+1} = (n+1)a_n$

両辺を $(n+1)!$ で割ると $\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n!}$

$$\text{よって } \frac{a_n}{n!} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} = \dots = \frac{a_2}{2!} = \frac{1+a_1}{2} = 1$$

ゆえに $a_n = n!$

また、 $a_1 = 1$ であるから、この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって $a_n = n!$

14

【解答】 (1) $b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n$ (2) $a_n = \frac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n - 1}$

【解説】

$$(1) b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1} = \frac{\frac{4a_n + 3}{a_n + 2} - 3}{\frac{4a_n + 3}{a_n + 2} + 1} = \frac{4a_n + 3 - 3(a_n + 2)}{4a_n + 3 + (a_n + 2)} = \frac{a_n - 3}{5a_n + 5}$$

$$= \frac{a_n - 3}{5(a_n + 1)} = \frac{1}{5}b_n$$

よって、求める漸化式は $b_{n+1} = \frac{1}{5}b_n$

$$(2) a_1 = 4 \text{ であるから } b_1 = \frac{a_1 - 3}{a_1 + 1} = \frac{1}{5}$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項 $\frac{1}{5}$ 、公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$b_n = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$$

$$\text{よって } a_n + 1 = 5^n(a_n - 3) \quad \text{ゆえに} \quad (5^n - 1)a_n = 3 \cdot 5^n + 1$$

$$\text{したがって } a_n = \frac{3 \cdot 5^n + 1}{5^n - 1}$$

【参考】 $x = \frac{4x+3}{x+2}$ を解くと $x=3, -1$

$$a_{n+1} - 3 = \frac{4a_n + 3}{a_n + 2} - 3 \text{ より } a_{n+1} - 3 = \frac{a_n - 3}{a_n + 2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} + 1 = \frac{4a_n + 3}{a_n + 2} + 1 \text{ より } a_{n+1} + 1 = \frac{5(a_n + 1)}{a_n + 2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{ より } \frac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \quad (\text{以下、解答と同様})$$

15

【解答】 (1) $b_n = 2n^3 - 3n^2 + n + 1$ (2) $a_n = 2^{2n^3 - 3n^2 + n + 1}$ (3) 516

【解説】

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n 2^{6n^2} \dots \textcircled{1}$ であるから、すべての自然数 n について a_n は正の数である。

①の両辺において、2を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 a_n + \log_2 2^{6n^2}$$

すなわち $\log_2 a_{n+1} = \log_2 a_n + 6n^2$

よって $b_{n+1} = b_n + 6n^2$

また $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 2 = 1$

ゆえに、 $n \geq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6k^2 = 1 + 6 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2(n-1)+1)$$

$$= 1 + n(n-1)(2n-1) = 2n^3 - 3n^2 + n + 1$$

初項は $b_1 = 1$ であるから、この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = 2n^3 - 3n^2 + n + 1$$

(2) (1) から $\log_2 a_n = 2n^3 - 3n^2 + n + 1$

よって $a_n = 2^{2n^3 - 3n^2 + n + 1}$

(3) (2) から $a_{10} = 2^{2000 - 300 + 10 + 1} = 2^{1711}$

ゆえに $\log_{10} a_{10} = 1711 \times \log_{10} 2 = 1711 \times 0.3010 = 515.011$

よって、 $515 < \log_{10} a_{10} < 516$ であるから $10^{515} < a_{10} < 10^{516}$

したがって、 a_{10} の桁数は 516

16

【解答】 $a_1 = 0, n \geq 2$ のとき $a_n = \frac{2}{n(n-1)}$

【解説】

$n \geq 2$ のとき $(n-1)^2(S_n - S_{n-1}) = S_n$ から

$$(n^2 - 2n)S_n = (n-1)^2 S_{n-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、 $n \geq 3$ のとき、①の両辺を $(n-1)(n-2)$ で割ると

$$\frac{n}{n-1} S_n = \frac{n-1}{n-2} S_{n-1}$$

ゆえに $\frac{n}{n-1} S_n = 2S_2$

$S_2 = (2-1)^2 a_2 = 1$ であるから $\frac{n}{n-1} S_n = 2$

$$\text{よって } S_n = \frac{2(n-1)}{n} \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで $n=1$ とすると $S_1 = 0, n=2$ とすると $S_2 = 1$

ゆえに、②は $n \geq 1$ で成り立つ。

よって、

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2(n-1)}{n} - \frac{2(n-2)}{n-1} = \frac{2}{n(n-1)},$$

$a_1 = 0$

17

【解答】 (1) $\alpha_n + \beta_n = 3^n$ (2) 略 (3) $\frac{2n-1}{8} 3^{n+1} + \frac{2n^2+2n+3}{8}$

【解説】

(1) 2を底として、 $a_{n+1} = a_n^2 b_n$ と $b_{n+1} = a_n b_n^2$ の両辺の対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + \log_2 b_n$$

$$\log_2 b_{n+1} = \log_2 a_n + 2\log_2 b_n$$

よって $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n \quad \dots \textcircled{1}$

$$\beta_{n+1} = \alpha_n + 2\beta_n \quad \dots \textcircled{2}$$

①+② から $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 3(\alpha_n + \beta_n)$

$\alpha_1 = \log_2 a_1 = \log_2 4 = 2, \beta_1 = \log_2 b_1 = \log_2 2 = 1$ であるから

$$\alpha_1 + \beta_1 = 2 + 1 = 3$$

ゆえに、数列 $\{\alpha_n + \beta_n\}$ は初項 3、公比 3 の等比数列であるから

$$\alpha_n + \beta_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

(2) 等式の左辺を S とすると

$$S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n$$

$$3S = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + (n-1) \cdot 3^n + n \cdot 3^{n+1}$$

辺々引くと $-2S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n - n \cdot 3^{n+1}$

$$= \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} - n \cdot 3^{n+1}$$

$$= -\frac{2n-1}{2} 3^{n+1} - \frac{3}{2}$$

したがって、 $S = \frac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \frac{3}{4}$ が成り立つ。

(3) ①-② から $\alpha_{n+1} - \beta_{n+1} = \alpha_n - \beta_n$

また $\alpha_1 - \beta_1 = 2 - 1 = 1$

ゆえに $\alpha_n - \beta_n = \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} = \dots = \alpha_1 - \beta_1 = 1$

これと (1) の結果から $\alpha_n = \frac{3^n + 1}{2}$

$$\log_2(a_1 a_2^2 a_3^3 \cdot \dots \cdot a_n^n) = \log_2 a_1 + 2\log_2 a_2 + 3\log_2 a_3 + \dots + n\log_2 a_n$$

$$= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \dots + n\alpha_n$$

$$= \sum_{k=1}^n k\alpha_k = \sum_{k=1}^n \left(k \cdot \frac{3^k + 1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k \cdot 3^k + k)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} n(n+1) \right\}$$

$$= \frac{2n-1}{8} 3^{n+1} + \frac{2n^2+2n+3}{8}$$

18

【解答】 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $1 + \frac{1}{2^n}$ (3) $\frac{1}{3 \cdot 8^{n+1}}$

【解説】

(1) $y = x^2$ から $y' = 2x$

よって、 C 上の点 $P_0(2, 4)$ における接線の方程式は

$$y - 4 = 4(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 4x - 4$$

$x = a_1, y = 2$ とすると $2 = 4a_1 - 4$ よって $a_1 = \frac{3}{2}$

(2) C 上の点 $P_n(a_n, a_n^2)$ における接線の方程式は

$$y - a_n^2 = 2a_n(x - a_n) \quad \text{すなわち} \quad y = 2a_n x - a_n^2$$

章末問題A

$x = a_{n+1}, y = a_n$ とすると $a_n = 2a_n a_{n+1} - a_n^2$

$a_n \neq 0$ であるから $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 1)$

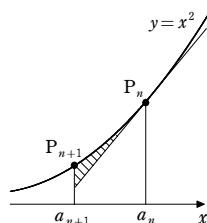
よって $a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1)$ また $a_1 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

ゆえに、数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $\frac{1}{2}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$a_n - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ したがって $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

(3) 求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_{a_{n+1}}^{a_n} \{x^2 - (2a_n x - a_n^2)\} dx \\ &= \int_{a_{n+1}}^{a_n} (x - a_n)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x - a_n)^3 \right]_{a_{n+1}}^{a_n} \\ &= \frac{1}{3}(a_n - a_{n+1})^3 = \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{2^n} - \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \right)^3 = \frac{1}{3 \cdot 8^{n+1}} \end{aligned}$$



[19]

【解答】(1) 順に 3, 4, 5, 6 (2) $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$, 証明略 (3) 201

【解説】

(1) $2(1+1)a_1 = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$

$2(2+1)a_2 = 6 \cdot \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

$2(3+1)a_3 = 8 \cdot \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{16}\right) = 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{16} = 8 \cdot \frac{5}{8} = 5$

$2(4+1)a_4 = 10 \cdot \frac{5}{8} \left(1 - \frac{1}{25}\right) = 10 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{24}{25} = 6$

(2) (1) から、 $2(n+1)a_n = n+2$ すなわち

$a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ …… ①

と推定される。これを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

(左辺) $= a_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, (右辺) $= \frac{1+2}{2(1+1)} = \frac{3}{4}$

よって、①は $n=1$ のとき成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ①が成り立つ、すなわち

$a_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$

と仮定する。 $n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \left[1 - \frac{1}{(k+2)^2} \right] = \frac{k+2}{2(k+1)} \cdot \frac{k^2+4k+3}{(k+2)^2} \\ &= \frac{k+2}{2(k+1)} \cdot \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = \frac{k+3}{2(k+2)} \end{aligned}$$

よって、①は $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2] から、①はすべての自然数 n について成り立つ。

章末問題B

[1]

【解答】 $n=7$ のとき公差は -14 , $n=14$ のとき公差は 1001

【解説】

$(x+1)^n$ の展開式における x^k の係数は ${}_n C_{n-k}$ すなわち ${}_n C_k$ である。

x^4, x^5, x^6 の係数がこの順に等差数列をなすとき、 ${}_n C_4 + {}_n C_6 = 2 \cdot {}_n C_5$ が成り立つ。

すなわち $\frac{n!}{(n-4)!4!} + \frac{n!}{(n-6)!6!} = \frac{2 \times n!}{(n-5)!5!}$

両辺に $\frac{(n-4)!6!}{n!}$ を掛けて $6 \cdot 5 + (n-4)(n-5) = 2(n-4) \cdot 6$

ゆえに $n^2 - 21n + 98 = 0$ よって $(n-7)(n-14) = 0$

したがって $n=7, 14$

$n=7$ のとき、公差は ${}_7 C_5 - {}_7 C_4 = {}_7 C_2 - {}_7 C_3 = 21 - 35 = -14$

$n=14$ のとき、公差は ${}_{14} C_5 - {}_{14} C_4 = 2002 - 1001 = 1001$

[2]

【解答】 $a=1, b=1, c=2$

【解説】

(A) から、 $4+x_2=2x_1$ が成り立ち、 $x_1 = -a+b+c, x_2 = -4a+2b+c$ であるから

$-4a+2b+c+4 = -2a+2b+2c$ よって $2a+c=4$

a, c は自然数であるから $a=1, c=2$ …… ①

(B) から $\left(\frac{x_n - x_{n+1}}{2}\right)^2 \geq 1$ すなわち $|x_n - x_{n+1}| \geq 2$ …… ②

① から $x_n - x_{n+1} = -n^2 + bn + 2 - \{-(n+1)^2 + b(n+1) + 2\}$
 $= 2n + 1 - b$

ここで $b \geq 2$ とすると、 $|2n+1-b| \leq 1$ となる自然数 n が存在し、その n に対して ②が成り立たないから条件を満たさない。

$b=1$ のとき、 $|x_n - x_{n+1}| = 2n \geq 2$ となり、条件を満たす。

したがって $a=1, b=1, c=2$

[3]

【解答】 (1) $n=32$ (2) 48.5328 (3) 3.5562

【解説】

(1) $1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5^1$ であるから

$n = (3+1)(3+1)(1+1) = 32$

(2) $\sum_{i=1}^n \log_{10} a_i = \sum_{i=1}^{32} \log_{10} a_i = \log_{10} a_1 + \log_{10} a_2 + \dots + \log_{10} a_{32}$
 $= \log_{10}(a_1 a_2 \dots a_{32})$

ここで、 $a_1 a_{32}, a_2 a_{31}, a_3 a_{30}, \dots, a_{32} a_1$ はいずれも 1080 であるから

$(a_1 a_2 \dots a_{32})^2 = 1080^{32}$

よって $a_1 a_2 \dots a_{32} = 1080^{16} = (2^3 \times 3^3 \times 5^1)^{16} = 2^{48} \times 3^{48} \times 5^{16}$

したがって

$\sum_{i=1}^{32} \log_{10} a_i = \log_{10}(2^{48} \times 3^{48} \times 5^{16})$

$= 48 \log_{10} 2 + 48 \log_{10} 3 + 16 \log_{10} 5$

$= 48 \log_{10} 2 + 48 \log_{10} 3 + 16(1 - \log_{10} 2)$

$= 32 \log_{10} 2 + 48 \log_{10} 3 + 16$

$= 32 \times 0.3010 + 48 \times 0.4771 + 16 = 48.5328$

章末問題B

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \log_{10}\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) &= \log_{10}\left(\sum_{i=1}^{32} a_i\right) = \log_{10}((2^0+2^1+2^2+2^3)(3^0+3^1+3^2+3^3)(5^0+5^1)) \\
 &= \log_{10}(15 \times 40 \times 6) = \log_{10}((3 \times 5) \times (2^3 \times 5) \times (2 \times 3)) \\
 &= \log_{10}(2^4 \times 3^2 \times 5^2) = 4\log_{10}2 + 2\log_{10}3 + 2\log_{10}5 \\
 &= 4\log_{10}2 + 2\log_{10}3 + 2(1 - \log_{10}2) \\
 &= 2\log_{10}2 + 2\log_{10}3 + 2 \\
 &= 2 \times 0.3010 + 2 \times 0.4771 + 2 = 3.5562
 \end{aligned}$$

4

解答 48桁

解説

$$\sum_{n=0}^{99} 3^n = \frac{1 \cdot (3^{100} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{100} - 1}{2}$$

$\sum_{n=0}^{99} 3^n$ の範囲を調べる。

$$\frac{3^{100} - 1}{2} = \frac{(2+1) \cdot 3^{99} - 1}{2} = \frac{2 \cdot 3^{99} + 3^{99} - 1}{2} = 3^{99} + \frac{3^{99} - 1}{2} > 3^{99}$$

よって $\sum_{n=0}^{99} 3^n > 3^{99}$

$$\text{また } \frac{3^{100} - 1}{2} < \frac{3^{100}}{2} < 3^{100} \quad \text{よって } \sum_{n=0}^{99} 3^n < 3^{100}$$

以上から $3^{99} < \sum_{n=0}^{99} 3^n < 3^{100}$

各辺の常用対数をとると $\log_{10}3^{99} < \log_{10}\sum_{n=0}^{99} 3^n < \log_{10}3^{100}$

すなわち $99\log_{10}3 < \log_{10}\sum_{n=0}^{99} 3^n < 100\log_{10}3$

$\log_{10}3 = 0.4771$ より, $99\log_{10}3 = 47.2329$, $100\log_{10}3 = 47.71$ であるから

$$47 < \log_{10}\sum_{n=0}^{99} 3^n < 48$$

したがって $10^{47} < \sum_{n=0}^{99} 3^n < 10^{48}$

ゆえに, $\sum_{n=0}^{99} 3^n$ は 48桁

5

解答 順に $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

解説

番号 r の袋を選んで, 1回目に赤球が取り出される確率は

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{r-1}{n-1} \quad (r=2, 3, \dots, n)$$

よって, いずれかの袋から赤球が1回目に取り出される確率は

$$\sum_{r=2}^n \frac{r-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{r=2}^n (r-1) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

また, 番号 r の袋を選んで, 2回とも赤球が取り出される確率は

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{r-1}{n-1} \cdot \frac{r-2}{n-2} \quad (r=3, 4, \dots, n)$$

よって, いずれかの袋から2回とも赤球が取り出される確率は

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=3}^n \frac{(r-1)(r-2)}{n(n-1)(n-2)} &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{r=3}^n (r-1)(r-2) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{j=1}^{n-2} j(j+1) \\
 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{3} [j(j+1)(j+2) - (j-1)j(j+1)] \\
 &= \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \cdot \frac{1}{3} (n-2)(n-1)n = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

6

解答 (1) $a_7=3, a_{50}=7$ (2) $2m$ (3) 59685

解説

(1) $2 < \sqrt{7} < 3$ であり,

$$(\sqrt{7})^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 7 - \frac{25}{4} = \frac{3}{4} > 0 \text{ より } a_7 = 3$$

$7 < \sqrt{50} < 8$ であり,

$$(\sqrt{50})^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 = 50 - \frac{225}{4} = -\frac{25}{4} < 0 \text{ より } a_7 = 7$$

(2) $a_n = m$ となるとき $m - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} \leq m + \frac{1}{2}$ が成立する。

各辺を平方して $m^2 - m + \frac{1}{4} \leq n \leq m^2 + m + \frac{1}{4}$

よって, これを満たす n の個数は $m^2 - m + 1$ 以上 $m^2 + m$ 以下の整数の個数, つまり $(m^2 + m) - (m^2 - m + 1) + 1 = 2m$ 個である。

(3) 第 m 群に $2m$ 個の数列がある群数列: $\{1|1|2222|33333|4|\dots\}$ を考える。

第 n 項の数は a_n に対応しており, a_{2001} は第 45 群の第 21 項にある。

以上より

$$\sum_{k=1}^{2001} a_k = \sum_{k=1}^{44} k \cdot 2k + 45 \cdot 21 = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 44 \cdot 45 \cdot 89 + 45 \cdot 21 = 59685$$

7

解答 (ア) $k+1$ (イ) $\frac{1}{k+1}$ (ウ) $\frac{1}{3}$ (エ) $n+2$ (オ) $\frac{1}{k+2}$

(カ) $k+1$

解説

$$f_{k+i}(n) = n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)(n+k) = (n+k)f_k(n) \quad \dots \textcircled{1}$$

$n \geq 2$ のとき

$$f_{k+i}(n-1) = (n-1)n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1) = (n-1)f_k(n)$$

よって $f_{k+i}(n) - f_{k+i}(n-1) = ({}^r k+1)f_k(n)$

ゆえに $(k+1)\sum_{r=2}^n f_k(r)$

$$= f_{k+1}(2) - f_{k+1}(1) + f_{k+1}(3) - f_{k+1}(2)$$

$$+ \dots + f_{k+1}(n-1) - f_{k+1}(n-2)$$

$$+ f_{k+1}(n) - f_{k+1}(n-1)$$

$$= -f_{k+1}(1) + f_{k+1}(n)$$

① より, $f_{k+1}(1) = (k+1)f_k(1)$ であるから

$$(k+1)\sum_{r=1}^n f_k(r) = f_{k+1}(n)$$

よって $\sum_{r=1}^n f_k(r) = \frac{1}{k+1} f_{k+1}(n) \quad \dots \textcircled{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{ゆえに } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) &= \sum_{r=1}^n f_2(r) = \frac{1}{3} f_3(n) \\
 &= \frac{1}{3} n(n+1)({}^x n+2)
 \end{aligned}$$

② から $\sum_{r=1}^n r(r+1)(r+2)\dots(r+k)$

$$= \sum_{r=1}^n f_{k+1}(r) = \frac{1}{k+2} f_{k+2}(n)$$

$$= \frac{1}{k+2} n(n+1)(n+2)\dots(n+k+1)$$

$$= \frac{1}{k+2} \times \frac{(n+{}^x k+1)!}{(n-1)!}$$

8

解答 (1) 第 $\frac{1}{2}(k^2+k+2)$ 項 (2) 第 $\frac{1}{2}(m^2+15m+74)$ 項

$$(3) \frac{1}{6}(2k^3+3k^2+k+6) \quad (4) n=128$$

解説

与えられた数列を $\{1\}, \{1, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 5, 7\}, \dots$ のように, 第 i 群に i 個の項が含まれるように群に分ける。

(1) $k+1$ 回目に現れる 1 は, 第 $k+1$ 群の最初の項である。

第 1 群から第 k 群までの項数は $\sum_{i=1}^k i = \frac{1}{2}k(k+1)$

$\frac{1}{2}k(k+1)+1 = \frac{1}{2}(k^2+k+2)$ であるから, $k+1$ 回目に現れる 1 は第 $\frac{1}{2}(k^2+k+2)$ 項である。

(2) $2n-1=17$ とすると $n=9$

よって, 1回目に現れる 17 は, 第 9 群の第 9 項である。

ゆえに, m 回目に現れる 17 は, 第 $m+8$ 群の第 9 項である。第 1 群から第 $m+7$ 群ま

での項数は $\sum_{i=1}^{m+7} i = \frac{1}{2}(m+7)(m+8)$

$\frac{1}{2}(m+7)(m+8)+9 = \frac{1}{2}(m^2+15m+74)$ であるから, m 回目に現れる 17 は

第 $\frac{1}{2}(m^2+15m+74)$ 項である。

(3) 第 i 群に含まれる項の和は $\sum_{k=1}^i (2k-1) = i^2$

よって, 初項から $k+1$ 回目の 1 までの項の和は

$$\sum_{i=1}^k i^2 + 1 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + 1 = \frac{1}{6}(2k^3+3k^2+k+6)$$

(4) 第 1 群から第 k 群までに含まれる項の和を T_k とすると

$$T_k = \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

よって $T_{15} = \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 16 \cdot 31 = 1240$

$$T_{16} = \frac{1}{6} \cdot 16 \cdot 17 \cdot 33 = 1496$$

また $T_{15} + 7^2 = 1289$, $T_{15} + 8^2 = 1304$

ゆえに, 初項から第 16 群の第 8 項までの和が初めて 1300 より大きくなるから, 求める

章末問題B

n の値は $n = \sum_{i=1}^{15} i + 8 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 16 + 8 = 128$

9

【解答】 $3n^2 + 3n + 1$

【解説】

$3x + 2y = 6n \dots\dots ①$

① と x 軸との交点の座標は $(2n, 0)$,

y 軸との交点の座標は $(0, 3n)$

直線 $x = k$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$) と ① の交点の座標は

$(k, 3n - \frac{3}{2}k) \dots\dots ②$

よって、題意に適する格子点のうち、直線 $x = k$ 上にある個数を l_k とすると

k が偶数のとき $l_k = 3n - \frac{3}{2}k + 1$

k が奇数のとき $l_k = 3n - \frac{3}{2}k - \frac{1}{2} + 1 = 3n - \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}$

k が偶数のとき $k = 2m$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) とおけるから

$l_{2m} = 3n - \frac{3}{2} \cdot 2m + 1 = 3n - 3m + 1$

k が奇数のとき $k = 2m - 1$ ($m = 1, 2, \dots, n$) とおけるから

$l_{2m-1} = 3n - \frac{3}{2}(2m-1) + \frac{1}{2} = 3n - 3m + 2$

よって、求める格子点の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n l_{2m} + \sum_{m=1}^n l_{2m-1} &= l_0 + \sum_{m=1}^n l_{2m} + \sum_{m=1}^n l_{2m-1} = l_0 + \sum_{m=1}^n (l_{2m} + l_{2m-1}) \\ &= 3n + 1 + \sum_{m=1}^n \{(3n - 3m + 1) + (3n - 3m + 2)\} \\ &= 3n + 1 + \sum_{m=1}^n \{-6m + 3(2n + 1)\} \\ &= 3n + 1 - 6 \sum_{m=1}^n m + 3(2n + 1) \sum_{m=1}^n 1 \\ &= 3n + 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} n(n + 1) + 3(2n + 1)n \\ &= 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

【別解】 直線 $3x + 2y = 6n$ ($0 \leq x \leq 2n$) 上の格子点 $(0, 3n)$, $(2, 3n - 3), \dots, (2n, 0)$ の個数は

$n + 1$

4点 $(0, 0)$, $(2n, 0)$, $(2n, 3n)$, $(0, 3n)$ を頂点とする長方形上の格子点の個数は

$(2n + 1)(3n + 1)$

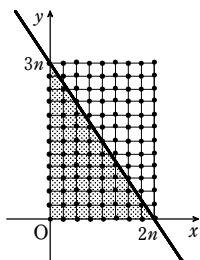
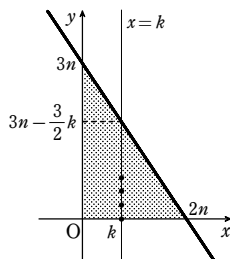
よって、求める格子点の個数は

$\frac{1}{2} \{(2n + 1)(3n + 1) - (n + 1)\} + (n + 1) = 3n^2 + 3n + 1$

10

【解答】 (1) n が奇数のとき $a_{n+4} = 4a_n + 3$, n が偶数のとき $a_{n+4} = 4a_n + 6$

(2) $n = 4k - 3, 4k - 2$ のとき $0; n = 4k - 1$ のとき $1; n = 4k$ のとき 2



(ただし、 k は自然数)

【解説】

(1) [1] n が奇数のとき

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= a_{(n+3)+1} = a_{n+3} + 1 = a_{(n+2)+1} + 1 = 2a_{n+2} + 1 \\ &= 2a_{(n+1)+1} + 1 = 2(a_{n+1} + 1) + 1 \\ &= 2a_{n+1} + 3 = 2 \cdot 2a_n + 3 = 4a_n + 3 \end{aligned}$$

[2] n が偶数のとき

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= a_{(n+3)+1} = 2a_{n+3} = 2a_{(n+2)+1} = 2(a_{n+2} + 1) = 2a_{n+2} + 2 \\ &= 2a_{(n+1)+1} + 2 = 2 \cdot 2a_{n+1} + 2 = 4a_{n+1} + 2 = 4(a_n + 1) + 2 = 4a_n + 6 \end{aligned}$$

(2) n が奇数のとき $a_{n+4} = 3(a_n + 1) + a_n$, n が偶数のとき $a_{n+4} = 3(a_n + 2) + a_n$
 $3(a_n + 1), 3(a_n + 2)$ は 3 で割り切れるから、 n が奇数、偶数のいずれの場合についても、 a_{n+4} を 3 で割った余りは、 a_n を 3 で割った余りと等しい。

$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 2$ であるから、 a_n を 3 で割ったときの余りは、 k を自然数として
 $n = 4k - 3, 4k - 2$ のとき $0; n = 4k - 1$ のとき $1; n = 4k$ のとき 2

【参考】 [一般項 a_n は次のようにして求めることができる]

自然数 n に対して、 $b_n = a_{2n-1}$ とおくと

$b_{n+1} = a_{2n+1} = a_{2n} + 1 = 2a_{2n-1} + 1 = 2b_n + 1$ よって $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$

ゆえに、数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = a_1 + 1 = 1$, 公比 2 の等比数列であるから

$b_n + 1 = 2^{n-1}$ すなわち $b_n = 2^{n-1} - 1$

よって $a_{2n-1} = b_n = 2^{n-1} - 1, a_{2n} = 2a_{2n-1} = 2^n - 2$

ゆえに n が奇数のとき $a_n = 2^{\frac{n-1}{2}} - 1, n$ が偶数のとき $a_n = 2^{\frac{n}{2}} - 2$

11

【解答】 (1) (ア) $3A - 6$ (イ) $3A - 8$ (ウ) $3A - \frac{3}{2}(n - 1)$ (エ) $3A - \frac{3}{2}n + 1$

(2) (オ) $2A$ (カ) $3A^2 + A$

【解説】

(1) $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (n \text{ が奇数のとき}) \dots\dots ① \\ a_n - 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \dots\dots ② \end{cases}$

とする。

$a_5 = a_4 - 1 = (a_3 - 2) - 1 = (a_2 - 1) - 3 = (a_1 - 2) - 4 = a_1 - 6$

$a_1 = 3A$ であるから $a_5 = 3A - 6$

よって、① から $a_6 = a_5 - 2 = 3A - 8$

自然数 m に対して、② から $a_{2m+1} = a_{2m} - 1$

更に① から $a_{2m+1} = (a_{2m-1} - 2) - 1$

よって $a_{2m+1} = a_{2m-1} - 3$

したがって、数列 $\{a_{2m-1}\}$ は公差 -3 の等差数列であり、一般項は

$a_{2m-1} = a_1 + (-3)(m-1) = 3A - 3(m-1) \dots\dots ③$

n が奇数のとき、 $2m - 1 = n$, すなわち、 $m = \frac{n+1}{2}$ とすると

$a_n = 3A - \frac{3}{2}(n-1)$

また①、③ から $a_{2m} = a_{2m-1} - 2 = 3A - 3m + 1$

n が偶数のとき、 $2m = n$, すなわち、 $m = \frac{n}{2}$ とすると

$a_n = 3A - \frac{3}{2}n + 1$

(2) n が奇数のとき、 $a_n = 3A - \frac{3}{2}(n-1) > 0$ から $n < 2A + 1$

n が偶数のとき、 $a_n = 3A - \left(\frac{3}{2}n - 1\right) > 0$ から $n < 2A + \frac{2}{3}$

したがって、 $a_n > 0$ となる最大の自然数 n は

$N = 2A$

よって $\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{2A} a_n = \sum_{m=1}^A (a_{2m-1} + a_{2m})$
 $= \sum_{m=1}^A \{3A - 3(m-1) + 3A - 3m + 1\}$
 $= \sum_{m=1}^A (6A - 6m + 4) = \sum_{m=1}^A (-6m + 6A + 4)$
 $= -6 \cdot \frac{A(A+1)}{2} + (6A + 4)A$
 $= -3A^2 - 3A + 6A^2 + 4A$
 $= 3A^2 + A$

12

【解答】 (1) $a_1 = \frac{a}{a+1}$ (2) $a_n = \frac{a}{(a+1)^n}$

(3) $\frac{a}{2(a+1)(a+2)} \left\{ 1 - \frac{1}{(a+1)^{2n}} \right\}$

【解説】

(1) $BB_1 = A_1B_1 = a_1$ であるから

$B_1C = BC - BB_1 = 1 - a_1$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ であるから

$a : 1 = a_1 : (1 - a_1)$

よって $a(1 - a_1) = a_1$

ゆえに $a_1 = \frac{a}{a+1}$

(2) $\triangle ABC \sim \triangle A_nB_nC$ であるから $B_nC = \frac{a_n}{a}$

よって $B_{n+1}C = B_nC - B_nB_{n+1} = \frac{a_n}{a} - a_{n+1}$

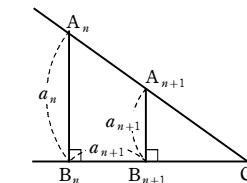
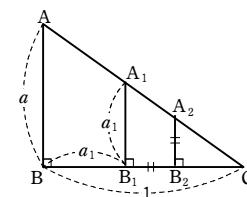
ここで、 $A_{n+1}B_{n+1} : B_{n+1}C = a : 1$ であるから

$a_{n+1} : \left(\frac{a_n}{a} - a_{n+1}\right) = a : 1$

ゆえに $a_{n+1} = \frac{1}{a+1} a_n$

よって、数列 $\{a_n\}$ は初項 $\frac{a}{a+1}$, 公比 $\frac{1}{a+1}$ の等比数列であるから

$a_n = \frac{a}{a+1} \left(\frac{1}{a+1}\right)^{n-1} = \frac{a}{(a+1)^n}$



章末問題B

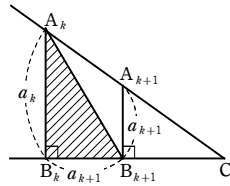
$$(3) S_k = \frac{1}{2} a_k a_{k+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{(a+1)^k} \cdot \frac{a}{(a+1)^{k+1}}$$

$$= \frac{a^2}{2(a+1)^{2k+1}} = \frac{a^2}{2(a+1)^3} \cdot \left\{ \frac{1}{(a+1)^2} \right\}^{k-1}$$

よって $\sum_{k=1}^n S_k = \frac{a^2}{2(a+1)^3} \cdot \frac{1 - \left\{ \frac{1}{(a+1)^2} \right\}^n}{1 - \frac{1}{(a+1)^2}}$

$$= \frac{a^2}{2[(a+1)^3 - (a+1)]} \left\{ 1 - \frac{1}{(a+1)^{2n}} \right\}$$

$$= \frac{a}{2(a+1)(a+2)} \left\{ 1 - \frac{1}{(a+1)^{2n}} \right\}$$



13

【解答】 (1) $b_{n+1} = 2b_n + 3$ (2) $b_n = 2^{n+1} - 3$ (3) $P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}$ (4) $n = 7$

【解説】

(1) $a_1 = 2 > 0$ で, $a_{n+1} = 8a_n^2$ であるから, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ である。
よって, $a_{n+1} = 8a_n^2$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8a_n^2$$

よって $\log_2 a_{n+1} = \log_2 8 + 2\log_2 a_n$

ゆえに $b_{n+1} = 2b_n + 3 \dots\dots ①$

(2) ① を変形して $b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$
また $b_1 + 3 = \log_2 a_1 + 3 = 1 + 3 = 4$
数列 $\{b_n + 3\}$ は初項 4, 公比 2 の等比数列であるから

$$b_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \quad \text{すなわち} \quad b_n = 2^{n+1} - 3$$

(3) すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ であるから, $P_n > 0$ である。
よって, $P_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ の両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 P_n = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_n$$

ゆえに, (2) から

$$\log_2 P_n = \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (2^{k+1} - 3)$$

$$= \frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n$$

$$= 2^{n+2} - 3n - 4 \dots\dots ②$$

よって $P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}$

(4) $P_n > 10^{100}$ について, 両辺の 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 P_n > 100 \log_2 10 \dots\dots ③$$

ここで, ② から $\log_2 P_{n+1} - \log_2 P_n = 2^{n+3} - 3(n+1) - 2^{n+2} + 3n$

$$= 2^{n+2} - 3$$

$n \geq 1$ のとき, $2^{n+2} - 3 > 0$ であるから $\log_2 P_{n+1} - \log_2 P_n > 0$
よって, $\log_2 P_n$ は単調に増加するから, ③ を満たす最小の自然数 n について考える。
 $\log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16$ であるから $3 < \log_2 10 < 4$
ゆえに $300 < 100 \log_2 10 < 400$

② から $\log_2 P_6 = 2^8 - 3 \cdot 6 - 4 = 234 < 300,$
 $\log_2 P_7 = 2^9 - 3 \cdot 7 - 4 = 487 > 400$

よって, ③ を満たす最小の自然数 n は $n = 7$ であり, 求める最小の自然数 n は $n = 7$

14

【解答】 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $a_{n+1} = \frac{2a_n}{2a_n + 1}$ (3) $\frac{3 \cdot 2^{n-1}}{3 \cdot 2^n - 1}$

【解説】

(1) $\triangle ABC, \triangle ACD$ は 1 辺の長さが 1 の正三角形である。

$AM = MC = \frac{1}{2}$ であるから

$$AE_1 = AM \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$AD \parallel BC$ であるから

$$AF_1 : F_1 C = AE_1 : BC = \frac{1}{4} : 1 = 1 : 4$$

よって, $CF_1 = \frac{4}{5}$ であり $CQ_1 = CF_1 \cos 60^\circ = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

ゆえに $BQ_1 = 1 - CQ_1 = \frac{3}{5}$

(2) $CF_n = 2CQ_n = 2(1 - a_n)$ であるから

$$AF_n = 1 - CF_n = 1 - 2(1 - a_n) = 2a_n - 1$$

よって $AE_{n+1} = \frac{1}{2} AF_n = \frac{1}{2}(2a_n - 1)$

$AD \parallel BC$ であるから

$$AF_{n+1} : F_{n+1} C = AE_{n+1} : BC = \frac{1}{2}(2a_n - 1) : 2$$

ゆえに $CF_{n+1} = \frac{2}{(2a_n - 1) + 2} = \frac{2}{2a_n + 1}$

よって $CQ_{n+1} = \frac{1}{2} CF_{n+1} = \frac{1}{2a_n + 1}$

$BQ_{n+1} = 1 - CQ_{n+1}$ であるから $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2a_n + 1} = \frac{2a_n}{2a_n + 1}$

(3) (1) から $a_1 = BQ_1 = \frac{3}{5}$

すべての自然数 n について, $a_n > 0$ であるから, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{2a_n + 1}$ の両辺の逆数をとると

と $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 1}{2a_n}$ すなわち $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2a_n} + 1$

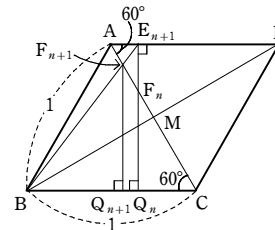
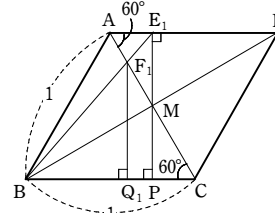
$\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと $b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + 1, b_1 = \frac{5}{3}$

漸化式を変形すると $b_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(b_n - 2)$

よって, 数列 $\{b_n - 2\}$ は初項 $b_1 - 2 = -\frac{1}{3}$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n - 2 = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = 2 - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{3 \cdot 2^n - 1}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

したがって $BQ_n = a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{3 \cdot 2^n - 1}$



15

【解答】 (1) $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ (2) $\frac{1}{3} [4 \cdot 2^{n-1} - (-1)^{n-1}]$ (3) 14 日後

【解説】

(1) 新たな感染者 1 人が感染源となった n 日後において, 感染して 2 日以降の人数を p_n , 感染して 1 日目の人数を q_n , その日に発症した人数を r_n とすると

$$a_n = p_n + q_n + r_n$$

このとき $p_{n+1} = p_n + q_n, q_{n+1} = r_n, r_{n+1} = 2p_n + 2q_n$

よって $a_{n+2} = p_{n+2} + q_{n+2} + r_{n+2} = (p_{n+1} + q_{n+1}) + r_{n+1} + (2p_{n+1} + 2q_{n+1})$

$$= a_{n+1} + 2(p_n + q_n) + 2r_n = a_{n+1} + 2a_n$$

【別解】 $a_{n+2} - a_{n+1}$ は $n + 2$ 日後に新たに感染した人数で, これは n 日後の感染者数の 2 倍に等しい。

よって $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

(2) $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ を変形すると

$$a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) \dots\dots ①$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n) \dots\dots ②$$

① より, 数列 $\{a_{n+1} + a_n\}$ は初項 $3 + 1 = 4$, 公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1} + a_n = 4 \cdot 2^{n-1} \dots\dots ③$$

② より, 数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $3 - 2 = 1$, 公比 -1 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - 2a_n = (-1)^{n-1} \dots\dots ④$$

③ - ④ から $3a_n = 4 \cdot 2^{n-1} - (-1)^{n-1}$

よって $a_n = \frac{1}{3} [4 \cdot 2^{n-1} - (-1)^{n-1}]$

(3) $\{a_n\}$ は単調に増加し, $a_{13} = \frac{4 \cdot 2^{12} - 1}{3} = 5461 < 10000,$

$a_{14} = \frac{4 \cdot 2^{13} + 1}{3} = 10923 > 10000$ であるから, 感染者数が初めて 1 万人を超えるのは 14 日後

16

【解答】 (1) $a_1 = \frac{1}{4}, b_1 = \frac{3}{8}, c_1 = \frac{3}{8}$

(2) $a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{3}{8} b_n + \frac{3}{8} c_n, b_{n+1} = \frac{3}{8} a_n + \frac{1}{4} b_n + \frac{3}{8} c_n,$

$$c_{n+1} = \frac{3}{8} a_n + \frac{3}{8} b_n + \frac{1}{4} c_n$$

(3) $a_{n+1} = -\frac{1}{8} a_n + \frac{3}{8}$

(4) $a_n = -\frac{1}{12} \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}, b_n = \frac{1}{24} \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}, c_n = \frac{1}{24} \left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$

【解説】

(1) 1 から 8 までの数で

3 で割り切れる数は 3, 6 の 2 個

3 で割ったとき 1 余る数は 1, 4, 7 の 3 個

3 で割ったとき 2 余る数は 2, 5, 8 の 3 個

章末問題B

よって $a_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, b_1 = \frac{3}{8}, c_1 = \frac{3}{8}$

(2) $X(n+1)$ が3で割り切れるのは、次のような場合である。

- [1] $X(n)$ は3で割り切れて、 $n+1$ 回目は3で割り切れる数字が出る。
- [2] $X(n)$ を3で割ると1余り、 $n+1$ 回目は3で割ると2余る数字が出る。
- [3] $X(n)$ を3で割ると2余り、 $n+1$ 回目は3で割ると1余る数字が出る。

よって $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{8}b_n + \frac{3}{8}c_n$

次に、 $X(n+1)$ を3で割ると1余るのは、次のような場合である。

- [4] $X(n)$ は3で割り切れて、 $n+1$ 回目は3で割ると1余る数字が出る。
- [5] $X(n)$ を3で割ると1余り、 $n+1$ 回目は3で割り切れる数字が出る。
- [6] $X(n)$ を3で割ると2余り、 $n+1$ 回目は3で割ると2余る数字が出る。

よって $b_{n+1} = \frac{3}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{3}{8}c_n$

更に、 $X(n+1)$ を3で割ると2余る確率 c_{n+1} については、

$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = 1$ であるから

$$c_{n+1} = 1 - (a_{n+1} + b_{n+1}) = 1 - \left(\frac{5}{8}a_n + \frac{5}{8}b_n + \frac{3}{4}c_n\right) = \frac{3}{8}a_n + \frac{3}{8}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

(3) $a_n + b_n + c_n = 1$ であるから $b_n + c_n = 1 - a_n$

よって $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{8}(b_n + c_n) = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{8}(1 - a_n) = -\frac{1}{8}a_n + \frac{3}{8}$

(4) (3)の結果の式を変形すると $a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{8}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$ 、公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = -\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

(3)と同様に考えて $b_{n+1} = -\frac{1}{8}b_n + \frac{3}{8}$

数列 $\left\{b_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $b_1 - \frac{1}{3} = \frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$ 、公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$b_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} \quad \text{よって} \quad b_n = \frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

数列 $\{c_n\}$ については、 $b_1 = c_1$ であるから、同様にして

$$c_n = \frac{1}{24}\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

[17]

[解答] (1) $a_n = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$ (2) $p_n = \frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

(3) $q_n = \frac{1}{10}\left\{6 - 5\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$

[解説]

(1) n 回目にBがさいころを投げる確率を b_n とする。

$a_1 = 1, b_1 = 0$ である。

$(n+1)$ 回目にAが投げるのは、 n 回目にAが投げて1, 2, 3の目が出るか、 n 回目にBが投げて4, 5の目が出るかのどちらかであるから

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$(n+1)$ 回目にBが投げるのは、 n 回目にAが投げて4, 5の目が出るか、 n 回目にB

が投げて1, 2, 3の目が出るかのどちらかであるから

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①+②から $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{5}{6}(a_n + b_n)$

①-②から $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{6}(a_n - b_n)$

数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 1$ 、公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列、

数列 $\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 1$ 、公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$a_n + b_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}, \quad a_n - b_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

各辺を足して2で割ると $a_n = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

(2) n 回目にAが勝つのは、 n 回目にAが投げて6の目が出る場合であるから

$$p_n = \frac{1}{6}a_n = \frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

(3) $q_n = \sum_{k=1}^n p_k = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n \left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\right\} = \frac{1}{12} \left[\frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} + \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 - \frac{1}{6}} \right]$
 $= \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{2} + \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{10} = \frac{1}{10} \left[6 - 5\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \right]$

[18]

[解答] (1) $p_n + q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ (2) $p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ (3) $p_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n$

[解説]

(1) $p_n + q_n$ は、 T_n を5で割った余りが1, 2, 3, 4のいずれかである確率、すなわち T_n が5で割り切れない確率である。

T_n が5で割り切れないのは、 n 回目までに目が出た目がすべて5以外の目の場合であるから

$$p_n + q_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2) T_{n+1} を5で割った余りが1である場合を、次の場合に分けて考える。

[1] T_n を5で割った余りが1のとき

0以上の整数 k を用いて $T_n = 5k + 1$ とおける。

このとき $T_n \cdot 1 = 5k + 1, T_n \cdot 2 = 5 \cdot 2k + 2,$

$T_n \cdot 3 = 5 \cdot 3k + 3, T_n \cdot 4 = 5 \cdot 4k + 4,$

$T_n \cdot 5 = 5(5k + 1), T_n \cdot 6 = 5(6k + 1) + 1$

であるから、 $T_{n+1} = T_n \cdot X_{n+1}$ を5で割った余りが1となる X_{n+1} は $X_{n+1} = 1, 6$

[1]と同様にして、 T_n を5で割った余りが2, 3, 4のときについて、 T_{n+1} を5で割った余りが1となる X_{n+1} を求めると

[2] T_n を5で割った余りが2のとき $X_{n+1} = 3$

[3] T_n を5で割った余りが3のとき $X_{n+1} = 2$

[4] T_n を5で割った余りが4のとき $X_{n+1} = 4$

[1]~[4]から $p_{n+1} = p_n \cdot \frac{1}{3} + q_n \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - p_n\right\} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$

(3) $r_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n p_n$ とおくと $p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n r_n$

これを(2)の結果に代入すると $\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} r_{n+1} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n r_n + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$

両辺に $\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}$ を掛けると $r_{n+1} = \frac{1}{5}r_n + \frac{1}{5}$

よって $r_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}\left(r_n - \frac{1}{4}\right)$

ここで $r_1 = \frac{6}{5} \times p_1 = \frac{6}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{5}$

ゆえに、数列 $\left\{r_n - \frac{1}{4}\right\}$ は、初項 $r_1 - \frac{1}{4} = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$ 、公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列であるから

ら $r_n - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

よって $r_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4}$

したがって $p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n r_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n$

[19]

[解答] $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{7}$

[解説]

n 秒後に X の x 座標が0, 1, 2である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n

(ただし、 $p_0 = 1, q_0 = 0, r_0 = 0$) とする。

$(n+1)$ 秒後に X の x 座標が0であるのは、次の[1], [2]の場合である。

[1] n 秒後に X の x 座標が0で、次の1秒で y 軸方向に移動するとき

[2] n 秒後に X の x 座標が1で、次の1秒で x 軸方向に -1 移動するとき

$(n+1)$ 秒後に X の x 座標が1であるのは、次の[3], [4], [5]の場合である。

[3] n 秒後に X の x 座標が0で、次の1秒で x 軸方向に 1 移動するとき

[4] n 秒後に X の x 座標が1で、次の1秒で y 軸方向に移動するとき

[5] n 秒後に X の x 座標が2で、次の1秒で x 軸方向に -1 移動するとき

$(n+1)$ 秒後に X の x 座標が2であるのは、次の[6], [7]の場合である。

[6] n 秒後に X の x 座標が1で、次の1秒で x 軸方向に 1 移動するとき

[7] n 秒後に X の x 座標が2で、次の1秒で y 軸方向に移動するとき

よって $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$p_n + q_n + r_n = 1$ であるから、②から

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n + r_n) + \frac{1}{3}q_n = \frac{1}{2}(1 - q_n) + \frac{1}{3}q_n = -\frac{1}{6}q_n + \frac{1}{2}$$

この式を変形すると $q_{n+1} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}\left(q_n - \frac{3}{7}\right)$

$q_0 - \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}$ から $q_n - \frac{3}{7} = -\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$

よって $q_n = \frac{3}{7}\left[1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right]$

章末問題B

$p_n + r_n = 1 - q_n$ であるから $p_n + r_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n \dots\dots ④$

①-③ から $p_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{2}(p_n - r_n)$

$p_0 - r_0 = 1$ から $p_n - r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \dots\dots ⑤$

④+⑤ から $2p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{4}{7}$

よって、求める確率 p_n は $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{7}$

20

【解答】 (1) $a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = 1, a_4 = \frac{7}{5}$ (2) $a_n = \frac{3n-5}{n+1}$, 証明は略 (3) 証明は略

(4) 証明は略 (5) $n = 3, 7$

【解説】

(1) $a_2 = \frac{5a_1+9}{-a_1+11} = \frac{5 \cdot (-1)+9}{-(-1)+11} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

$a_3 = \frac{5a_2+9}{-a_2+11} = \frac{5 \cdot \frac{1}{3}+9}{-\frac{1}{3}+11} = \frac{32}{32} = 1$,

$a_4 = \frac{5a_3+9}{-a_3+11} = \frac{5 \cdot 1+9}{-1+11} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

(2) $a_1 = \frac{-2}{2}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{4}{4}, a_4 = \frac{7}{5}$ であるから、

a_n の分母は $n+1$, 分子は $-2+(n-1) \cdot 3 = 3n-5$ と推測される。

よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、 $a_n = \frac{3n-5}{n+1} \dots\dots ①$ と推測される。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = \frac{3 \cdot 1 - 5}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$ から、①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、①が成り立つ、すなわち $a_k = \frac{3k-5}{k+1}$ と仮定する。

$n=k+1$ のときを考えると

$$a_{k+1} = \frac{5a_k+9}{-a_k+11} = \frac{5 \cdot \frac{3k-5}{k+1} + 9}{-\frac{3k-5}{k+1} + 11} = \frac{24k-16}{8k+16} = \frac{3k-2}{k+2} = \frac{3(k+1)-5}{(k+1)+1}$$

よって、 $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について①は成り立つ。

(3) (2) より $a_n = \frac{3n-5}{n+1} = \frac{3(n+1)-8}{n+1} = 3 - \frac{8}{n+1}$

すべての自然数 n について、 $\frac{8}{n+1} > 0$ であるから $3 - \frac{8}{n+1} < 3$

よって $a_n < 3$

(4) $a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-5}{(n+1)+1} - \frac{3n-5}{n+1} = \frac{(3n^2+n-2)-(3n^2+n-10)}{(n+2)(n+1)} = \frac{8}{(n+2)(n+1)}$

すべての自然数 n について、 $\frac{8}{(n+2)(n+1)} > 0$ であるから $a_{n+1} - a_n > 0$

よって $a_n < a_{n+1}$

(5) $a_1 = -1$, (3) より $a_n < 3$ であり、(4) より a_n は単調に増加するから、 a_n が自然数となるとき、 a_n は 1 または 2 である。

$a_n = 1$ のとき $\frac{3n-5}{n+1} = 1$ を解くと $3n-5 = n+1$ よって $n = 3$

$a_n = 2$ のとき $\frac{3n-5}{n+1} = 2$ を解くと $3n-5 = 2(n+1)$ よって $n = 7$

したがって、 a_n が自然数となる n は $n = 3, 7$

21

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 略

【解説】

(1) ${}_7C_1 = {}_7C_6 = 7, {}_7C_2 = {}_7C_5 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21, {}_7C_3 = {}_7C_4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

よって、 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対して、 ${}_7C_k$ は 7 の倍数である。

(2) $1 \leq k \leq p-1$ のとき

$${}_pC_k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p}{k} \cdot \frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = \frac{p}{k} {}_{p-1}C_{k-1}$$

よって $k \cdot {}_pC_k = p \cdot {}_{p-1}C_{k-1}$

p は素数であるから、 k と p は互いに素である。

したがって、 ${}_pC_k$ は p の倍数である。

(3) 「 $n^7 - n$ は 7 の倍数である」を①とする。

[1] $n=1$ のとき

$1^7 - 1 = 0$

よって、①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると、 $k^7 - k = 7m$ (m は整数) $\dots\dots ②$ とおける。

$n=k+1$ のときを考えると、②から

$$(k+1)^7 - (k+1) = k^7 + {}_7C_1 k^6 + {}_7C_2 k^5 + \dots + {}_7C_5 k^2 + {}_7C_6 k + 1 - (k+1) = {}_7C_1 k^6 + {}_7C_2 k^5 + \dots + {}_7C_6 k + 7m$$

(1) より、 ${}_7C_1, {}_7C_2, \dots, {}_7C_6$ は 7 の倍数であるから、 $(k+1)^7 - (k+1)$ は 7 の倍数である。

ゆえに、 $n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について①は成り立つ。

22

【解答】 (1) $f_2(x) = \frac{5}{6}x + \frac{5}{2}, f_3(x) = \frac{17}{18}x + \frac{11}{4}$ (2) 略

(3) $f_n(x) = \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}x + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

【解説】

(1) $x^2 f_2(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \int_0^x t f_1(t) dt = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \int_0^x \left(\frac{1}{2}t^2 + 2t\right) dt = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \left[\frac{1}{6}t^3 + t^2\right]_0^x = \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2$

よって $f_2(x) = \frac{5}{6}x + \frac{5}{2}$

$$x^2 f_3(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \int_0^x t f_2(t) dt = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \int_0^x \left(\frac{5}{6}t^2 + \frac{5}{2}t\right) dt = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \left[\frac{5}{18}t^3 + \frac{5}{4}t^2\right]_0^x = \frac{17}{18}x^3 + \frac{11}{4}x^2$$

よって $f_3(x) = \frac{17}{18}x + \frac{11}{4}$

(2) 「 $f_n(x)$ は実数 $a_n (> 0), b_n$ を用いて $f_n(x) = a_n x + b_n$ と表される」 $\dots\dots ①$ を数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 2$ であるから、 $a_1 = \frac{1}{2}, b_1 = 2$ とすれば、①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、①が成り立つと仮定すると

$f_k(x) = a_k x + b_k$ ($a_k (> 0), b_k$ は実数) とおける。

$n=k+1$ のときを考えると

$$x^2 f_{k+1}(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \int_0^x t f_k(t) dt = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \int_0^x (a_k t^2 + b_k t) dt = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \left[\frac{a_k}{3}t^3 + \frac{b_k}{2}t^2\right]_0^x = \left(\frac{a_k}{3} + \frac{2}{3}\right)x^3 + \left(\frac{b_k}{2} + \frac{3}{2}\right)x^2$$

よって $f_{k+1}(x) = \left(\frac{a_k}{3} + \frac{2}{3}\right)x + \frac{b_k}{2} + \frac{3}{2}$

ゆえに、 $a_{k+1} = \frac{a_k}{3} + \frac{2}{3}, b_{k+1} = \frac{b_k}{2} + \frac{3}{2}$ とすれば、 $a_{k+1} > 0$ で、 $n=k+1$ のとき

も①は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について①は成り立つから、 $f_n(x)$ は x の 1 次式である。

(3) (2) から $a_{n+1} = \frac{a_n}{3} + \frac{2}{3}$

これを变形すると $a_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}(a_n - 1)$

よって、数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = -\frac{1}{2}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$a_n - 1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに $a_n = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

また、(2) から $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{3}{2}$

これを变形すると $b_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(b_n - 3)$

よって、数列 $\{b_n - 3\}$ は初項 $b_1 - 3 = -1$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$b_n - 3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに $b_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって $f_n(x) = \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}x + 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

23

【解答】 (1) $a_2=3, a_3=6, a_4=10, a_5=15, a_6=21; a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ (2) 略

【解説】

(1) $a_2=3a_1=3$
 $a_3=\frac{3}{2}(a_1+a_2)=\frac{3}{2}(1+3)=6$
 $a_4=\frac{3}{3}(a_1+a_2+a_3)=1+3+6=10$
 $a_5=\frac{3}{4}(a_1+\dots+a_4)=\frac{3}{4}(1+3+6+10)=15$
 $a_6=\frac{3}{5}(a_1+\dots+a_5)=\frac{3}{5}(1+3+6+10+15)=21$
 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと $b_n=a_{n+1}-a_n$
 $a_1=1, a_2=3, a_3=6, a_4=10, a_5=15, a_6=21$ であるから
 $b_1=2, b_2=3, b_3=4, b_4=5, b_5=6$
 ゆえに, $b_n=n+1$ と推定される。
 $n \geq 2$ のとき $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1} (k+1)=1+\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)$
 $=\frac{n(n+1)}{2}$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって, $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ と推定される。

(2) $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ …… [A] とおく。

[1] $n=1$ のとき $a_1=1$ であるから, [A] は成り立つ。

[2] $n \leq k$ のとき, [A] が成り立つと仮定する。

このとき $a_{k+1}=\frac{3}{k}(a_1+a_2+\dots+a_k)=\frac{3}{k}\sum_{m=1}^k \frac{m(m+1)}{2}$
 $=\frac{3}{k} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} \right\} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

ゆえに, $n=k+1$ のときも [A] は成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数 n について, [A] は成り立つ。

24

【解答】 (1) $a+b=2$ (2) [略]

【解説】

(1) $a+b=p, ab=q$ とおくと, a, b は $t^2-pt+q=0$ の解である。

a, b が実数であるから $p^2-4q \geq 0$ …… ①

$a^2+b^2=16, a^3+b^3=44$ から $p^2-2q=16$ …… ②, $p^3-3pq=44$ …… ③

② から $2q=p^2-16$ …… ②'

よって, ① から $p^2-2(p^2-16) \geq 0$ ゆえに $|p| \leq 4\sqrt{2}$

②' と ③ から $2p^3-3p(p^2-16)=88$ ゆえに $p^3-48p+88=0$

よって $(p-2)(p^2+2p-44)=0$

ここで $f(p)=p^2+2p-44$ とおくと, $y=f(p)$ のグラフは軸が $p=-1$ であり,

$f(4\sqrt{2})=32+8\sqrt{2}-44=-12+8\sqrt{2}=4(2\sqrt{2}-3) < 0$ であるから,

$f(p)=0$ は $|p| \leq 4\sqrt{2}$ においては解をもたない。

一方, $p=2$ は適する。

ゆえに $a+b=2$ このとき $ab=q=-6$

(2) [1] $n=2, 3$ のとき

$a^2+b^2=16, a^3+b^3=44$ であるから, 成り立つ。

[2] $n=k, k+1$ (ただし, k は 2 以上の整数) のとき a^n+b^n が 4 の倍数であるとする。

$n=k+2$ のとき

$a^{k+2}+b^{k+2}=(a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})-ab(a^k+b^k)=2(a^{k+1}+b^{k+1})+6(a^k+b^k)$ となり, $a^{k+2}+b^{k+2}$ は 4 の倍数となる。

[1], [2] から, 2 以上のすべての整数 n について, a^n+b^n は 4 の倍数となる。

1

【解答】 $\frac{4^n-1}{2n+1}$

【解説】

$$\frac{{}^{2n}C_{2k+1}}{2k+2} = \frac{1}{2k+2} \cdot \frac{(2n)!}{(2k+1)!(2n-(2k+1))!}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2n+1)!}{(2k+2)!((2n+1)-(2k+2))!} = \frac{{}^{2n+1}C_{2k+2}}{2n+1}$$

$$\text{よって } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^{2n}C_{2k+1}}{2k+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^{2n+1}C_{2k+2}}{2n+1} = \frac{{}^{2n+1}C_2 + {}^{2n+1}C_4 + \dots + {}^{2n+1}C_{2n}}{2n+1} \dots\dots \textcircled{1}$$

ここで, 二項定理により

$$(1+1)^{2n+1} = {}^{2n+1}C_0 + {}^{2n+1}C_1 + {}^{2n+1}C_2 + \dots + {}^{2n+1}C_{2n} + {}^{2n+1}C_{2n+1}$$

$$(1-1)^{2n+1} = {}^{2n+1}C_0 - {}^{2n+1}C_1 + {}^{2n+1}C_2 - \dots + {}^{2n+1}C_{2n} - {}^{2n+1}C_{2n+1}$$

辺々加えて $2^{2n+1} = 2({}^{2n+1}C_0 + {}^{2n+1}C_2 + \dots + {}^{2n+1}C_{2n})$

よって ${}^{2n+1}C_2 + {}^{2n+1}C_4 + \dots + {}^{2n+1}C_{2n} = 4^n - 1$

これを ① に代入して $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{{}^{2n}C_{2k+1}}{2k+2} = \frac{4^n-1}{2n+1}$

2

【解答】 (1) $\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$ (2) $n, n-1, n-2, \dots, 1$

【解説】

$$(1) (x_k-k)^2 + (x_k-n+k-1)^2$$

$$= x_k^2 - 2kx_k + k^2 + x_k^2 - 2(n-k+1)x_k + (n-k+1)^2$$

$$= 2x_k^2 + k^2 - 2(n+1)x_k + (n-k+1)^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

x_1, x_2, \dots, x_n は 1, 2, ……, n を並べ替えたものであるから

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n k^2, \quad \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n k \quad \text{また} \quad \sum_{k=1}^n (n-k+1)^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

① から

$$\sum_{k=1}^n (x_k-k)^2 + \sum_{k=1}^n (x_k-n+k-1)^2$$

$$= 2\sum_{k=1}^n x_k^2 + \sum_{k=1}^n k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n (n-k+1)^2$$

$$= 4\sum_{k=1}^n k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^n k$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2(n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$$

(2) (1) の結果から $\sum_{k=1}^n (x_k-k)^2 + \sum_{k=1}^n (x_k-n+k-1)^2$ は, x_1, x_2, \dots, x_n の並べ方に

よらず一定である。また, $\sum_{k=1}^n (x_k-n+k-1)^2 \geq 0$ が成り立つ。

したがって, $\sum_{k=1}^n (x_k-k)^2$ は $\sum_{k=1}^n (x_k-n+k-1)^2 = 0$ すなわち $x_k = n-k+1$

($k=1, 2, \dots, n$) のとき最大になる。

よって, 求める並べ方は $n, n-1, n-2, \dots, 1$

3

【解答】 (1) 5050 番目 (2) n (3) $\frac{8n^2-3n+1}{6n(2n^2-1)}$

章末問題C

【解説】

並べられた玉に書かれた数字を数列と考え、次のように、第 n 群に n 個の数が含まれるように群に分ける。

$$\left| 1 \right| 1 \ 2 \left| 1 \ 2 \ 3 \right| 1 \ 2 \ 3 \ 4 \left| 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \right| 1 \ 2 \ \dots$$

(1) 初項から第 n 群の最終項までの数の総数は $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \dots \textcircled{1}$

数列に数 100 が最初に現れるのは、第 100 群の最後の項である。

①において $n=100$ とすると $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

よって、数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは 5050 番目

(2) $2n^2$ 番目の数が第 l 群にあるとすると、①より $\frac{(l-1)l}{2} < 2n^2 \leq \frac{l(l+1)}{2}$

よって $l(l-1) < 4n^2 \leq l(l+1) \dots \textcircled{2}$

$2n(2n-1) = 4n^2 - 2n < 4n^2$, $2n(2n+1) = 4n^2 + 2n > 4n^2$ であるから、②を満たす整数 l は $l=2n$

ゆえに、 $2n^2$ 番目の数は第 $2n$ 群にある。

第 $2n-1$ 群までの数の総数は $\frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} = 2n^2 - n$

$2n^2 - (2n^2 - n) = n$ であるから、 $2n^2$ 番目の数は第 $2n$ 群の n 番目である。

したがって、 $2n^2$ 番目の玉に書かれている数字は n

(3) $2n^2$ 番目の数は第 $2n$ 群の n 番目であるから、袋の中には p ($1 \leq p \leq n$) と書かれた玉が $2n-p+1$ 個、 q ($n+1 \leq q \leq 2n-1$) と書かれた玉が $2n-q$ 個含まれている。袋の中から 2 つの玉を取り出すとき、同じ数が書かれた玉を取り出すのは、 $n \geq 3$ のとき

$$\sum_{p=1}^{2n} {}_{2n-p+1}C_2 + \sum_{q=n+1}^{2n-2} {}_{2n-q}C_2 \text{ (通り)}$$

ここで $\sum_{p=1}^{2n} {}_{2n-p+1}C_2 + \sum_{q=n+1}^{2n-2} {}_{2n-q}C_2$
 $= {}_{2n}C_2 + {}_{2n-1}C_2 + \dots + {}_{n+1}C_2 + {}_{n-1}C_2 + {}_{n-2}C_2 + \dots + {}_2C_2$
 $= \sum_{i=2}^{2n} {}_iC_2 = \sum_{i=2}^{2n} \frac{i(i-1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} (i^2 - i) = \frac{1}{2} n(n-1)$
 $= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{2n(2n+1)}{2} \right\} = \frac{n(n-1)}{2}$
 $= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - n(2n+1) \right\} = \frac{n(n-1)}{2}$
 $= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(8n^2-3n+1)}{6} \dots \textcircled{3}$

$n=1$ のとき、玉は①①で、同じ数を取り出すのは ${}_2C_2=1$ (通り)

$n=2$ のとき、玉は①①②①②③①②で、同じ数を取り出すのは ${}_4C_2 + {}_3C_2 = 6+3=9$ (通り)

よって、③の式は $n=1, 2$ のときも成立する。

袋の中から 2 個の玉を取り出す取り出し方は

$${}_{2n^2}C_2 = \frac{2n^2(2n^2-1)}{2 \cdot 1} = n^2(2n^2-1) \text{ (通り)}$$

よって、求める確率は $\frac{n(8n^2-3n+1)}{6n^2(2n^2-1)} = \frac{8n^2-3n+1}{6n(2n^2-1)}$

4

【解答】 (1) $\frac{1}{(k^2-2k+2)(k^2-2k+3)}$ (2) $S_k = \frac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)}$ (3) $k=202$

【解説】

(1) 第 k 群は $(2k-1)$ 個の項を含むから、 $k \geq 2$ のとき、第 $(k-1)$ 群までの項数は

$$1+3+5+\dots+(2k-3) = \frac{1}{2}(k-1)\{1+(2k-3)\} = (k-1)^2$$

よって、第 k 群の最初の項は $(k-1)^2+1 = k^2-2k+2$ 番目の項である。これは $k=1$ のときも成り立つ。

したがって、第 k 群の最初の項は $a_{k^2-2k+2} = \frac{1}{(k^2-2k+2)(k^2-2k+3)}$

(2) 第 k 群の最後の項は k^2 番目の項である。

よって、第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k は

$$S_k = \sum_{m=k^2-2k+2}^{k^2} \frac{1}{m(m+1)} = \sum_{m=k^2-2k+2}^{k^2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{k^2-2k+2} - \frac{1}{k^2-2k+3} \right) + \left(\frac{1}{k^2-2k+3} - \frac{1}{k^2-2k+4} \right)$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+1} \right)$$

$$= \frac{1}{k^2-2k+2} - \frac{1}{k^2+1} = \frac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)}$$

(3) 与えられた不等式に (2) の結果を代入すると

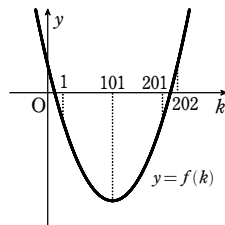
$$(k^2+1) \cdot \frac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)} \leq \frac{1}{100}$$

整理すると $k^2 - 202k + 102 \geq 0$

ここで、 $f(k) = k^2 - 202k + 102$ とすると、 $f(k) \geq 0$ を満たす最小の自然数 k を求めればよい。

$$f(0) = 102 > 0, f(1) = -99 < 0$$

また、 $f(k) = (k-101)^2 - 101^2 + 102$ より、 $y=f(k)$ のグラフの軸は $k=101$ であるから、 $y=f(k)$ のグラフの概形は右の図のようになり、



$f(201) = f(1) < 0, f(202) = f(0) > 0$ である。

よって、与えられた不等式を満たす最小の自然数 k は $k=202$

5

【解答】 (1) $a_k = 3k^2 + 3k + 1$ (2) $b_n = (n+1)^3$

【解説】

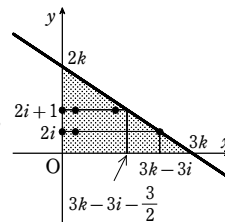
(1) $k=0$ のとき、 $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \leq 0$ を満たす 0 以上の整数 x, y の組は $(x, y) = (0, 0)$ のみで

あるから $a_0 = 1$

$k \geq 1$ のとき、 $x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} \leq k$ の表す領域 D

は、右の図のアミ点部分である。

a_k は領域 D に属する格子点 (x, y) がともに整数である点) の個数である。



[1] 直線 $y=2i$ ($i=0, 1, 2, \dots, k$) 上の格子点について、 x 座標は

$$0, 1, 2, \dots, 3k-3i$$

であり、 $(3k-3i+1)$ 個ある。

[2] 直線 $y=2i+1$ ($i=0, 1, 2, \dots, k-1$) 上の格子点について、 x 座標は

$$0, 1, 2, \dots, 3k-3i-2$$

であり、 $(3k-3i-1)$ 個ある。

[1], [2] から

$$a_k = \sum_{i=0}^k (3k-3i+1) + \sum_{i=0}^{k-1} (3k-3i-1)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)\{(3k+1)+1\} + \frac{1}{2}k\{(3k-1)+2\}$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(3k+2) + \frac{1}{2}k(3k+1) = 3k^2 + 3k + 1$$

このとき、 $k=0$ とすると $a_0 = 1$

よって、 $k=0$ のときも成り立つ。

以上から $a_k = 3k^2 + 3k + 1$

(2) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z \leq n$ を満たす整数 x, y, z の組 (x, y, z) について、 $0 \leq z \leq n$ である。

よって、 $z=j$ ($j=0, 1, 2, \dots, n$) のとき、 x, y は

$$x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{3} + \frac{y}{2} \leq n-j$$

を満たすから、組 (x, y, z) の個数は (1) より $3(n-j)^2 + 3(n-j) + 1$ したがって

$$b_n = \sum_{j=0}^n \{3(n-j)^2 + 3(n-j) + 1\}$$

$$= \sum_{i=0}^n \{3i^2 + 3i + 1\} \quad (n-j=i \text{ とおく})$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 3 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1)$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)\{n(2n+1) + 3n + 2\} = \frac{1}{2}(n+1)(2n^2 + 4n + 2) = (n+1)^3$$

6

【解答】 (1) $b_n = 2^{2n-1} + 3 \cdot 2^{3n-2}$ (2) $n = 3k - 1, 3k$ (k は自然数)、証明は略

【解説】

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \dots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = 4b_n + c_n & \dots \textcircled{2} \\ c_{n+1} = 8c_n & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

③ から $c_n = 8^{n-1}c_1 = 8^{n-1} \cdot 24 = 3 \cdot 8^n$

これと②から $b_{n+1} = 4b_n + 3 \cdot 8^n$

章末問題C

両辺を 8^{n+1} で割ると $\frac{b_{n+1}}{8^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_n}{8^n} + \frac{3}{8}$

$\frac{b_n}{8^n} = d_n$ とおくと $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{3}{8}$

変形すると $d_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}(d_n - \frac{3}{4})$

また $d_1 - \frac{3}{4} = \frac{b_1}{8} - \frac{3}{4} = \frac{8}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

よって、数列 $\{d_n - \frac{3}{4}\}$ は初項 $\frac{1}{4}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$d_n - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{2^{n+1}}$ すなわち $\frac{b_n}{8^n} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2^{n+1}}$

ゆえに $b_n = \frac{2^{3n}}{2^{n+1}} + \frac{3 \cdot 2^{3n}}{4} = 2^{2n-1} + 3 \cdot 2^{3n-2}$

(2) ①, ②, ③ の漸化式から

$$\begin{aligned} a_{n+3} - a_n &= (2a_{n+2} + b_{n+2}) - a_n \\ &= 2(2a_{n+1} + b_{n+1}) + (4b_{n+1} + c_{n+1}) - a_n \\ &= 4a_{n+1} + 6b_{n+1} + c_{n+1} - a_n \\ &= 4(2a_n + b_n) + 6(4b_n + c_n) + 8c_n - a_n \\ &= 7a_n + 28b_n + 14c_n = 7(a_n + 4b_n + 2c_n) \end{aligned}$$

①, ②, ③ と $a_1=3, b_1=8, c_1=24$ から、 a_n, b_n, c_n はすべての自然数 n に対して整数である。

よって、 $a_n + 4b_n + 2c_n$ は整数であるから、 $a_{n+3} - a_n$ は 7 で割り切れる。

一方、 $b_1=8, b_2=2^3+3 \cdot 2^4=56$ であるから

$a_1=3, a_2=2a_1+b_1=2 \cdot 3+8=14=7 \cdot 2,$

$a_3=2a_2+b_2=2 \cdot 14+56=84=7 \cdot 12$

したがって、 k を自然数とすると

$a_1, a_4, a_7, \dots, a_{3k-2}$ は 7 で割ると 3 余る。

$a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3k-1}$ は 7 で割り切れる。

$a_3, a_6, a_9, \dots, a_{3k}$ は 7 で割り切れる。

よって、 a_n が 7 で割り切れるための n の条件は $n=3k-1, 3k$ (k は自然数)

7

【解答】 (1) $n=1$ のとき $a_n = \frac{1}{\sqrt{3}}$, n が偶数のとき $a_n = \sqrt{3}$,

n が 3 以上の奇数のとき $a_n = -\sqrt{3}$

(2) $2 - \sqrt{3}$ (3) $k=4$

【解説】

(1) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ から $a_2 = \frac{2a_1}{1-a_1^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{3}$

よって $a_3 = \frac{2a_2}{1-a_2^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3}$

$a_4 = \frac{2a_3}{1-a_3^2} = \frac{2 \cdot (-\sqrt{3})}{1 - (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$

ゆえに、 a_2 以降は $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ が繰り返される。

以上より、一般項 a_n は

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} & (n=1 \text{ のとき}) \\ \sqrt{3} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ -\sqrt{3} & (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数のとき}) \end{cases}$$

(2) $\tan \frac{\pi}{12} = \tan(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$
 $= 2 - \sqrt{3}$

【別解】 $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{12}}$ であるから、 $\tan \frac{\pi}{12} = x$ とおくと $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{1-x^2}$

分母を払って整理すると $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$ よって $x = -\sqrt{3} \pm 2$

$0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ より、 $x > 0$ であるから $\tan \frac{\pi}{12} = x = 2 - \sqrt{3}$

(3) $a_n = \tan \theta_n$ とおくと $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1-a_n^2} = \frac{2 \tan \theta_n}{1 - \tan^2 \theta_n} = \tan 2\theta_n$

よって、 $a_1 = \tan \frac{\pi}{20}$ から

$a_2 = \tan(2 \cdot \frac{\pi}{20}), a_3 = \tan(2^2 \cdot \frac{\pi}{20}), \dots, a_n = \tan(2^{n-1} \cdot \frac{\pi}{20})$

ゆえに、 $a_{n+k} = a_n$ とすると $\tan(2^{n+k-1} \cdot \frac{\pi}{20}) = \tan(2^{n-1} \cdot \frac{\pi}{20})$

したがって $2^{n+k-1} \cdot \frac{\pi}{20} = 2^{n-1} \cdot \frac{\pi}{20} + l\pi$ (l は整数)

両辺に $\frac{20}{\pi}$ を掛けると $2^{n+k-1} = 2^{n-1} + 20l$

ゆえに $2^{n-1}(2^k - 1) = 20l$ すなわち $2^{n-3}(2^k - 1) = 5l$

2^{n-3} は 5 の倍数でないから、 $2^k - 1$ が 5 の倍数である。

$k=1$ のとき $2^k - 1 = 1, k=2$ のとき $2^k - 1 = 3,$

$k=3$ のとき $2^k - 1 = 7, k=4$ のとき $2^k - 1 = 15 = 5 \cdot 3$

よって、 $a_{n+k} = a_n$ を満たす最小の自然数 k は $k=4$

8

【解答】 (1) $a_3=6, b_3=6, a_4=6, b_4=18$

(2) $a_n = 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1}, b_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$

【解説】

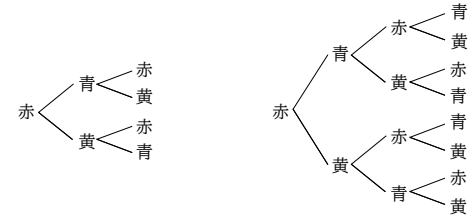
両端のマスが同じ色になる塗り方を A、両端のマスが異なる色になる塗り方を B とする。

(1) $n=3$ のとき

左端のマスで赤で塗るとき、樹形図から A の塗り方は 2 通り、B の塗り方は 2 通りある。よって $a_3 = 3 \times 2 = 6, b_3 = 3 \times 2 = 6$

$n=4$ のとき

左端のマスで赤で塗るとき、樹形図から A の塗り方は 2 通り、B の塗り方は 6 通りある。よって $a_4 = 3 \times 2 = 6, b_4 = 3 \times 6 = 18$



(2) $n+1$ 個のマスがあるとする。

A の塗り方になるには、左から n 個のマスの両端を異なる色とし、残りの 1 マスに左端と同じ色を塗ればよい。

ゆえに $a_{n+1} = b_n \dots \textcircled{1}$

B の塗り方になるのは、次の [1], [2] のいずれかである。

[1] 左から n 個のマスの両端を同じ色とし、残りの 1 マスにそれと異なる 2 色のどちらかを塗る。

[2] 左から n 個のマスの両端を異なる色とし、残りの 1 マスに両端以外の 1 色を塗る。

よって $b_{n+1} = 2a_n + b_n \dots \textcircled{2}$

①, ② から $a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1} \quad (n \geq 3)$

変形して $a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) \dots \textcircled{3}$

$a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n) \dots \textcircled{4}$

(1) から $a_4 + a_3 = 12, a_4 - 2a_3 = -6$

よって、③, ④ から $a_{n+1} + a_n = 2^{n-3}(a_4 + a_3) = 3 \cdot 2^{n-1}$

$a_{n+1} - 2a_n = (-1)^{n-3}(a_4 - 2a_3) = -6 \cdot (-1)^{n-1}$

辺々を引くと $3a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 6 \cdot (-1)^{n-1}$ ゆえに $a_n = 2^{n-1} + 2 \cdot (-1)^{n-1}$

また、① から $b_n = a_{n+1} = 2^n + 2 \cdot (-1)^n$

9

【解答】 $\frac{1}{3}\{2^{n+2} - (-1)^n\}$

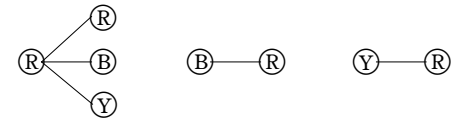
【解説】

求める塗り方の総数を a_n とする。

車両を赤色で塗ることを \textcircled{R} 、青色で塗ることを \textcircled{B} 、

黄色で塗ることを \textcircled{Y} で表す。

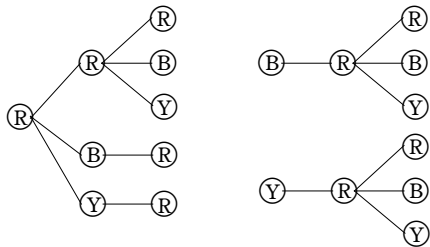
$n=2$ のとき 塗り方は次の 5 通り



よって $a_2 = 5$

章末問題C

$n=3$ のとき 塗り方は次の11通り



よって $a_3=11$

次に、 $(n+2)$ 両を塗る場合を考える。このとき、先頭車両の色の塗り方で次の [1], [2] の場合に分かれる。

[1] 先頭車両を赤色で塗る場合

残りの $(n+1)$ 両の色の塗り方は a_{n+1} 通り

[2] 先頭車両を青色または黄色で塗る場合

2両目は赤色を塗り、残りの n 両の塗り方は a_n 通りあるから、全部で $2a_n$ 通り

したがって $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$

これを变形すると $a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$$

よって $a_{n+1}+a_n=2^{n-2}(a_3+a_2)$

$$a_{n+1}-2a_n=(-1)^{n-2}(a_3-2a_2)$$

$a_2=5, a_3=11$ から $a_{n+1}+a_n=2^{n+2}, a_{n+1}-2a_n=(-1)^n$

辺々引いて $3a_n=2^{n+2}-(-1)^n$

したがって $a_n=\frac{1}{3}[2^{n+2}-(-1)^n]$

[10]

【解答】 (1) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (2) $\frac{1}{18}+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

【解説】

(1) n 回さいころを投げて、左から n 番目の文字が A となる確率を p_n とおく。

$(n+2)$ 回さいころを投げて、左から $(n+2)$ 番目の文字が A となる場合を、次の場合に分けて考える。

[1] 1回目に1, 2, 3のいずれかの目が出るとき

A A □□ …… □□ A となるから、この確率は $\frac{1}{2}p_n$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ 文字}}$

[2] 1回目に4, 5, 6のいずれかの目が出るとき

○ □□ …… □□ A となるから、この確率は $\frac{1}{2}p_{n+1}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{(n+1) \text{ 文字}}$

[1], [2] から $p_{n+2}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}p_{n+1}$

この式を变形すると

$$p_{n+2}-p_{n+1}=-\frac{1}{2}(p_{n+1}-p_n) \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}=p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n \quad \cdots \cdots \text{②}$$

また、1回さいころを投げて、左から1番目の文字がAとなるのは、1回目に1, 2, 3のいずれかの目が出るときであるから $p_1=\frac{1}{2}$

2回さいころを投げて、左から2番目の文字がAとなるのは、次の場合である。

[1] 1回目に1, 2, 3のいずれかの目が出るとき

[2] 1回目に4, 5, 6のいずれかの目が出て、

2回目に1, 2, 3のいずれかの目が出るとき

よって $p_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

ゆえに、①より、数列 $\{p_{n+1}-p_n\}$ は初項 $p_2-p_1=\frac{1}{4}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である

から $p_{n+1}-p_n=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots \cdots \text{③}$

②より、数列 $\left\{p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n\right\}$ は初項 $p_2+\frac{1}{2}p_1=1$ 、公比1の等比数列であるから

$$p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n=1\cdot 1^{n-1}=1 \quad \cdots \cdots \text{④}$$

③, ④から $\frac{3}{2}p_n=1-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ よって $p_n=\frac{2}{3}\left[1-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

すなわち $p_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

したがって、求める確率は $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(2) $n \geq 2$ のとき、 n 回さいころを投げて、左から $(n-1)$ 番目の文字がAで、かつ n 番目の文字がBとなる確率を q_n とおく。

$(n+2)$ 回さいころを投げて、左から $(n+1)$ 番目の文字がAで、かつ $(n+2)$ 番目の文字がBとなる確率を、(1)と同様に考えると $q_{n+2}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}q_{n+1}$

变形すると $q_{n+2}-q_{n+1}=-\frac{1}{2}(q_{n+1}-q_n) \quad \cdots \cdots \text{⑤}$

$$q_{n+2}+\frac{1}{2}q_{n+1}=q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n \quad \cdots \cdots \text{⑥}$$

また、文字Aが書かれるときは、必ず2文字続けて文字Aが書かれるから、2回さいころを投げて、左から1番目の文字がAとなるとき、左から2番目の文字も必ずAとなる。

よって $q_2=0$

3回さいころを投げて、左から2番目の文字がAで、かつ3番目の文字がBとなるのは、1回目に1, 2, 3のいずれかの目が出て、2回目に4の目が出るときであるから

$$q_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

ゆえに、⑤から $q_{n+1}-q_n=(q_3-q_2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \quad \cdots \cdots \text{⑦}$

⑥から $q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n=(q_3+\frac{1}{2}q_2)\cdot 1^{n-2}=\frac{1}{12} \quad \cdots \cdots \text{⑧}$

⑦, ⑧から $\frac{3}{2}q_n=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ よって $q_n=\frac{1}{18}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]$

すなわち $q_n=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって、求める確率は $\frac{1}{18}+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

[11]

【解答】 (1) 略 (2) 略 (3) 3

【解説】

(1) 与えられた漸化式から $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)^2$

よって $b_{n+1}=3b_n^2 \quad \cdots \cdots \text{①}$

また $b_1=a_2-a_1=2$

$b_1=2$, ①から $b_n \geq 0$

(2) 「 b_n の一の位の数は2である」を②とする。

[1] $n=1$ のとき

$b_1=2$ であるから、②は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、②が成り立つと仮定すると、

$$b_k=10m+2 \quad (m \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad \cdots \cdots \text{③}$$

とおける。

$n=k+1$ のときを考えると、①, ③から

$$b_{k+1}=3b_k^2=3(10m+2)^2=10(30m^2+12m+1)+2$$

$30m^2+12m+1$ は自然数であるから、 b_{k+1} の一の位の数は2となり、 $n=k+1$ のときにも②は成り立つ。

[1], [2]から、すべての自然数 n に対して②は成り立つ。

(3) (2)から $b_k=10c_k+2$ (c_k は0以上の整数)とおける。

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad a_{2017} &= a_1 + \sum_{k=1}^{2016} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{2016} (10c_k + 2) \\ &= 1 + 10 \sum_{k=1}^{2016} c_k + 4032 \\ &= 10 \left(\sum_{k=1}^{2016} c_k + 403 \right) + 3 \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{2016} c_k + 403$ は自然数であるから、 a_{2017} の一の位の数は3

【別解】 a_n の一の位の数を d_n とする。

(2), $a_1=1, a_2=3$ から $d_n: 1, 3, 5, 7, 9, 1, 3, \dots$

$2017=5\cdot 403+2$ であるから $d_{2017}=3$

よって、 a_{2017} の一の位の数は3

[12]

【解答】 略

【解説】

$$\sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \sum_{q=1}^n \frac{1}{n+q} \quad \cdots \cdots \text{①} \quad \text{と} \text{お} \text{く}.$$

[1] $n=1$ のとき

$$S(1) = \sum_{p=1}^2 \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad T(1) = \sum_{q=1}^1 \frac{1}{1+q} = \frac{1}{2}$$

よって、①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$S(k+1) = \sum_{p=1}^{2(k+1)} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = \sum_{p=1}^{2k} \frac{(-1)^{p-1}}{p} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)}$$

章末問題C

$$= \sum_{q=1}^k \frac{1}{k+q} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{k+1} + \sum_{q=2}^k \frac{1}{k+q} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)}$$

$$= \sum_{l=1}^k \frac{1}{k+1+l} + \frac{1}{2(k+1)} = \sum_{l=1}^{k+1} \frac{1}{k+1+l} = T(k+1)$$

よって、 $n=k+1$ のときも成り立つ。

[1], [2]から、すべての自然数 n について ① は成り立つ。

13

【解答】 $\cos \theta = \frac{3}{4}$

【解説】

$$a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ とおく。}$$

すべての n について、 $a_n = \cos(n-1)\theta$ が成り立つとき、 $a_3 = \cos 2\theta$ 、 $a_4 = \cos 3\theta$ となることが必要条件である。

$$\textcircled{1} \text{ で } n=1 \text{ とすると、} a_3 = \frac{3}{2}a_2 - a_1 \text{ であるから } \cos 2\theta = \frac{3}{2}\cos \theta - 1$$

$$\text{すなわち } 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{3}{2}\cos \theta - 1$$

$$\text{よって } \cos \theta (4\cos \theta - 3) = 0 \quad \text{ゆえに } \cos \theta = 0, \frac{3}{4}$$

また、①で $n=2$ とすると、 $a_4 = \frac{3}{2}a_3 - a_2$ であるから

$$\cos 3\theta = \frac{3}{2}\cos 2\theta - \cos \theta$$

$$\text{すなわち } 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta = \frac{3}{2}(2\cos^2 \theta - 1) - \cos \theta$$

$$\text{ゆえに } 8\cos^3 \theta - 6\cos^2 \theta - 4\cos \theta + 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\cos \theta = 0$ を②の左辺に代入して (左辺)=3

(右辺)=0 であるから、 $\cos \theta = 0$ のとき不適である。

$$\cos \theta = \frac{3}{4} \text{ を } \textcircled{2} \text{ の左辺に代入して (左辺)} = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} + 3 = 0$$

(右辺)=0 であるから、 $\cos \theta = \frac{3}{4}$ のとき、②は成り立つ。

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{3}{4}$$

逆に、 $\cos \theta = \frac{3}{4}$ のとき、すべての n について $a_n = \cos(n-1)\theta \cdots \cdots \textcircled{3}$ が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$\textcircled{3} \text{ で } n=1 \text{ とすると } a_1 = \cos(1-1)\theta = 1$$

$n=2$ のとき

$$\textcircled{3} \text{ で } n=2 \text{ とすると } a_2 = \cos(2-1)\theta = \cos \theta$$

$a_1=1$ 、 $a_2=\cos \theta$ であるから、 $n=1, 2$ のとき ③ は成り立つ。

[2] $n=k, k+1$ のとき成り立つと仮定すると

$$a_k = \cos(k-1)\theta \cdots \cdots \textcircled{4}, a_{k+1} = \cos k\theta \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$n=k+2$ のときを考えると、④、⑤から

$$a_{k+2} = \frac{3}{2}a_{k+1} - a_k = \frac{3}{2}\cos k\theta - \cos(k-1)\theta$$

$$= \frac{3}{2}\cos k\theta - \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{3}{4} \text{ であるから}$$

$$a_{k+2} = 2\cos \theta \cos k\theta - \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta$$

$$= \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta = \cos(k+1)\theta$$

よって、 $n=k+2$ のときにも ③ は成り立つ。

[1], [2]からすべての自然数 n について、③は成り立つ。

$$\text{以上から、求める } \cos \theta \text{ の値は } \cos \theta = \frac{3}{4}$$

14

【解答】 (1) $a_1=4, a_2=18$ (2) $a_1a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$ (3) 略 (4) 2

【解説】

$$(1) a_1 = p - \frac{1}{p} = 2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5} - \frac{2 - \sqrt{5}}{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})} = 4$$

$$a_2 = p^2 + \frac{1}{p^2} = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2 = 4^2 + 2 = 18$$

$$(2) q = -\frac{1}{p} \text{ とおくと、} pq = -1 \text{ であり、} a_n = p^n + q^n \text{ であるから}$$

$$a_1a_n = (p+q)(p^n+q^n) = p^{n+1} + q^{n+1} + pq(p^{n-1} + q^{n-1}) = a_{n+1} - a_{n-1}$$

(3) 「 a_n は自然数である」を①とする。

[1] $n=1, 2$ のとき

(1)から a_1, a_2 はともに自然数である。

よって、 $n=1, 2$ のとき ① は成り立つ。

[2] $n=k, k+1$ のとき、①が成り立つと仮定する。

$$n=k+2 \text{ のときを考えると、(2)から } a_{k+2} = a_1a_{k+1} + a_k = 4a_{k+1} + a_k$$

仮定により、 a_{k+1}, a_k は自然数であるから、 $4a_{k+1} + a_k$ は自然数である。

よって、 $n=k+2$ のときにも ① は成り立つ。

[1], [2]から、すべての自然数 n について、①は成り立つ。

(4) (2)から $a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$

$$\text{これを繰り返すと } a_n = 4a_{n-1} + a_{n-2}$$

⋮

$$a_3 = 4a_2 + a_1$$

よって、2数 A, B の最大公約数を (A, B) で表すと、(3)から、すべての自然数 n について a_n は自然数であるから

$$(a_{n+1}, a_n) = (a_n, a_{n-1}) = (a_{n-1}, a_{n-2}) = \cdots = (a_2, a_1)$$

$$a_1 = 4, a_2 = 18 \text{ であるから } (a_2, a_1) = 2$$

したがって、 a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2

15

【解答】 略

【解説】

$$(1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_n) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}}\right) \cdots \cdots \textcircled{A}$$

[1] $n=2$ のとき

(A)の両辺の差を考えると

$$(1-a_1)(1-a_2) - \left\{1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2}\right)\right\} = 1 - a_1 - a_2 + a_1a_2 - 1 + a_1 + \frac{a_2}{2}$$

$$= a_1a_2 - \frac{a_2}{2} = \left(a_1 - \frac{1}{2}\right)a_2 > 0$$

よって、(A)は成り立つ。

[2] $n=k (k \geq 2)$ のとき (A)が成り立つ、すなわち

$$(1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_k) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}}\right) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき、(A)の両辺の差を考えると

$$(1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_k)(1-a_{k+1}) - \left\{1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}} + \frac{a_{k+1}}{2^k}\right)\right\}$$

$$= (1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_k) - a_{k+1}(1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_k)$$

$$- \left\{1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\} + \frac{a_{k+1}}{2^k}$$

$$= (1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_k) - \left\{1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}$$

$$- a_{k+1}(1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_k) + \frac{a_{k+1}}{2^k}$$

$$> -a_{k+1}(1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_k) + \frac{a_{k+1}}{2^k} \quad (\textcircled{1} \text{ より})$$

$$= \left\{\frac{1}{2^k} - (1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_k)\right\} a_{k+1}$$

$$\frac{1}{2} < a_j < 1 (j=1, 2, \cdots, k+1) \text{ より}$$

$$a_{k+1} > 0 \text{ かつ } 0 < 1 - a_j < \frac{1}{2} (j=1, 2, \cdots, k)$$

であるから

$$\left\{\frac{1}{2^k} - (1-a_1)(1-a_2) \cdots (1-a_k)\right\} a_{k+1} > \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}\right) a_{k+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k}\right) a_{k+1} = 0$$

よって、 $n=k+1$ のときも (A) は成り立つ。

[1], [2]から、2以上のすべての整数 n に対して (A) は成り立つ。