1

解答　(1) $\dfrac{\pi}{3}$　(2) $\dfrac{13}{6}\pi$　(3) $-\dfrac{41}{12}\pi$　(4) $45°$　(5) $-210°$　(6) $1380°$

解説

(1) $\dfrac{\pi}{180}\times 60=\dfrac{\pi}{3}$（ラジアン）　(2) $\dfrac{\pi}{180}\times 390=\dfrac{13}{6}\pi$（ラジアン）

(3) $\dfrac{\pi}{180}\times(-615)=-\dfrac{41}{12}\pi$（ラジアン）

(4) $\dfrac{180}{\pi}\times\dfrac{\pi}{4}=45$　よって　$45°$

(5) $\dfrac{180}{\pi}\times\left(-\dfrac{7}{6}\pi\right)=-210$　よって　$-210°$

(6) $\dfrac{180}{\pi}\times\dfrac{23}{3}\pi=1380$　よって　$1380°$

2

解答　(1) $\sin\dfrac{8}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{8}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$，$\tan\dfrac{8}{3}\pi=-\sqrt{3}$

(2) $\sin\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=-1$

解説

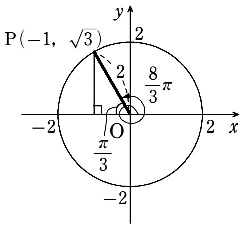
(1) 右の図で円の半径が $r=2$ のとき，

点 P の座標は　$(-1,\ \sqrt{3})$

よって　$\sin\dfrac{8}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\dfrac{8}{3}\pi=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$\tan\dfrac{8}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$



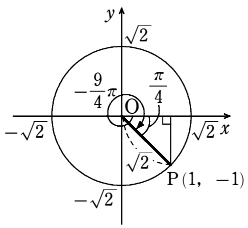
(2) 右の図で円の半径が $r=\sqrt{2}$ のとき，

点 P の座標は　$(1,\ -1)$

よって　$\sin\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=\dfrac{-1}{1}=-1$



3

解答　(1) $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(2) $\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解説

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　$\sin\theta<0$

よって　$\sin\theta=-\sqrt{\dfrac{5}{9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\div\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+(-1)^2}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ であるから　$\cos\theta>0$

よって　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

4

解答　(1) $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{13}{27}$　(2) $\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

解説

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を２乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\left(\dfrac{1}{9}-1\right)\div 2=-\dfrac{4}{9}$

また　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{4}{9}\right)\right\}=\dfrac{13}{27}$

(2) (1) から　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\left(-\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{17}{9}$　……①

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ では，$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$ であり　$\sin\theta-\cos\theta>0$

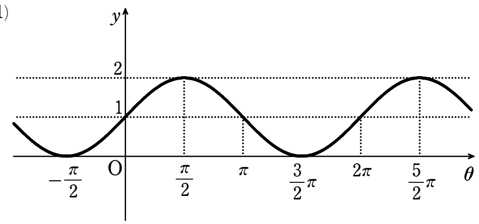
よって，① から　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

5

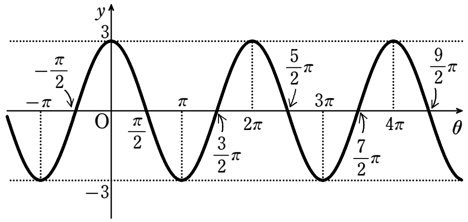
解答　(1) ［図］，周期 2π　(2) ［図］，周期 2π　(3) ［図］，周期 2π

(4) ［図］，周期 3π

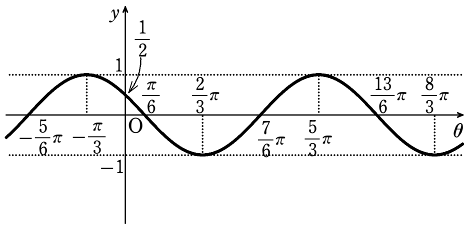
(1)



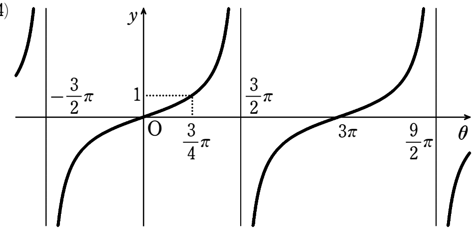
(2)



(3)

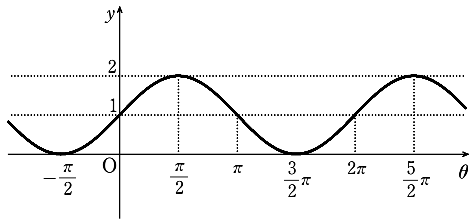


(4)

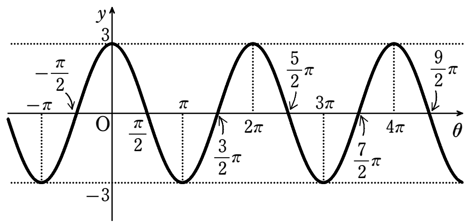


解説

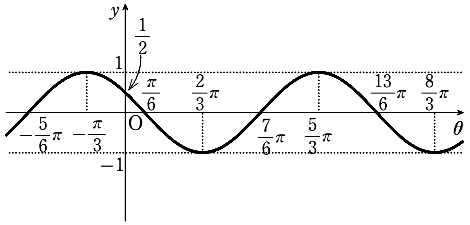
(1)　$y=\sin\theta+1$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に１だけ平行移動したもので，［図］のようになる。周期は　2π



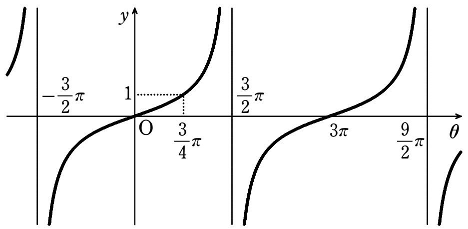
(2)　$y=3\cos\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向に３倍に拡大したもので，［図］のようになる。周期は　2π



(3)　$y=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，[図] のようになる。周期は　2π

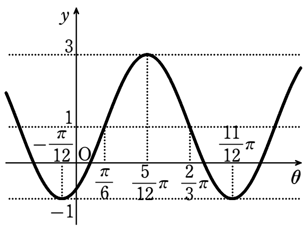


(4)　$y=\tan\frac{\theta}{3}$ のグラフは，$y=\tan\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向に 3 倍に拡大したもので，[図] のようになる。周期は　$\pi\div\frac{1}{3}=3\pi$



$\boxed{6}$

解答　[図]



解説

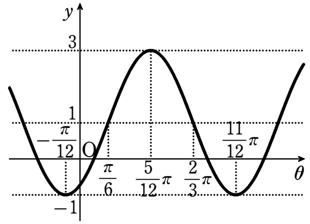
$y=2\sin 2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+1$ と変形できるから

$y=2\sin 2\theta$ （周期 π）のグラフを

　θ 軸方向に $\frac{\pi}{6}$，y 軸方向に 1

だけ平行移動する。

よって，グラフは右の図。



参考　点 $\left(\frac{\pi}{6},\ 1\right)$ を原点とみて，$y=2\sin 2\theta$ のグラフをかくとよい。

$\boxed{7}$

解答　$0\leqq\theta<2\pi$ のときの解，θ の範囲に制限がないときの解の順に示した。なお，n は整数とする。

(1)　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$；$\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ \frac{3}{4}\pi+2n\pi$

(2)　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$；$\theta=\frac{\pi}{6}+2n\pi,\ \frac{11}{6}\pi+2n\pi$

(3)　$\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$；$\theta=\frac{5}{6}\pi+n\pi$

解説

n は整数とする。

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

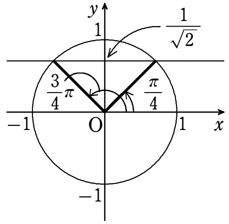
　θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi,\ \frac{3}{4}\pi+2n\pi$

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{11}{6}\pi$

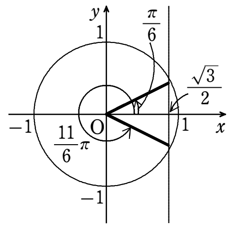
　θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\frac{\pi}{6}+2n\pi,\ \frac{11}{6}\pi+2n\pi$

参考　θ の範囲に制限がないときの解は，$\theta=\pm\frac{\pi}{6}+2n\pi$ と表すこともできる。

(1)



(2)

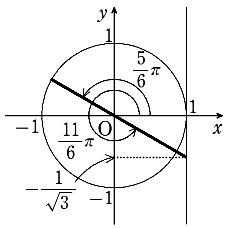


(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から

$\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

　θ の範囲に制限がないとき

$\theta=\frac{5}{6}\pi+n\pi$



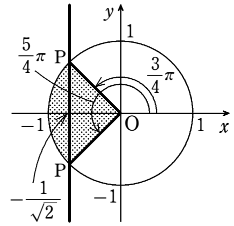
$\boxed{8}$

解答　(1)　$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$　　(2)　$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

(3)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1)　不等式を変形して　　$\cos\theta\leqq-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の

値は　　$\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$

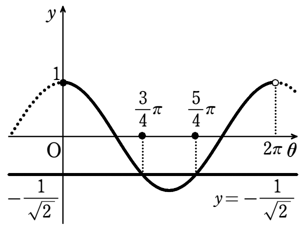
よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

ゆえに，θ の値の範囲は

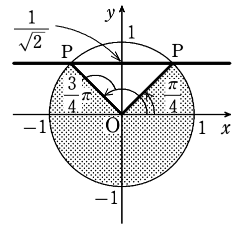
$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$

別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。

よって，右の図から　　$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$



(2)　不等式を変形して　　$\sin\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は

$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

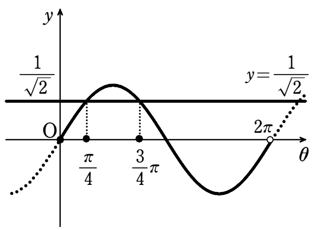
よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。

ゆえに，θ の値の範囲は

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\sin\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 上またはそれより下側にあるような θ の値の範囲である。
よって，右の図から

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$$



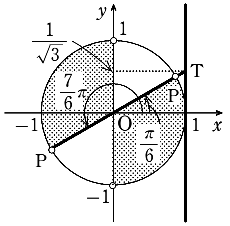
(3)　不等式を変形して　$\tan\theta<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$$

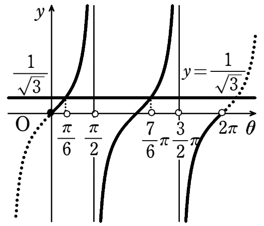
よって，角 θ の動径 OP が右の図のアミの部分にあるとき，θ は与えられた不等式を満たす。
ゆえに，θ の値の範囲は

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$$



別解　求める θ の値の範囲は，関数 $y=\tan\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ のグラフが，直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より下側にあるような θ の値の範囲である。
よって，右の図から

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$$



$\boxed{1}$

解答　(1) $\dfrac{\pi}{6}$　(2) $\dfrac{\pi}{4}$　(3) $\dfrac{\pi}{3}$　(4) $\dfrac{\pi}{2}$　(5) 270°　(6) 135°　(7) 24°　(8) 360°

解説

(1) $30\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{6}$　　(2) $45\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{4}$

(3) $60\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{3}$　　(4) $90\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{2}$

(5) $\dfrac{3}{2}\pi\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ=270^\circ$　　(6) $\dfrac{3}{4}\pi\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ=135^\circ$

(7) $\dfrac{2}{15}\pi\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ=24^\circ$　　(8) $2\pi\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ=360^\circ$

$\boxed{2}$

解答　(1) $\sin\dfrac{23}{6}\pi=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{23}{6}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\dfrac{23}{6}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\sin\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=-1$

解説

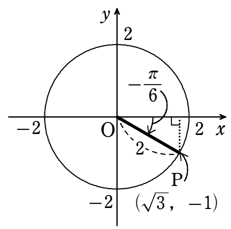
(1) $\dfrac{23}{6}\pi=-\dfrac{\pi}{6}+2\cdot2\pi$

図で，円の半径が $r=2$ のとき，点 P の座標は
$(\sqrt{3},\ -1)$

よって　$\sin\dfrac{23}{6}\pi=\dfrac{-1}{2}=-\dfrac{1}{2}$,

$\cos\dfrac{23}{6}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\dfrac{23}{6}\pi=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



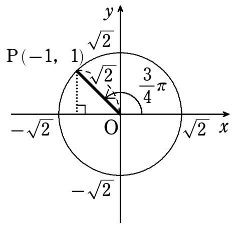
(2) $-\dfrac{5}{4}\pi=\dfrac{3}{4}\pi-2\pi$

図で，円の半径が $r=\sqrt{2}$ のとき，点 P の座標は
$(-1,\ 1)$

よって　$\sin\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\tan\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{-1}=-1$



$\boxed{3}$

解答　(1) $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$　(2) $\sin\theta=-\dfrac{4}{\sqrt{17}}$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

解説

(1) $\pi<\theta<2\pi$ であるから　$\sin\theta<0$

よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{3}{5}\div\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{3}{4}$

(2) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+4^2=17$　　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{17}$

θ の動径が第 3 象限にあるから　$\cos\theta<0$

ゆえに　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{17}}=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=4\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\dfrac{4}{\sqrt{17}}$

$\boxed{4}$

解答　順に

(1) $-\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$　(2) $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

解説

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{4}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$　ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{8}$

また　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{8}\right)\right\}=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$

(2) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

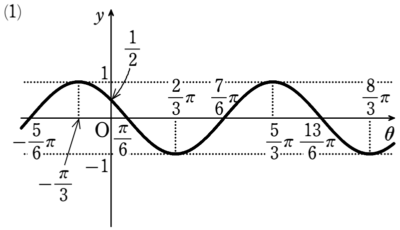
よって　$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

また　$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=(\sin\theta-\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)$
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$

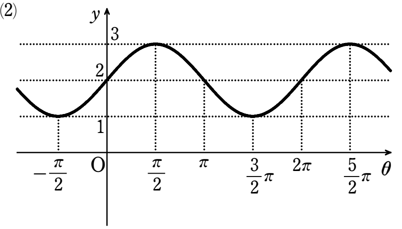
$\boxed{5}$

解答　(1) ［図］周期は 2π　(2) ［図］周期は 2π　(3) ［図］周期は π
(4) ［図］周期は π

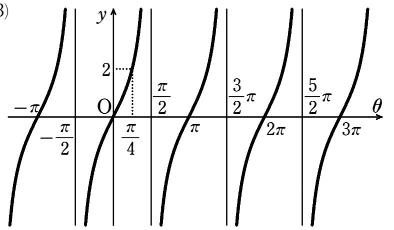
(1)



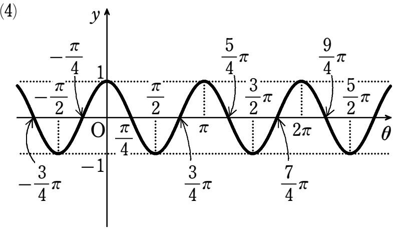
(2)



(3)

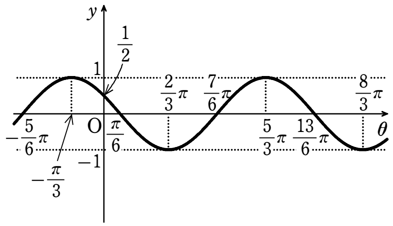


(4)

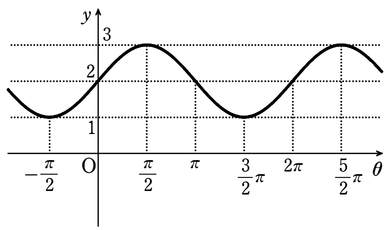


解説

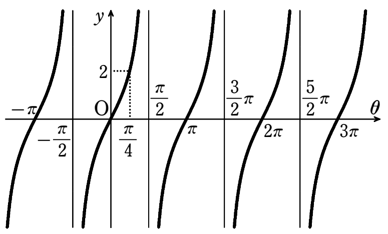
(1)　$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，グラフは右の図。
また，周期は　2π



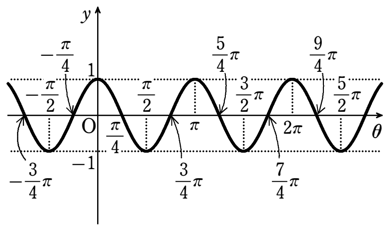
(2)　$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，グラフは右の図。
また，周期は　2π



(3)　$y=\tan\theta$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したもので，グラフは右の図。
また，周期は　π



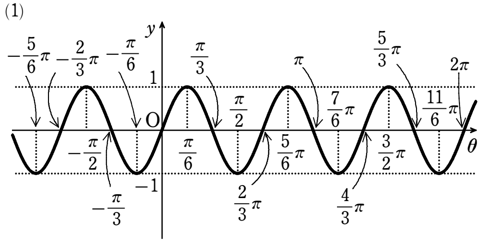
(4)　$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ 倍に縮小したもので，グラフは右の図。
また，周期は　π



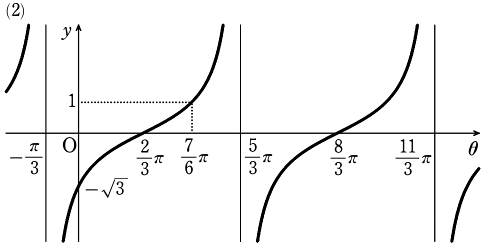
6

解答　(1)　周期 $\frac{2}{3}\pi$，[図]　(2)　周期 2π，[図]　(3)　周期 π，[図]

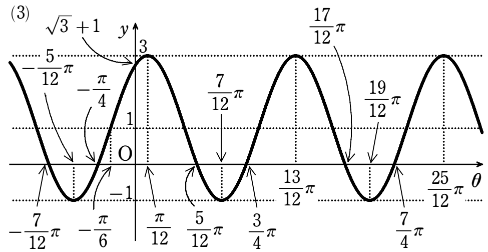
(1)



(2)



(3)



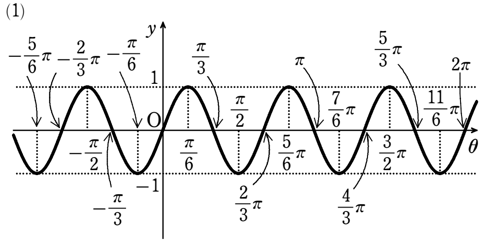
解説

(1)　$\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\cos 3\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

したがって，$y=\cos\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフは，$y=\cos 3\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。

周期は　$2\pi\div 3=\frac{2}{3}\pi$　　　グラフは[図]

(1)

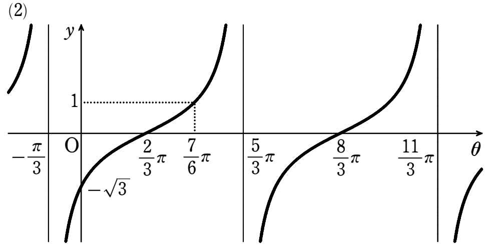


(2)　$\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)$

したがって，$y=\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\tan\frac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\frac{2}{3}\pi$ だけ平行移動したものである。

周期は　$\pi\div\frac{1}{2}=2\pi$　　　グラフは[図]

(2)

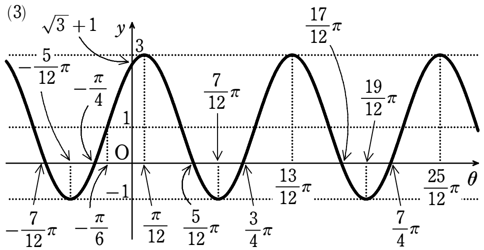


(3)　$2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+1=2\sin 2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1$

したがって，$y=2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+1$ のグラフは，$y=2\sin 2\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

周期は　$2\pi\div2=\pi$　　　グラフは[図]

(3)



$\boxed{7}$

解答　$0\leqq\theta<2\pi$ のときの解；θ の範囲に制限がないときの解　の順に示す。
なお，n は整数とする。

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$；$\theta=\dfrac{\pi}{3}+2n\pi$，$\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi$

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{7}{4}\pi$；$\theta=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi+2n\pi$　$\left(\text{または } \theta=\pm\dfrac{\pi}{4}+2n\pi\right)$

(3)　$\theta=\pi$；$\theta=(2n+1)\pi$

(4)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{7}{6}\pi$；$\theta=\dfrac{\pi}{6}+n\pi$

(5)　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$；$\theta=\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi+2n\pi$　$\left(\text{または } \theta=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi\right)$

(6)　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$；$\theta=\dfrac{3}{4}\pi+n\pi$

解説

n は整数とする。

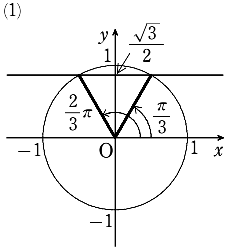
(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}+2n\pi$，$\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi$

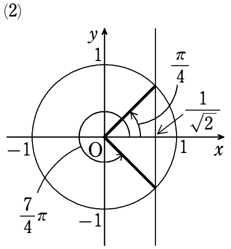
(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{7}{4}\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi+2n\pi$

(1)



(2)



参考　θ の範囲に制限がないときは $\theta=\pm\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$ と表すこともできる。

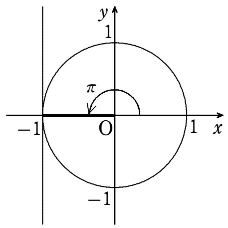
(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\pi+2n\pi$　すなわち　$\theta=(2n+1)\pi$

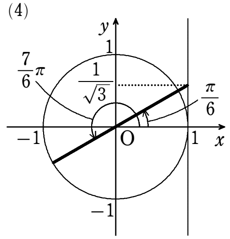
(4)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{7}{6}\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+n\pi$

(3)



(4)



(5)　$2\cos\theta+1=0$ から　　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi+2n\pi$

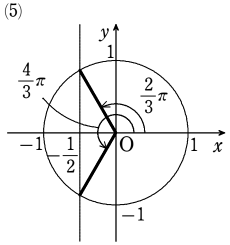
参考　θ の範囲に制限がないときは $\theta=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2n\pi$ と表すこともできる。

(6)　$\tan\theta+1=0$ から　　$\tan\theta=-1$

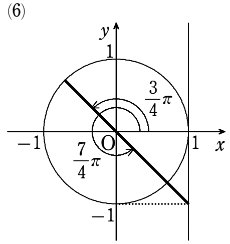
$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，図から　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

θ の範囲に制限がないとき　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi+n\pi$

(5)



(6)



$\boxed{8}$

解答　(1)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$　　(2)　$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$

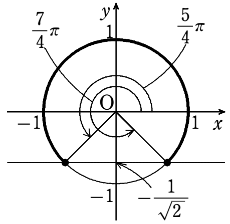
(3)　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta<\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

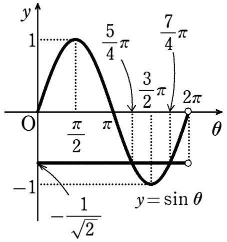
解説

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta+1\geqq0$ から　　$\sin\theta\geqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は　　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

図から，不等式の解は　　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

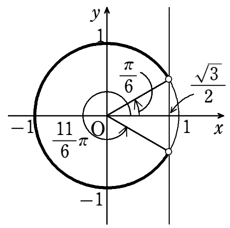


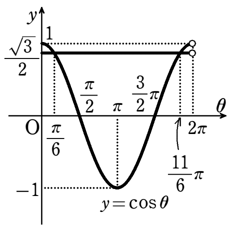


(2)　$2\cos\theta-\sqrt{3}<0$ から　　$\cos\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値は　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{11}{6}\pi$

図から，不等式の解は　　$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$

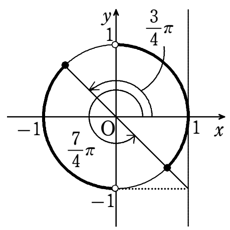


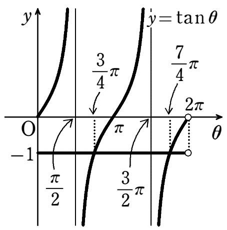


(3)　$\tan\theta+1\geqq0$ から　　$\tan\theta\geqq-1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\tan\theta=-1$ を満たす θ の値は　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

図から，不等式の解は　　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta<\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$





1

解答　(1)　$l=\frac{3}{2}\pi$，$S=\frac{9}{2}\pi$　　(2)　$l=\frac{20}{3}\pi$，$S=\frac{80}{3}\pi$

解説

(1)　$l=6\times\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$，$S=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$

別解　$S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\pi\times6=\frac{9}{2}\pi$

(2)　$l=8\times\frac{5}{6}\pi=\frac{20}{3}\pi$，$S=\frac{1}{2}\times8^2\times\frac{5}{6}\pi=\frac{80}{3}\pi$

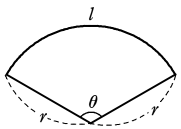
別解　$S=\frac{1}{2}\times\frac{20}{3}\pi\times8=\frac{80}{3}\pi$

2［芝浦工業大］

解答　(ア)　3　　(イ)　2　　(ウ)　9

解説

扇形の半径を r cm，中心角を θ ラジアン，面積を S cm^2，弧の長さを l cm とすると



$l=r\theta$ ……①，　$S=\frac{1}{2}rl$ ……②

扇形の周囲の長さが 12 cm であるから　　$2r+l=12$

よって　　$l=12-2r$　……③

$r>0$，$l>0$ であるから　　$0<r<6$

③ を ② に代入して　　$S=\frac{1}{2}r(12-2r)=6r-r^2=-(r-3)^2+9$

$0<r<6$ の範囲で，S は $r={}^{ア}3$ のとき最大値 ${}^{ウ}9$ (cm^2) をとる。

このとき，中心角は ①，③ から　　$\theta=\frac{l}{r}=\frac{12-2\cdot3}{3}={}^{イ}2$（ラジアン）

3

解答　(1)　0　　(2)　1

解説

(1)　$\cos\left(\theta+\frac{3}{2}\pi\right)=\cos\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right\}=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$

よって　　(与式)$=\cos\theta+(-\sin\theta)+(-\cos\theta)+\sin\theta=0$

(2)　(与式)$=(-\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)+\cos\theta\cdot\cos\theta$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

4

解答　(1)　略　　(2)　1

解説

(1)　$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{1}{\cos\theta}$

したがって　　$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}$

(2)　$\cos^2\theta+\sin\theta-\tan\theta(1-\sin\theta)\cos\theta=\cos^2\theta+\sin\theta-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1-\sin\theta)\cos\theta$

$=\cos^2\theta+\sin\theta-\sin\theta(1-\sin\theta)$

$=\cos^2\theta+\sin\theta-\sin\theta+\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

5

解答　(1)　$\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2)　$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　または

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

解説

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから　　$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$

(1)　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}$

$\sin\theta-\cos\theta>0$ であるから　　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$

よって　　$\sin\theta+\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) の結果とこの式から，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めると

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　または

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

6

解答　(ア)　3　　(イ)　$-\frac{19}{6}$

解説

解と係数の関係により

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$　……①，$\sin\theta\cos\theta=-\frac{a}{8}$　……②

① の両辺を 2 乗すると　　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

② を代入すると　　$1+2\left(-\frac{a}{8}\right)=\frac{1}{4}$

ゆえに　　$a={}^{ア}3$

よって，② から　　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

したがって　　$\frac{\sin^2\theta+1}{\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta+1}{\sin\theta}=\frac{\sin^3\theta+\sin\theta+\cos^3\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)+(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{2}\right\}\div\left(-\frac{3}{8}\right)={}^{イ}-\frac{19}{6}$

1

解答　$\sin0<\sin3<\sin1<\sin2$

解説

関数 $\sin x$ は，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で増加，$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ で減少する。

$\sin0=0$

$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{3}$　であるから　　$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin1<\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{2}<2<\frac{2}{3}\pi$ であるから　　$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin2<1$

$\frac{3}{4}\pi<3<\pi$　であるから　　$0<\sin3<\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$\sin0<\sin3<\sin1<\sin2$

2

解答　3

解説

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ の両辺を平方すると　　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

ゆえに　　$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$　　　よって　　$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$

$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2(\sin\theta\cos\theta)^2$

$=1^2-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$

$\sin^5\theta+\cos^5\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^3\theta+\cos^3\theta)-(\sin\theta\cos\theta)^2(\sin\theta+\cos\theta)$

$=1\cdot\frac{5\sqrt{2}}{8}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{19\sqrt{2}}{32}$

よって　　(与式)$=5\cdot\frac{19\sqrt{2}}{32}\div\frac{5\sqrt{2}}{8}-2\cdot\frac{7}{8}=\frac{19}{4}-\frac{7}{4}=3$

3

解答　$\frac{1}{2}$

解説

$\sin\theta+\cos\theta=u$　……①，　$\sin\theta\cos\theta=v$　……②　とおく。

① の両辺を 2 乗して　　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=u^2$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　　$1+2\sin\theta\cos\theta=u^2$

② を代入して　　$1+2v=u^2$　　　ゆえに　　$v=\frac{u^2-1}{2}$　……③

① の両辺を 3 乗して　　$\sin^3\theta+\cos^3\theta+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=u^3$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{11}{16}$ であるから　　$\frac{11}{16}+3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)=u^3$

①，② を代入して　　$\frac{11}{16}+3uv=u^3$

③ を代入して　　$\frac{11}{16}+\frac{3u(u^2-1)}{2}=u^3$　　　整理すると　　$8u^3-24u+11=0$

よって　$(2u-1)(4u^2+2u-11)=0$

ゆえに　$u=\frac{1}{2},\ \frac{-1\pm3\sqrt{5}}{4}$　……④

また，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は２次方程式 $t^2-ut+v=0$ の２つの実数解であるから，判別式を D とすると　$D=(-u)^2-4v\geqq0$

③を代入して　$u^2-2(u^2-1)\geqq0$　　よって　$u^2\leqq2$

ここで　$\left(\frac{-1\pm3\sqrt{5}}{4}\right)^2-2=\frac{14\mp6\sqrt{5}}{16}\geqq\frac{7-3\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{49}-\sqrt{45}}{8}>0$（複号同順）

したがって，④の解のうちで $u^2\leqq2$ を満たす値は　$u=\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$

4

解答　$x=\frac{5}{3}\pi,\ y=\frac{7}{6}\pi$

解説

$\begin{cases}\cos x-\sin y=1 & \cdots\cdots① \\ \cos y+\sin x=-\sqrt{3} & \cdots\cdots②\end{cases}$ とする。

①から　$\cos x=\sin y+1$　……③

②から　$\sin x=-\cos y-\sqrt{3}$　……④

これらを $\sin^2x+\cos^2x=1$ に代入すると

$(-\cos y-\sqrt{3})^2+(\sin y+1)^2=1$

よって　$\cos^2y+2\sqrt{3}\cos y+3+\sin^2y+2\sin y+1=1$

ゆえに　$\sin y=-\sqrt{3}\cos y-2$　……⑤

これを $\sin^2y+\cos^2y=1$ に代入すると

$(-\sqrt{3}\cos y-2)^2+\cos^2y=1$

$4\cos^2y+4\sqrt{3}\cos y+3=0$

よって　$(2\cos y+\sqrt{3})^2=0$

したがって　$\cos y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　……⑥

よって，④から　$\sin x=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　……⑦

⑤から　$\sin y=-\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2=-\frac{1}{2}$　……⑧

⑧を③に代入して　$\cos x=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$　……⑨

$0\leqq x<2\pi$ であるから，⑦，⑨より　$x=\frac{5}{3}\pi$

$0\leqq y<2\pi$ であるから，⑥，⑧より　$y=\frac{7}{6}\pi$

5

解答　略

解説

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

よって　$\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\sin^2\theta+\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^2-\sin\theta\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$=\sin^2\theta+\left(\frac{1}{4}\sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)-\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$=\frac{3}{4}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\frac{3}{4}$$

したがって，θ に無関係な定数である。

6

解答　(1)（ア）$\frac{2}{3}\pi$　（イ）3　(2)　12π

解説

(1)　周期は　$\frac{2\pi}{3}=$ ア $\frac{2}{3}\pi$

また，$-1\leqq\sin3\theta\leqq1$ であるから　$-1\leqq2\sin3\theta+1\leqq3$

よって，$f(\theta)$ の最大値は　イ 3

(2)　$\sin\frac{x}{2}$ の周期は　$2\times2\pi=4\pi$

$\sin\frac{x}{3}$ の周期は　$3\times2\pi=6\pi$

4 と 6 の最小公倍数は 12 であるから，求める周期は　12π

1

解答　(1)　$\theta=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$　(2)　$\theta=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　(3)　$\theta=\frac{\pi}{24},\ \frac{7}{24}\pi,\ \frac{25}{24}\pi,\ \frac{31}{24}\pi$

(4)　$\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$

解説

(1)　$\theta+\frac{\pi}{4}=t$ とおくと　$\sin t=-\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}<2\pi+\frac{\pi}{4}$　すなわち　$\frac{\pi}{4}\leqq t<\frac{9}{4}\pi$　……②

②の範囲で，①を解くと　$t=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

すなわち　$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$　よって　$\theta=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$

(2)　$\theta+\frac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$　すなわち　$\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{7}{3}\pi$　……②

②の範囲で，①を解くと　$t=\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$

すなわち　$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$　よって　$\theta=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

(3)　$2\theta+\frac{\pi}{6}=t$ とおくと　$\sin t=\frac{1}{\sqrt{2}}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\frac{\pi}{6}\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}<4\pi+\frac{\pi}{6}$　すなわち　$\frac{\pi}{6}\leqq t<\frac{25}{6}\pi$　……②

②の範囲で，①を解くと　$t=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi$

すなわち　$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi$

よって　$\theta=\frac{\pi}{24},\ \frac{7}{24}\pi,\ \frac{25}{24}\pi,\ \frac{31}{24}\pi$

(4)　$2\theta-\frac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\tan t=-\sqrt{3}$　……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\frac{\pi}{3}\leqq2\theta-\frac{\pi}{3}<4\pi-\frac{\pi}{3}$

すなわち　$-\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{11}{3}\pi$　……②

②の範囲で，①を解くと　$t=-\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi$

すなわち　$2\theta-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi$

よって　$\theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$

2

解答　(1)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{12},\ \frac{7}{12}\pi<\theta<2\pi$　(2)　$\frac{7}{12}\pi<\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{19}{12}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi$

(3)　$\frac{7}{24}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{24}\pi,\ \frac{31}{24}\pi\leqq\theta\leqq\frac{35}{24}\pi$

解説

(1)　$\theta+\dfrac{\pi}{6}=t$ とおくと　$\sin t<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}<2\pi+\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{13}{6}\pi$ ……②

②の範囲で，①を解くと　$\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi<t<\dfrac{13}{6}\pi$

すなわち　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi<\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$

よって　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{7}{12}\pi<\theta<2\pi$

(2)　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\tan t>1$ ……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}<2\pi-\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{5}{3}\pi$ ……②

②の範囲で，①を解くと　$\dfrac{\pi}{4}<t<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{4}\pi<t<\dfrac{3}{2}\pi$

すなわち　$\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{4}\pi<\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{3}{2}\pi$

よって　$\dfrac{7}{12}\pi<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{19}{12}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$

(3)　$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと　$\cos t\leqq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{4}<4\pi+\dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{4}\leqq t<\dfrac{17}{4}\pi$ ……②

②の範囲で，①を解くと　$\dfrac{5}{6}\pi\leqq t\leqq\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{17}{6}\pi\leqq t\leqq\dfrac{19}{6}\pi$

すなわち　$\dfrac{5}{6}\pi\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{17}{6}\pi\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{19}{6}\pi$

よって　$\dfrac{7}{24}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{11}{24}\pi$，$\dfrac{31}{24}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{35}{24}\pi$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$　(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$

(3)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$　(4)　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1)　方程式を変形すると　$2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta=2$

整理して　$2\cos^2\theta+\cos\theta=0$　ゆえに　$\cos\theta(2\cos\theta+1)=0$

よって　$\cos\theta=0,\ -\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\cos\theta=0$ を解くと　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解くと　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$

したがって，解は　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$

(2)　方程式を変形すると　$2(1-\sin^2\theta)-\sqrt{3}\sin\theta+1=0$

整理して　$2\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta-3=0$

ゆえに　$(\sin\theta+\sqrt{3})(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$

$\sin\theta+\sqrt{3}\neq0$ であるから　$2\sin\theta-\sqrt{3}=0$　よって　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で解くと　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$

(3)　不等式を変形すると　$5\cos\theta+2(1-\cos^2\theta)\geqq-1$

整理して　$2\cos^2\theta-5\cos\theta-3\leqq0$　ゆえに　$(\cos\theta-3)(2\cos\theta+1)\leqq0$

$\cos\theta-3<0$ であるから　$2\cos\theta+1\geqq0$　よって　$\cos\theta\geqq-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で解くと　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi\leqq\theta<2\pi$

(4)　不等式を変形すると　$\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)+\sin\theta<0$

整理して　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1<0$　ゆえに　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)<0$

よって　$-1<\sin\theta<\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で解くと　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 -1，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -3

(2)　$\theta=0$ で最大値 4，$\theta=\pi$ で最小値 -2

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 1，$\theta=\dfrac{4}{3}\pi$ で最小値 $-\sqrt{3}-1$

(4)　$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\sqrt{3}+1$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 0

解説

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-1\leqq\sin\theta\leqq1$

よって，$\sin\theta=t$ とおくと，関数は　$y=t-2$　$(-1\leqq t\leqq1)$

したがって

$t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 -1，$t=-1$ すなわち $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -3

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-1\leqq\cos\theta\leqq1$

よって，$\cos\theta=t$ とおくと，関数は　$y=3t+1$　$(-1\leqq t\leqq1)$

したがって

$t=1$ すなわち $\theta=0$ で最大値 4，$t=-1$ すなわち $\theta=\pi$ で最小値 -2

(3)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{4}{3}\pi$ から　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\theta\leqq1$

よって，$\sin\theta=t$ とおくと，関数は　$y=2t-1$　$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq1\right)$

したがって

$t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 1，

$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$ で最小値 $-\sqrt{3}-1$

(4)　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ から　$-\sqrt{3}\leqq\tan\theta\leqq1$

よって，$\tan\theta=t$ とおくと，関数は　$y=-t+1$　$(-\sqrt{3}\leqq t\leqq1)$

したがって

$t=-\sqrt{3}$ すなわち $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\sqrt{3}+1$，

$t=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 0

$\boxed{5}$

解答　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{7}{2}$；$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -1

解説

$y=2\cos^2\theta-2\sin\theta+1=2(1-\sin^2\theta)-2\sin\theta+1$

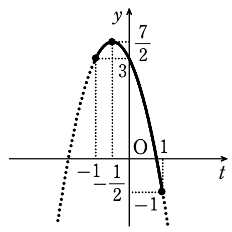
$=-2\sin^2\theta-2\sin\theta+3$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$-1\leqq t\leqq1$ ……①

y を t で表すと

$y=-2t^2-2t+3=-2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{2}$



①の範囲において y は，$t=-\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{7}{2}$，

$t=1$ で最小値 -1 をとる。

また，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$，　$t=1$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

よって　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$ で最大値 $\dfrac{7}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最小値 -1

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\theta=0,\ \dfrac{5}{3}\pi$　(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{19}{12}\pi$　(3)　$\theta=\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$　(4)　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$

(5)　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　(6)　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

解説

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$

よって，方程式 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi$

ゆえに　$\theta=0,\ \dfrac{5}{3}\pi$

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$

よって，方程式 $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から　$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi$

ゆえに　$\theta=\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{19}{12}\pi$

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$

よって，方程式 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$

ゆえに　$\theta=\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$

(4)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11}{6}\pi$

よって，方程式 $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$ から　$\theta-\dfrac{\pi}{6}=\pi$　ゆえに　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi$

(5)　$x=2\theta-\dfrac{\pi}{3}$ とおく。

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{3}<2\times2\pi-\dfrac{\pi}{3}$

すなわち　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq x<\dfrac{11}{3}\pi$　……①

① の範囲で $\tan x=\sqrt{3}$ を解くと　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{10}{3}\pi$

すなわち　$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{10}{3}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

(6)　$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=x$ とおくと　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq x<4\pi-\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi$

すなわち　$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi$

ゆえに　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{5}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$　(2)　$\dfrac{5}{12}\pi<\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi<\theta<\dfrac{5}{3}\pi$

(3)　$\dfrac{7}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$　(4)　$\dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi<\theta<\dfrac{23}{12}\pi$

(5)　$\dfrac{\pi}{12}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{12}\pi<\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{13}{12}\pi<\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi<\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

(6)　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{13}{12}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$

よって，不等式 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$

ゆえに　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{5}{12}\pi\leqq\theta<2\pi$

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{11}{6}\pi$

よって，不等式 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)>1$ から　$\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi<\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{3}{2}\pi$

ゆえに　$\dfrac{5}{12}\pi<\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi<\theta<\dfrac{5}{3}\pi$

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$

よって，不等式 $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から　$\dfrac{5}{6}\pi<\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{6}\pi$

ゆえに　$\dfrac{7}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$

(4)　$x=2\theta+\dfrac{\pi}{3}$ とおく。

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{3}\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{3}<2\times2\pi+\dfrac{\pi}{3}$

すなわち　$\dfrac{\pi}{3}\leqq x<\dfrac{13}{3}\pi$　……①

① の範囲で $\cos x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと　$\dfrac{11}{6}\pi<x<\dfrac{13}{6}\pi,\ \dfrac{23}{6}\pi<x<\dfrac{25}{6}\pi$

すなわち　$\dfrac{11}{6}\pi<2\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{13}{6}\pi,\ \dfrac{23}{6}\pi<2\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{25}{6}\pi$

よって　$\dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi<\theta<\dfrac{23}{12}\pi$

(5)　$x=2\theta-\dfrac{2}{3}\pi$ とおく。

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\dfrac{2}{3}\pi\leqq2\theta-\dfrac{2}{3}\pi<2\times2\pi-\dfrac{2}{3}\pi$

すなわち　$-\dfrac{2}{3}\pi\leqq x<\dfrac{10}{3}\pi$　……①

① の範囲で $\tan x\leqq-\sqrt{3}$ を解くと

$-\dfrac{\pi}{2}<x\leqq-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}<x\leqq\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi<x\leqq\dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi<x\leqq\dfrac{8}{3}\pi$

すなわち　$-\dfrac{\pi}{2}<2\theta-\dfrac{2}{3}\pi\leqq-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}<2\theta-\dfrac{2}{3}\pi\leqq\dfrac{2}{3}\pi,$

$\dfrac{3}{2}\pi<2\theta-\dfrac{2}{3}\pi\leqq\dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi<2\theta-\dfrac{2}{3}\pi\leqq\dfrac{8}{3}\pi$

よって　$\dfrac{\pi}{12}<\theta\leqq\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{12}\pi<\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{13}{12}\pi<\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi<\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

(6)　$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=x$ とおくと　$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x<4\pi+\dfrac{\pi}{6}$

よって　$\cos x>\dfrac{1}{2}$ から　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi<x<\dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{11}{3}\pi<x<\dfrac{25}{6}\pi$

ゆえに　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{13}{12}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$　(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$

(3)　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi,\ \pi\leqq\theta<2\pi$　(4)　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

解説

(1)　方程式から　$(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$

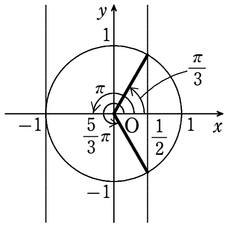
よって　$\cos\theta=-1,\ \dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，

$\cos\theta=-1$ より　$\theta=\pi$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

したがって，解は　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$



(2)　方程式から　$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta-3=0$

整理して　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$

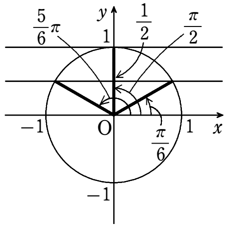
ゆえに　$(\sin\theta-1)(2\sin\theta-1)=0$

よって　$\sin\theta=1,\ \dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\sin\theta=1$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

したがって，解は　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$



(3)　不等式から　$2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\leqq0$

整理して　$2\sin^2\theta-\sin\theta\geqq0$

よって　$\sin\theta(2\sin\theta-1)\geqq0$

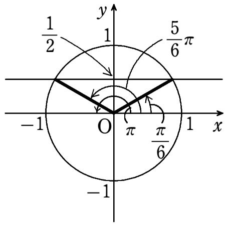
ゆえに　$\sin\theta\leqq0,\ \dfrac{1}{2}\leqq\sin\theta$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，

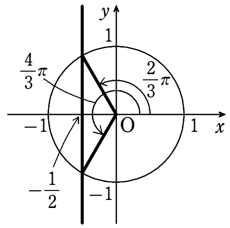
$\sin\theta\leqq0$ より　$\theta=0,\ \pi\leqq\theta<2\pi$

$\sin\theta\geqq\dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

したがって，解は　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi,\ \pi\leqq\theta<2\pi$



(4)　方程式から　$2\sin\theta\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-3$



ゆえに　$2\sin^2\theta=-3\cos\theta$　かつ　$\cos\theta\neq0$

よって　$2(1-\cos^2\theta)=-3\cos\theta$

整理して　$2\cos^2\theta-3\cos\theta-2=0$

ゆえに　$(\cos\theta-2)(2\cos\theta+1)=0$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから，常に $\cos\theta-2<0$ である。

よって　$2\cos\theta+1=0$　すなわち　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 -2，$\theta=\pi$ のとき最小値 -5

(2)　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき最大値 1，$\theta=0$ のとき最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$

(4)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\sqrt{3}$，$\theta=0$ のとき最小値 $-\sqrt{3}$

解説

(1)　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ から　$-1\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

よって，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 -2

$\cos\theta=-1$ のとき最小値 -5　をとる。

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\cos\theta=-1$ のとき　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ から　$\theta=\pi$

ゆえに　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 -2，$\theta=\pi$ のとき最小値 -5

(2)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\pi$

よって，$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ は

$\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき最大値 1

$\theta-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\theta=0$ のとき最小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　をとる。

(3)　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$\dfrac{\pi}{6}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{2}{3}\pi$

よって，$y=\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ は

$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{1}{2}$　をとる。

(4)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ より　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{\pi}{3}$

よって，$y=\tan\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ は

$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\sqrt{3}$

$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$\theta=0$ のとき最小値 $-\sqrt{3}$　をとる。

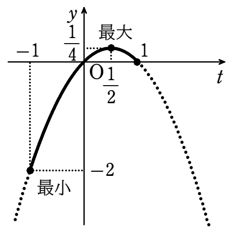
$\boxed{5}$

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}$；$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2

解説

$y=\cos^2\theta+\sin\theta-1=(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-1$

$=-\sin^2\theta+\sin\theta$



$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$-1\leqq t\leqq1$　……①

y を t の式で表すと　$y=-t^2+t=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

① の範囲において，y は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}$，

$t=-1$ のとき最小値 -2 をとる。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$t=\dfrac{1}{2}$ となるのは，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$t=-1$ となるのは，$\sin\theta=-1$ から　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}$；$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$　　(2)　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$

解説

(1)　$\cos\theta=0$ は与式を満たさないから　$\cos\theta\neq0$

与式の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると　$1+\sqrt{3}\tan\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

よって　$1+\sqrt{3}\tan\theta=1+\tan^2\theta$

ゆえに　$\tan^2\theta-\sqrt{3}\tan\theta=0$

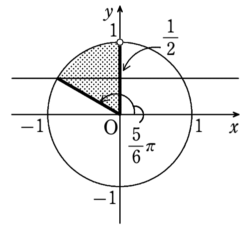
変形して　$\tan\theta(\tan\theta-\sqrt{3})=0$

これを解いて　$\tan\theta=0,\ \sqrt{3}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

(2)　$2\cos\theta-3\tan\theta>0$ から　$2\cos\theta-\dfrac{3\sin\theta}{\cos\theta}>0$　……①

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$\cos\theta<0$



① の両辺に $\cos\theta$ (<0) を掛けて

$2\cos^2\theta-3\sin\theta<0$

よって　$2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta<0$

ゆえに　$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$

すなわち　$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)>0$

$\sin\theta+2>0$ であるから　$\sin\theta>\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$　であるから　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$

$\boxed{2}$

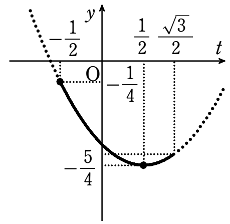
解答　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ で最大値 $-\dfrac{1}{4}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$

解説

$y=-\sin^2\theta-\cos\theta=-(1-\cos^2\theta)-\cos\theta$

$=\cos^2\theta-\cos\theta-1$

$\cos\theta=t$ とおくと，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ であるから



$-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　……①

y を t で表すと

$y=t^2-t-1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

① の範囲において，y は $t=-\dfrac{1}{2}$ で最大値 $-\dfrac{1}{4}$，

$t=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$ をとる。

また，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ であるから

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$，　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ で最大値 $-\dfrac{1}{4}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$

$\boxed{3}$

解答　$a>-\frac{1}{2}$ のとき $2a+2$，$a\leqq-\frac{1}{2}$ のとき 1

解説

$y=2a\cos\theta+2-\sin^2\theta=2a\cos\theta+2-(1-\cos^2\theta)=\cos^2\theta+2a\cos\theta+1$

$\cos\theta=x$ とおくと　　$y=x^2+2ax+1$

$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから　　$0\leqq x\leqq1$ ……①

$f(x)=x^2+2ax+1$ とすると　　$f(x)=(x+a)^2+1-a^2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-a$

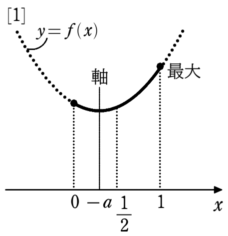
また，区間①の中央の値は $\frac{1}{2}$，$f(0)=1$，$f(1)=2a+2$

[1]　$-a<\frac{1}{2}$　すなわち　$a>-\frac{1}{2}$ のとき

　最大値は　$f(1)=2a+2$

[2]　$-a=\frac{1}{2}$　すなわち　$a=-\frac{1}{2}$ のとき

　最大値は　$f(0)=f(1)=1$

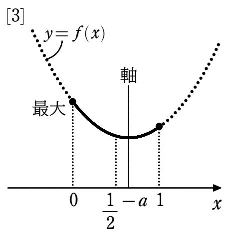


[3]　$-a>\frac{1}{2}$　すなわち　$a<-\frac{1}{2}$ のとき

　最大値は　$f(0)=1$

よって　　$a>-\frac{1}{2}$ のとき $2a+2$，

　　　　$a\leqq-\frac{1}{2}$ のとき 1



$\boxed{1}$

解答　$a<-2$ のとき 0 個，$a=-2$ のとき 1 個，$-2<a<0$ のとき 2 個，

$a=0$ のとき 3 個，$0<a<\frac{9}{8}$ のとき 4 個，$a=\frac{9}{8}$ のとき 2 個，

$\frac{9}{8}<a$ のとき 0 個

解説

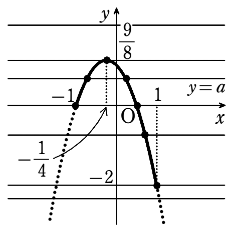
$\sin\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$-1\leqq x\leqq1$

方程式は　　$2(1-x^2)-x-a-1=0$

ゆえに　　$-2x^2-x+1=a$

$f(x)=-2x^2-x+1$ とすると　　$f(x)=-2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

$y=f(x)$ $(-1\leqq x\leqq1)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べると



$a<-2$，$\frac{9}{8}<a$ のとき　　0 個

$a=\frac{9}{8}$，$-2<a<0$ のとき

　$-1<x<1$ の範囲に 1 個

$0<a<\frac{9}{8}$ のとき

　$-1<x<1$ の範囲に 2 個

$a=0$ のとき

　$-1<x<1$ の範囲に 1 個と，$x=-1$ のときの 1 個

$a=-2$ のとき　　$x=1$ のときの 1 個

$\sin\theta=x$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の解の個数は

　$x=\pm1$ のとき 1 個，　$-1<x<1$ のとき　2 個

したがって，求める解の個数は

　$a<-2$ のとき 0 個，$a=-2$ のとき 1 個，

　$-2<a<0$ のとき 2 個，$a=0$ のとき 3 個，

　$0<a<\frac{9}{8}$ のとき 4 個，$a=\frac{9}{8}$ のとき 2 個，

　$\frac{9}{8}<a$ のとき 0 個。

$\boxed{2}$

解答　$k\leqq-5$，$-1+\sqrt{7}\leqq k$

解説

$\sin\theta=x$ とおくと，$-1\leqq x\leqq1$ であり，方程式は

　$2(1-x^2)+2kx+k-5=0$　すなわち　$2x^2-2kx-k+3=0$

この左辺を $f(x)$ とすると，求める条件は，方程式 $f(x)=0$ が $-1\leqq x\leqq1$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつことである。

これは，放物線 $y=f(x)$ と x 軸の共有点について，次の [1] または [2] または [3] が成り立つことと同じである。

[1]　放物線 $y=f(x)$ が $-1<x<1$ の範囲で，x 軸と異なる 2 点で交わる，または接する。

　このための条件は　　$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(-k+3)=k^2+2k-6\geqq0$

$k^2+2k-6=0$ の解は　　$k=-1\pm\sqrt{7}$

よって，$k^2+2k-6\geqq0$ の解は　　$k\leqq-1-\sqrt{7}$，$-1+\sqrt{7}\leqq k$ ……①

軸 $x=\frac{k}{2}$ について　　$-1<\frac{k}{2}<1$

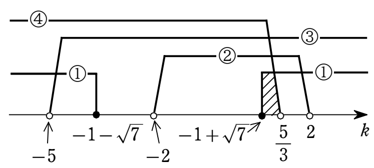
すなわち　　$-2<k<2$ ……②

$f(-1)=k+5>0$ から

　　$k>-5$　……③

$f(1)=-3k+5>0$ から

　　$k<\frac{5}{3}$　……④



①～④の共通範囲を求めて　　$-1+\sqrt{7}\leqq k<\frac{5}{3}$

[2]　放物線 $y=f(x)$ が $-1<x<1$ の範囲で，x 軸とただ 1 点で交わり，他の 1 点は $x<-1$，$1<x$ の範囲にある。

このための条件は　　$f(-1)f(1)<0$

したがって　　$(k+5)(-3k+5)<0$

ゆえに　　$(k+5)(3k-5)>0$　　よって　　$k<-5$，$\frac{5}{3}<k$

[3]　放物線 $y=f(x)$ が x 軸と $x=-1$ または $x=1$ で交わる。

$f(-1)=0$ または $f(1)=0$ から　　$k=-5$ または $k=\frac{5}{3}$

求める k の値の範囲は，[1]，[2]，[3] を合わせて

　　$k\leqq-5$，$-1+\sqrt{7}\leqq k$

$\boxed{3}$

解答　$-4\leqq k\leqq\frac{1}{2}$

解説

不等式から　　$2(1-\cos^2\theta)+4k\cos\theta+3k-4\leqq0$

整理すると　　$2\cos^2\theta-4k\cos\theta-3k+2\geqq0$ ……①

ここで，$\cos\theta=x$ とおくと　　$-1\leqq x\leqq1$ ……②

①を x の式で表すと　　$2x^2-4kx-3k+2\geqq0$

$f(x)=2x^2-4kx-3k+2$ とする。

不等式①が常に成り立つための条件は，②の範囲における $f(x)$ の最小値が 0 以上となることである。

$f(x)=2(x-k)^2-2k^2-3k+2$ であるから，最小値を m とすると

$k\leqq-1$ のとき　　$m=f(-1)=k+4\geqq0$

よって　　$-4\leqq k\leqq-1$ ……③

$-1<k<1$ のとき　　$m=f(k)=-2k^2-3k+2\geqq0$

これを解いて　　$-2\leqq k\leqq\frac{1}{2}$

　　$-1<k<1$ であるから　　$-1<k\leqq\frac{1}{2}$ ……④

$k\geqq1$ のとき　　$m=f(1)=4-7k\geqq0$

これと $k\geqq1$ を満たす k は存在しない。

求める k の値の範囲は，③，④を合わせて　　$-4\leqq k\leqq\frac{1}{2}$

1

解答　(1)　$\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　(2)　$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$　　(3)　$\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

解説

(1)　$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2)　$\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\dfrac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}$$

別解　$\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\div\left(1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$

(3)　$\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

別解　$\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2

解答　(1)　$\sin(\alpha-\beta)=-\dfrac{2+2\sqrt{42}}{15}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$

(2)　$\tan(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{3}$，$\tan(\alpha-\beta)=-3$

解説

(1)　α は鋭角であるから　$\cos\alpha>0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

β は鈍角であるから　$\sin\beta>0$

よって　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

したがって　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=-\frac{2+2\sqrt{42}}{15}$$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=-\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$$

(2)　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{1+(-2)}{1-1\cdot(-2)}=-\dfrac{1}{3}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{1-(-2)}{1+1\cdot(-2)}=-3$

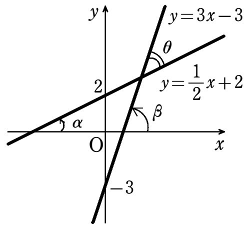
3

解答　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

解説

$x-2y+4=0$ から　　$y=\dfrac{1}{2}x+2$

$3x-y-3=0$ から　　$y=3x-3$



右の図のように，2直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，$\theta=\beta-\alpha$ である。

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=3$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

4

解答　$\sin 2\alpha=\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$，$\cos 2\alpha=\dfrac{23}{25}$，$\tan 2\alpha=\dfrac{4\sqrt{6}}{23}$

解説

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{23}{25}$$

$\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

ゆえに　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\left(-\dfrac{1}{5}\right)\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\right)=\dfrac{4\sqrt{6}}{25}$

また　$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{4\sqrt{6}}{25}\div\dfrac{23}{25}=\dfrac{4\sqrt{6}}{23}$

参考　2倍角の公式を用いて，$\tan 2\alpha$ を求めてもよいが，上の解答と比べると計算が少し複雑になる。

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\left(-\frac{1}{5}\right)\div\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)=\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

よって　$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}}{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2}=\dfrac{24}{23\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{23}$

5

解答　(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$　　(2)　$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

解説

(1)　方程式から　　$2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$

ゆえに　　$\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$

よって　　$\cos\theta=0$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\cos\theta=0$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

以上から，解は　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$

(2)　不等式から　　$2\cos^2\theta-1-3\cos\theta+2\geqq 0$

整理すると　　$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1\geqq 0$

ゆえに　　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)\geqq 0$

$0\leqq\theta<2\pi$ では，$\cos\theta-1\leqq 0$ であるから　　$\cos\theta-1=0$，$2\cos\theta-1\leqq 0$

よって　　$\cos\theta=1$，$\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

したがって，解は　$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

6

解答　順に　$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，2

解説

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{4}{5}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{1}{5}$$

$0<\alpha<\pi$ から　　$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$

よって，$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0$ であるから　　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

また　　$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=2$

1

解答 (1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $2+\sqrt{3}$ (3) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

解説

(1) $\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\sin 45^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

別解 $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\div\left(1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$

(3) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

別解 $\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2

解答 順に

(1) $\dfrac{2(1-\sqrt{42})}{15}$, $-\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$ (2) $\dfrac{63}{65}$, $-\dfrac{16}{65}$ (3) $-\dfrac{1}{3}$, 3

解説

(1) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\beta>0$

よって　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

ゆえに

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{2(1-\sqrt{42})}{15}$$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=-\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{21}}{15}$$

(2) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\sin\alpha>0$

よって　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\beta>0$

よって　$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$

ゆえに

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{5}{13}=\frac{63}{65}$$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=-\frac{16}{65}$$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-2+1}{1-(-2)\cdot 1}=-\dfrac{1}{3}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-2-1}{1+(-2)\cdot 1}=3$

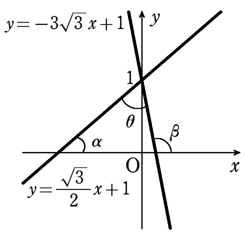
3

解答 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

解説

2直線の方程式を変形すると

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+1,\quad y=-3\sqrt{3}x+1$$



図のように，2直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める鋭角 θ は

$$\theta=\beta-\alpha$$

$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\beta=-3\sqrt{3}$ で，

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$$=\left(-3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\div\left\{1+(-3\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\sqrt{3}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

別解 2直線は垂直でないから　$\tan\theta=\left|\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-(-3\sqrt{3})}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-3\sqrt{3})}\right|=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{7}{2}=\sqrt{3}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

4

解答 順に

(1) $\dfrac{7}{9}$, $-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$, $-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$ (2) $\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$, $3\sqrt{7}$

解説

(1) $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{7}{9}$

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるから　$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

また　$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$

(2) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2-1=\dfrac{1}{8}$

$\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　$\sin\alpha<0$

よって　$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

ゆえに　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

また　$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=3\sqrt{7}$

5

解答 (1) $x=0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$ (2) $x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

(3) $0\leqq x<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi$ (4) $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

解説

(1) $\sin 2x=\sqrt{2}\sin x$ から　$2\sin x\cos x=\sqrt{2}\sin x$

よって　$\sin x(2\cos x-\sqrt{2})=0$

ゆえに　$\sin x=0$ または $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\sin x=0$ より　$x=0,\ \pi$

$\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi$

したがって，解は　$x=0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

(2) $\cos 2x=3\cos x-2$ から　$2\cos^2 x-1=3\cos x-2$

よって　$2\cos^2 x-3\cos x+1=0$　ゆえに　$(\cos x-1)(2\cos x-1)=0$

したがって　$\cos x=1,\ \dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\cos x=1$ より　$x=0$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ より　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

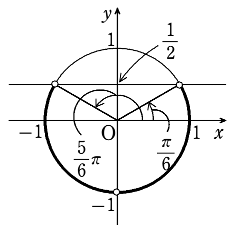
よって，解は　$x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

(3) $\cos 2x>\sin x$ から　$1-2\sin^2 x>\sin x$

よって　$2\sin^2 x+\sin x-1<0$

ゆえに　$(\sin x+1)(2\sin x-1)<0$

したがって　$-1<\sin x<\dfrac{1}{2}$



$0\leqq x<2\pi$ であるから，解は

$$0\leqq x<\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<x<2\pi$$

(4) $\sin 2x>\cos x$ から　$2\sin x\cos x>\cos x$

よって　$\cos x(2\sin x-1)>0$

ゆえに　$(\cos x>0$ かつ $2\sin x-1>0)$　または　$(\cos x<0$ かつ $2\sin x-1<0)$

すなわち　$\left(\cos x>0 \text{ かつ } \sin x>\dfrac{1}{2}\right)$ ……①

または　$\left(\cos x<0 \text{ かつ } \sin x<\dfrac{1}{2}\right)$ ……②

$0\leqq x<2\pi$ であるから，① より　$\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi\right)$ かつ $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，② より　$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi$ かつ $\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<x<2\pi\right)$

よって　$\dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

ゆえに，解は　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\sin 2\alpha=\dfrac{120}{169},\ \cos 2\alpha=-\dfrac{119}{169},\ \tan 2\alpha=-\dfrac{120}{119},$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{13}},\ \cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{13}},\ \tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{3}$

(2)　$\cos\theta=\dfrac{3}{5},\ \tan\theta=\dfrac{4}{3},\ \tan 2\theta=-\dfrac{24}{7}$

解説

(1)　$0<\alpha<\pi$ であるから　$\sin\alpha>0$

ゆえに　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$

よって　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{5}{13}=\dfrac{120}{169}$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\left(\dfrac{5}{13}\right)^2-1=-\dfrac{119}{169}$

$\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{120}{169}\div\left(-\dfrac{119}{169}\right)=-\dfrac{120}{119}$

また，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0,\ \cos\dfrac{\alpha}{2}>0$

よって　$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{13}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{18}{13}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\div\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{2}{3}$

(2)　$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$ から　$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{4}$

また，$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ から　$\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

分母を払って　$1+\cos\theta=4(1-\cos\theta)$

これを解いて　$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

次に　$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\cdot\dfrac{4}{3}}{1-\dfrac{16}{9}}=\dfrac{24}{9-16}=-\dfrac{24}{7}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　(第１辺)$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta)$

$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1$

(第２辺)$=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\beta)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1$

(第３辺)$=\cos^2\beta-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1$

よって　(第１辺)＝(第２辺)＝(第３辺)

(2)　(左辺)$=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=$(右辺)

$\boxed{2}$

解答　$\dfrac{5}{4}\pi$

解説

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2+5}{1-2\cdot 5}=-\dfrac{7}{9}$

$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\dfrac{-\dfrac{7}{9}+8}{1-\left(-\dfrac{7}{9}\right)\cdot 8}=1$

ここで，$\sqrt{3}<2<5<8$ であるから　$\tan\dfrac{\pi}{3}<\tan\alpha<\tan\beta<\tan\gamma$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は鋭角であるから　$\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\beta<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$

よって　$\pi<\alpha+\beta+\gamma<\dfrac{3}{2}\pi$

ゆえに，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$ から　$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$

$\boxed{3}$

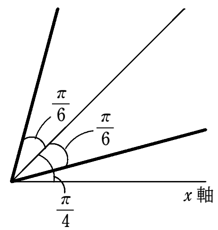
解答　$y=(2+\sqrt{3})x-2-\sqrt{3},\ y=(2-\sqrt{3})x-2+\sqrt{3}$

解説

直線 $y=x-1$ の傾きは１であるから，この直線と x 軸の正の向きとのなす角は　$\dfrac{\pi}{4}$

よって，求める直線の傾きは

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)$　または　$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)$



これを計算すると

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\dfrac{\pi}{6}}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$$

したがって，求める直線の方程式は

$$y=(2+\sqrt{3})(x-1),\quad y=(2-\sqrt{3})(x-1)$$

すなわち　$y=(2+\sqrt{3})x-2-\sqrt{3}$，$y=(2-\sqrt{3})x-2+\sqrt{3}$

$\boxed{4}$

解答　$x=\frac{\pi}{2}$ で最大値 3，$x=-\frac{\pi}{6}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

解説

$y=2\sin x-(1-2\sin^2 x)=2\sin^2 x+2\sin x-1$

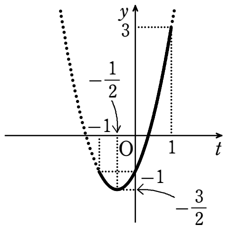
$\sin x=t$ とおくと，$-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ から　$-1\leqq t\leqq 1$

また　$y=2t^2+2t-1=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$

よって

$t=1$ で最大値 3，$t=-\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

をとる。



$-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから

$t=1$ のとき $x=\frac{\pi}{2}$，$t=-\frac{1}{2}$ のとき $x=-\frac{\pi}{6}$

したがって

$x=\frac{\pi}{2}$ で最大値 3，$x=-\frac{\pi}{6}$ で最小値 $-\frac{3}{2}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

解説

(1)　$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$
$$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha$$
$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$

$$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha$$
$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$
$$=-3\cos\alpha+4\cos^3\alpha$$

(2)　$\theta=36^\circ$ のとき　$5\theta=180^\circ$

よって　$\sin 2\theta=\sin(5\theta-3\theta)=\sin(180^\circ-3\theta)=\sin 3\theta$

(3)　(2) から，$\theta=36^\circ$ のとき　$2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$\sin\theta=\sin 36^\circ\fallingdotseq 0$ であるから，両辺を $\sin\theta$ で割って

$$2\cos\theta=3-4\sin^2\theta$$
$$2\cos\theta=3-4(1-\cos^2\theta)$$
$$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$$

よって　$\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\cos\theta=\cos 36^\circ>0$ であるから

$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$　すなわち　$\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\boxed{6}$

解答　略

解説

$\tan B\tan C=1$ から　$\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\frac{\sin C}{\cos C}=1$

両辺に $\cos B\cos C$ を掛けて　$\sin B\sin C=\cos B\cos C$

よって　$\cos B\cos C-\sin B\sin C=0$　ゆえに　$\cos(B+C)=0$

$0<B+C<\pi$ であるから　$B+C=\frac{\pi}{2}$

よって　$A=\pi-(B+C)=\frac{\pi}{2}$

したがって，△ABC は ∠A が直角である直角三角形である。

$\boxed{1}$

解答　$\sin 2x+\cos 2x=\frac{7}{5}$，$\sin 2x=\frac{3}{5}$，$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{82}{9}$

解説

$\sin 4x=\frac{24}{25}$ から　$2\sin 2x\cos 2x=\frac{24}{25}$

ゆえに　$\sin 2x\cos 2x=\frac{12}{25}$

このとき　$(\sin 2x+\cos 2x)^2=1+2\sin 2x\cos 2x=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$

$0<2x<\frac{\pi}{4}$ であるから　$\sin 2x+\cos 2x>0$

よって　$\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{\frac{49}{25}}=\frac{7}{5}$

したがって，$\sin 2x$，$\cos 2x$ は 2 次方程式 $t^2-\frac{7}{5}t+\frac{12}{25}=0$ すなわち $25t^2-35t+12=0$ の 2 つの解である。

この方程式を解くと，$(5t-3)(5t-4)=0$ から　$t=\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$

$0<2x<\frac{\pi}{4}$ であるから　$\sin 2x<\cos 2x$

よって　$\sin 2x=\frac{3}{5}$，$\cos 2x=\frac{4}{5}$

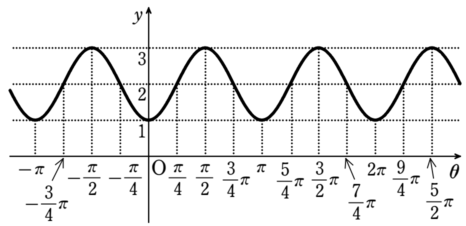
次に，$\cos 2x=\frac{4}{5}$ から　$2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\frac{4}{5}$

ゆえに　$\cos^2 x=\frac{9}{10}$，$\sin^2 x=\frac{1}{10}$

よって　$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{9}+9=\frac{82}{9}$

$\boxed{2}$

解答

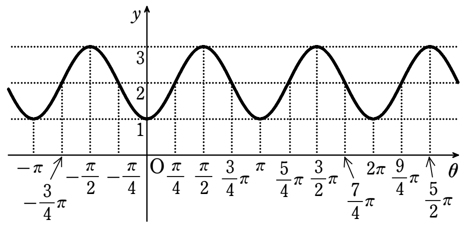


解説

半角の公式から

$$3\sin^2\theta+\cos^2\theta=3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$=-\cos 2\theta+2$$

よって，$y=3\sin^2\theta+\cos^2\theta$ のグラフは，$y=\cos 2\theta$ のグラフを θ 軸に関して対称移動した後，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，[図] のようになる。



$\boxed{3}$

解答　(1) $-\dfrac{59}{72}$　　(2) 略　　(3) $\dfrac{5}{13}$

解説

(1) $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3}$ の両辺をそれぞれ平方すると

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots①$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{9}\quad\cdots\cdots②$$

①+② から

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=\frac{13}{36}$$

よって　$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{13}{36}$

ゆえに　$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{59}{72}$

すなわち　$\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{59}{72}$

(2) (左辺)$=(2\cos^2x-1)+(2\cos^2y-1)=2(\cos^2x+\cos^2y-1)$

(右辺)$=2(\cos x\cos y-\sin x\sin y)(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$

$=2\{(\cos x\cos y)^2-(\sin x\sin y)^2\}$

$=2(\cos^2x\cos^2y-\sin^2x\sin^2y)$

$=2\{\cos^2x\cos^2y-(1-\cos^2x)(1-\cos^2y)\}$

$=2\{\cos^2x\cos^2y-1+\cos^2x+\cos^2y-\cos^2x\cos^2y\}$

$=2(\cos^2x+\cos^2y-1)$

よって　(左辺)=(右辺)

(3) (2) の等式から　$\cos2\alpha+\cos2\beta=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

(1) の結果を代入して　$\cos2\alpha+\cos2\beta=-\dfrac{59}{36}\cos(\alpha+\beta)\quad\cdots\cdots③$

①−② から

$$(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+(\cos^2\beta-\sin^2\beta)=\frac{5}{36}$$

すなわち　$\cos2\alpha+\cos2\beta+2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{36}$

③ を代入して　$-\dfrac{59}{36}\cos(\alpha+\beta)+2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{36}$

よって　$\dfrac{13}{36}\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{36}$　　したがって　$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{13}$

$\boxed{4}$

解答　(1)（ア）$8t^4-8t^2+1$　（イ）$4t(1-2t^2)$　（ウ）$16t^5-20t^3+5t$

(2)（エ）$4t^2+2t-1$　（オ）$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(3)（カ）1，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$　（キ）$\theta=\dfrac{\pi}{10}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{9}{10}\pi$

解説

(1) $\cos4\theta=2\cos^22\theta-1=2(1-2\sin^2\theta)^2-1=2(1-2t^2)^2-1={}^{ア}8t^4-8t^2+1$

$\sin4\theta=2\sin2\theta\cos2\theta=2\cdot2\sin\theta\cos\theta(1-2\sin^2\theta)={}^{イ}4t(1-2t^2)\cos\theta$

$\sin5\theta=\sin(4\theta+\theta)=\sin4\theta\cos\theta+\cos4\theta\sin\theta$

$=4t(1-2t^2)\cos^2\theta+(8t^4-8t^2+1)t$

$=4t(1-2t^2)(1-t^2)+(8t^4-8t^2+1)t={}^{ウ}16t^5-20t^3+5t$

(2) $16t^5-20t^3+5t-1=(t-1)(16t^4+16t^3-4t^2-4t+1)=(t-1)({}^{エ}4t^2+2t-1)^2$

ここで，$(t-1)(4t^2+2t-1)^2=0$ を解くと　$t=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\sin\dfrac{\pi}{10}<1$ であるから　$\sin\dfrac{\pi}{10}={}^{オ}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(3) $8t^4-8t^2+1-t=0$ から　$(t-1)(8t^3+8t^2-1)=0$

すなわち　$(t-1)(2t+1)(4t^2+2t-1)=0$

これを解くと　$t={}^{カ}1$，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\theta<\pi$ において，$0<\sin\theta\leqq1$ であるから　$t=1$，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

$t=1$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　　$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ のとき，(2) から　$\theta=\dfrac{\pi}{10}$，$\dfrac{9}{10}\pi$

したがって　$\theta={}^{キ}\dfrac{\pi}{10}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{9}{10}\pi$

$\boxed{1}$

解答　(1) $2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$　　(2) $\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$　ただし　$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

解説

(1) $\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$\mathrm{P}(-1,\ \sqrt{3})$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は $\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

(2) $\mathrm{P}(1,\ -1)$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

線分 OP が x 軸の正の向きとなす角は $-\dfrac{\pi}{4}$

よって　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(3) $\mathrm{P}(2,\ 3)$ とすると

$\mathrm{OP}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

また，線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると

$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

よって　$2\sin\theta+3\cos\theta=\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$

ただし　$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$\boxed{2}$

解答　$x=\dfrac{11}{6}\pi$ で最大値 2，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 −2

解説

$$y=2\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=2\left(\sin x\cos\frac{2}{3}\pi+\cos x\sin\frac{2}{3}\pi\right)=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\dfrac{2}{3}\pi\leqq x+\dfrac{2}{3}\pi<\dfrac{8}{3}\pi$ であるから

$-1\leqq\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)\leqq1$　　よって　$-2\leqq y\leqq2$

$\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=-1$ のとき　$x+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{3}{2}\pi$　　よって　$x=\dfrac{5}{6}\pi$

$\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=1$ のとき　$x+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{5}{2}\pi$　　よって　$x=\dfrac{11}{6}\pi$

したがって　$x=\dfrac{11}{6}\pi$ で最大値 2，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 −2

$\boxed{3}$

解答　(1) $\theta=0$，$\dfrac{\pi}{3}$　　(2) $\dfrac{2}{3}\pi<\theta<\pi$，$\dfrac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$

解説

(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ であるから，方程式は　$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

すなわち　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

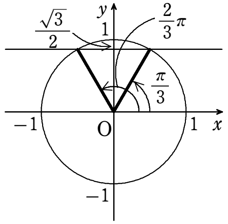
$\theta+\frac{\pi}{3}=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{3}\leqq t<2\pi+\frac{\pi}{3}$

この範囲で $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと

$t=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi$

よって，解は　$\theta=t-\frac{\pi}{3}$ より　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3}$



(2) 不等式から　$\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta+1<0$

$\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta=2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ であるから，不等式は

$2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+1<0$　すなわち　$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)<-\frac{1}{2}$

$2\theta-\frac{\pi}{6}=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$-\frac{\pi}{6}\leqq t<4\pi-\frac{\pi}{6}$

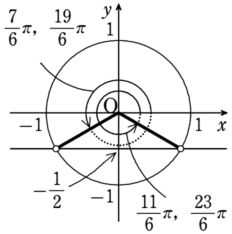
この範囲で $\sin t<-\frac{1}{2}$ を解くと

$\frac{7}{6}\pi<t<\frac{11}{6}\pi,\ \frac{19}{6}\pi<t<\frac{23}{6}\pi$

すなわち　$\frac{7}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi,$

$\frac{19}{6}\pi<2\theta-\frac{\pi}{6}<\frac{23}{6}\pi$

よって　$\frac{2}{3}\pi<\theta<\pi,\ \frac{5}{3}\pi<\theta<2\pi$



$\boxed{4}$

解答　(1) $y=t^2-t+2$　(2) $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　(3) 最大値 $4+\sqrt{2}$，最小値 $\frac{7}{4}$

解説

(1) $\sin x+\cos x=t$ の両辺を２乗すると　$\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x=t^2$

よって　$2\sin x\cos x=t^2-1$

ゆえに　$y=(t^2-1)-t+3=t^2-t+2$　……①

(2) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

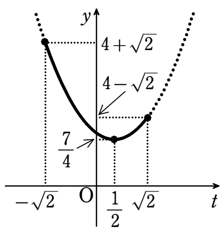
$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$　……②

(3) ①を変形すると　$y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

②の範囲で，y は

$t=-\sqrt{2}$ で最大値 $4+\sqrt{2}$，

$t=\frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{7}{4}$　をとる。



$\boxed{5}$

解答　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ で最大値 4，$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ で最小値 0

解説

$y=\frac{1-\cos2x}{2}+\sqrt{3}\sin2x+3\cdot\frac{1+\cos2x}{2}$

$=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x+2=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $\frac{\pi}{6}\leqq2x+\frac{\pi}{6}<\frac{25}{6}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq1$

よって　$0\leqq y\leqq4$

また，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi$　すなわち　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$　すなわち　$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

ゆえに，この関数は　$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$ で最大値 4，$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ で最小値 0　をとる。

別解　$y=(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2=\left\{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}^2=4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq1$　であるから　最大値 4，最小値 0

$\boxed{6}$

解答　(ア) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$　(イ) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　(ウ) $\frac{1}{8}$

解説

(ア) $\sin75^\circ\cos15^\circ=\frac{1}{2}\{\sin(75^\circ+15^\circ)+\sin(75^\circ-15^\circ)\}$

$=\frac{1}{2}(\sin90^\circ+\sin60^\circ)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

(イ) $\sin75^\circ+\sin15^\circ=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}$

$=2\sin45^\circ\cos30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(ウ) $\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ=\frac{1}{2}\{\cos60^\circ+\cos(-20^\circ)\}\cos80^\circ$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos20^\circ\right)\cos80^\circ=\frac{1}{4}\cos80^\circ+\frac{1}{2}\cos20^\circ\cos80^\circ$

$=\frac{1}{4}\cos80^\circ+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos100^\circ+\cos(-60^\circ)\}$

$=\frac{1}{4}\cos80^\circ+\frac{1}{4}\cos100^\circ+\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{4}\cos80^\circ+\frac{1}{4}\cos(180^\circ-80^\circ)+\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{4}\cos80^\circ-\frac{1}{4}\cos80^\circ+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

$\boxed{1}$

解答　(1) $2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$　(2) $2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$　(3) $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

(4) $2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

解説

(1) $\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2$ であるから

$\sqrt{2}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left\{\sin\theta\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\theta\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

(2) $\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であるから

$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\left(-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$

(3) $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ であるから

$\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}$

$=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

(4) $\sqrt{(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$ であるから

$\sqrt{6}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)$

$=2\sqrt{2}\left\{\sin\theta\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\theta\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

$\boxed{2}$

解答　(1) $x=\frac{\pi}{6}$ で最大値 2，$x=\frac{7}{6}\pi$ で最小値 -2

(2) $x=\pi$ で最大値 1，$x=\frac{7}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$

解説

(1) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

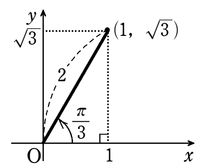
$0\leqq x<2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

よって，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ がとる値の範囲は

$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq1$ であるから　$-2\leqq y\leqq2$

ゆえに



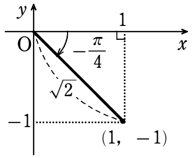
$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ すなわち $x=\frac{\pi}{6}$ で最大値 2

$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$ すなわち $x=\frac{7}{6}\pi$ で最小値 -2

(2)　$y=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\pi\leqq x<2\pi$ のとき

$\frac{3}{4}\pi\leqq x-\frac{\pi}{4}<\frac{7}{4}\pi$



よって，$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ がとる値の範囲は

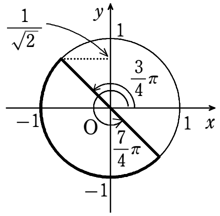
$-1\leqq\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$

であるから　$-\sqrt{2}\leqq y\leqq 1$

ゆえに

$x-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$ すなわち $x=\pi$ で最大値 1

$x-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$ すなわち $x=\frac{7}{4}\pi$ で最小値 $-\sqrt{2}$



3

解答　(1)　$x=\frac{\pi}{6}$　(2)　$x=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$　(3)　$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{4}{3}\pi$

(4)　$0\leqq x<\frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi<x<2\pi$

解説

(1)　$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ であるから，方程式は

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2$　すなわち　$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

$x+\frac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\sin t=1$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{3}\leqq t<2\pi+\frac{\pi}{3}$　すなわち　$\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{7}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t=\frac{\pi}{2}$

すなわち　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$　よって　$x=\frac{\pi}{6}$

(2)　$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ であるから，方程式は

$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$　すなわち　$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x-\frac{\pi}{6}=t$ とおくと　$\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき

$-\frac{\pi}{6}\leqq t<2\pi-\frac{\pi}{6}$　すなわち　$-\frac{\pi}{6}\leqq t<\frac{11}{6}\pi$

この範囲で，① を解くと　$t=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

すなわち　$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$　よって　$x=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$

(3)　$\sin x\geqq\sqrt{3}\cos x$ から　$\sin x-\sqrt{3}\cos x\geqq 0$

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ であるから，不等式は　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geqq 0$

$x-\frac{\pi}{3}=t$ とおくと　$2\sin t\geqq 0$　ゆえに　$\sin t\geqq 0$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき

$-\frac{\pi}{3}\leqq t<2\pi-\frac{\pi}{3}$　すなわち　$-\frac{\pi}{3}\leqq t<\frac{5}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　$0\leqq t\leqq\pi$

すなわち　$0\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq\pi$　よって　$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{4}{3}\pi$

(4)　$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ であるから，不等式は

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>1$　すなわち　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$

$x+\frac{\pi}{4}=t$ とおくと　$\sin t>\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{4}\leqq t<2\pi+\frac{\pi}{4}$　すなわち　$\frac{\pi}{4}\leqq t<\frac{9}{4}\pi$

この範囲で，① を解くと　$\frac{\pi}{4}\leqq t<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi<t<\frac{9}{4}\pi$

すなわち　$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

よって　$0\leqq x<\frac{7}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi<x<2\pi$

4

解答　(1)　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$　(2)　最大値 2，最小値 $-\frac{1}{4}$

解説

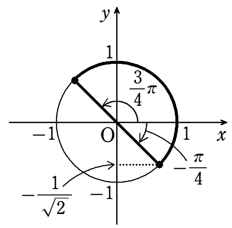
(1)　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$

ゆえに　$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって　$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

すなわち　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$



(2)　$y=\cos\theta-\sin 2\theta-\sin\theta+1$

$=\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta+1$

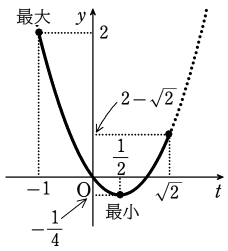
$=(\sin\theta-\cos\theta)^2-(\sin\theta-\cos\theta)$

y を t の式で表すと

$y=t^2-t=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲において，y は $t=-1$ のとき

最大値 2，$t=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる。



5

解答　$x=\frac{3}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi$ で最大値 $2\sqrt{2}+1$，　$x=\frac{7}{8}\pi,\ \frac{15}{8}\pi$ で最小値 $-2\sqrt{2}+1$

解説

$y=3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+2\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=2\sin 2x-2\cos 2x+1=2(\sin 2x-\cos 2x)+1$

$=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$

$0\leqq x<2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{4}\leqq 2x-\frac{\pi}{4}<\frac{15}{4}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

ゆえに　$-2\sqrt{2}+1\leqq y\leqq 2\sqrt{2}+1$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ のとき　$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$　よって　$x=\frac{7}{8}\pi,\ \frac{15}{8}\pi$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$　のとき　$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi$　よって　$x=\frac{3}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi$

したがって　$x=\frac{3}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi$ で最大値 $2\sqrt{2}+1$

$x=\frac{7}{8}\pi,\ \frac{15}{8}\pi$ で最小値 $-2\sqrt{2}+1$

6

解答　(1)　$\frac{\sqrt{3}-1}{4}$　(2)　$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$　(3)　$\frac{\sqrt{6}}{2}$　(4)　$-\frac{\sqrt{6}}{2}$

解説

(1)　$\cos 75^\circ\cos 45^\circ=\frac{1}{2}\{\cos(75^\circ+45^\circ)+\cos(75^\circ-45^\circ)\}=\frac{1}{2}(\cos 120^\circ+\cos 30^\circ)$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

(2)　$\sin 75^\circ\sin 45^\circ=-\frac{1}{2}(\cos 120^\circ-\cos 30^\circ)=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

(3)　$\sin 105^\circ+\sin 15^\circ=2\sin\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{105^\circ-15^\circ}{2}=2\sin 60^\circ\cos 45^\circ$

$=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(4)　$\cos 105^\circ-\cos 15^\circ=-2\sin 60^\circ\sin 45^\circ=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{1}$

解答 (1) $\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $\sqrt{3}$，$\theta=0$ のとき最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

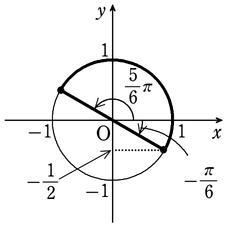
(2) $\theta=\pi$ で最大値 $\frac{1}{2}$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ で最小値 -1

解説

(1) $y=\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}-\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sin\theta=\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$



$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$

よって　$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

したがって

$\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $\sqrt{3}$

$\theta-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$　すなわち　$\theta=0$ のとき最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)-\cos\theta=\sin\theta\cos\frac{5}{6}\pi+\cos\theta\sin\frac{5}{6}\pi-\cos\theta$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta-\cos\theta$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta=\sin\left(\theta+\frac{7}{6}\pi\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$\frac{7}{6}\pi\leqq\theta+\frac{7}{6}\pi\leqq\frac{13}{6}\pi$

よって　$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{7}{6}\pi\right)\leqq\frac{1}{2}$

ゆえに　$\theta+\frac{7}{6}\pi=\frac{13}{6}\pi$　すなわち　$\theta=\pi$ で最大値 $\frac{1}{2}$

$\theta+\frac{7}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi$　すなわち　$\theta=\frac{\pi}{3}$ で最小値 -1

$\boxed{2}$

解答 (1) $\frac{\sqrt{3}}{8}$　(2) 0

解説

(1) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=-\frac{1}{2}(\cos 60^\circ-\cos 20^\circ)\sin 80^\circ$

$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{2}\sin 80^\circ\cos 20^\circ$

$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{4}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)$

$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{4}\sin(180^\circ-80^\circ)+\frac{\sqrt{3}}{8}$

$=-\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{1}{4}\sin 80^\circ+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

(2) $\cos 10^\circ+\cos 110^\circ+\cos 130^\circ=2\cos 60^\circ\cos 50^\circ+\cos 130^\circ$

$=\cos 50^\circ+\cos(180^\circ-50^\circ)$

$=\cos 50^\circ-\cos 50^\circ=0$

$\boxed{3}$

解答 (1) $x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$　(2) $x=0$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3}{2}\pi$，$\frac{5}{3}\pi$

解説

(1) $\cos 3x+\cos x=0$ から　$2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=0$

すなわち　$2\cos 2x\cos x=0$

よって　$\cos 2x=0$　または　$\cos x=0$

$0\leqq x<2\pi$ から　$0\leqq 2x<4\pi$

ゆえに，$\cos 2x=0$ から　$2x=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$，$\frac{5}{2}\pi$，$\frac{7}{2}\pi$

よって　$x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$

また，$\cos x=0$ から　$x=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

したがって，解は　$x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$

別解　3倍角の公式により，$\cos 3x=-3\cos x+4\cos^3 x$ であるから，方程式は

$(-3\cos x+4\cos^3 x)+\cos x=0$

$4\cos^3 x-2\cos x=0$

$2\cos x(2\cos^2 x-1)=0$

よって　$\cos x=0$，$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\cos x=0$ より　$x=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ より　$x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{7}{4}\pi$

$\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ より　$x=\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$

したがって，解は　$x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$

(2) $\sin x-\sin 2x+\sin 3x=(\sin 3x+\sin x)-\sin 2x=2\sin 2x\cos x-\sin 2x$

$=\sin 2x(2\cos x-1)$

ゆえに，方程式は　$\sin 2x(2\cos x-1)=0$

よって　$\sin 2x=0$　または　$\cos x=\frac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ から　$0\leqq 2x<4\pi$

ゆえに，$\sin 2x=0$ から　$2x=0$，π，2π，3π

よって　$x=0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3}{2}\pi$

また，$\cos x=\frac{1}{2}$ から　$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

したがって，解は　$x=0$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3}{2}\pi$，$\frac{5}{3}\pi$

別解　$\sin 2x=0$ は次のように解いてもよい。

$\sin 2x=0$ から　$2\sin x\cos x=0$

よって　$\sin x=0$　または　$\cos x=0$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\sin x=0$ より　$x=0$，π

$\cos x=0$ より　$x=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

$\boxed{4}$

解答　$x=\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{3}{4}$，$x=\frac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\frac{1}{4}$

解説

$y=\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\left\{\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

$=-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，$\frac{\pi}{3}\leqq 2x+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{7}{3}\pi$ であるから　$-1\leqq\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

ゆえに　$-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\leqq y\leqq-\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{4}$　すなわち　$-\frac{1}{4}\leqq y\leqq\frac{3}{4}$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{3}=\pi$　よって　$x=\frac{\pi}{3}$

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ のとき　$2x+\frac{\pi}{3}=2\pi$　よって　$x=\frac{5}{6}\pi$

したがって　$x=\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{3}{4}$，$x=\frac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\frac{1}{4}$

$\boxed{5}$

解答　$a=-1$，$b=\sqrt{3}$；最大値は 2

解説

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$ から　$a\cdot\frac{1}{2}+b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

よって　$a+\sqrt{3}b=2$　……①

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$ から　$a\cdot 0+b\cdot 1=\sqrt{3}$

よって　$b=\sqrt{3}$

これを ① に代入して　$a+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=2$

よって　$a=-1$

ゆえに　$a=-1$，$b=\sqrt{3}$

したがって　$f(x)=-\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$-1\leqq\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$ であるから，$f(x)$ の最大値は　2

$\boxed{1}$

解答　略

解説

$\sin 2A+\sin 2B=2\sin(A+B)\cos(A-B)$

また，$C=\pi-(A+B)$ であるから

$$\sin 2C=\sin 2\{\pi-(A+B)\}=\sin\{2\pi-2(A+B)\}$$
$$=\sin\{-2(A+B)\}=-\sin 2(A+B)$$
$$=-2\sin(A+B)\cos(A+B)$$

よって　左辺 $=2\sin(A+B)\cos(A-B)-2\sin(A+B)\cos(A+B)$

$$=2\sin(A+B)\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$$
$$=2\sin(\pi-C)\times\{-2\sin A\sin(-B)\}$$
$$=4\sin A\sin B\sin C=\text{右辺}$$

$\boxed{2}$

解答　$a=\dfrac{6\pm\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6\mp\sqrt{14}}{2}$ (複号同順)

解説

$$f(\theta)=a\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+(a-b)\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}+b\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$=\frac{a-b}{2}(\sin 2\theta+\cos 2\theta)+\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{\sqrt{2}}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{a+b}{2}$$

[1]　$a>b$ のとき　　$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから

最大値は　$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$，最小値は　$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$

したがって，求める条件は　　$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3+\sqrt{7}$　……①

$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3-\sqrt{7}$　……②

①＋② から　　$a+b=6$　　(①－②)$\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から　　$a-b=\sqrt{14}$

この２式を連立して解くと　　$a=\dfrac{6+\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6-\sqrt{14}}{2}$

[2]　$a=b$ のとき

$f(\theta)=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a$ となり，$f(\theta)$ は常に一定の値 a をとるから，最大値 $3+\sqrt{7}$，最小値 $3-\sqrt{7}$ となることはない。

[3]　$a<b$ のとき

最大値は　$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$，最小値は　$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}$

したがって，求める条件は　　$-\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3+\sqrt{7}$　……③

$\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}+\dfrac{a+b}{2}=3-\sqrt{7}$　……④

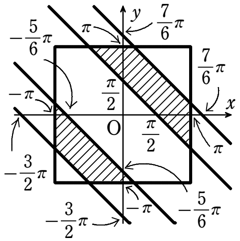
③＋④ から　　$a+b=6$　　(④－③)$\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から　　$a-b=-\sqrt{14}$

この２式を連立して解くと　　$a=\dfrac{6-\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6+\sqrt{14}}{2}$

以上から　　$a=\dfrac{6\pm\sqrt{14}}{2}$，$b=\dfrac{6\mp\sqrt{14}}{2}$ (複号同順)

$\boxed{3}$

解答　［図］境界線を含む



解説

$|x|\leqq\pi$ から　　$-\pi\leqq x\leqq\pi$　……①

$|y|\leqq\pi$ から　　$-\pi\leqq y\leqq\pi$　……②

また，$\sin(x+y)-\sqrt{3}\cos(x+y)\geqq 1$ から　　$2\sin\left(x+y-\dfrac{\pi}{3}\right)\geqq 1$

ゆえに　　$\sin\left(x+y-\dfrac{\pi}{3}\right)\geqq\dfrac{1}{2}$　……③

①＋② から　　$-2\pi\leqq x+y\leqq 2\pi$

よって　　$-2\pi-\dfrac{\pi}{3}\leqq x+y-\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\pi-\dfrac{\pi}{3}$

すなわち　　$-\dfrac{7}{3}\pi\leqq x+y-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

この範囲で不等式 ③ を解くと

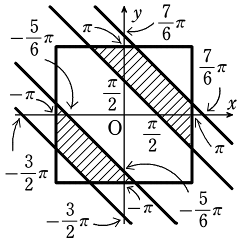
$-\dfrac{11}{6}\pi\leqq x+y-\dfrac{\pi}{3}\leqq-\dfrac{7}{6}\pi$

または　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x+y-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

したがって　　$-\dfrac{3}{2}\pi\leqq x+y\leqq-\dfrac{5}{6}\pi$

または　$\dfrac{\pi}{2}\leqq x+y\leqq\dfrac{7}{6}\pi$

ゆえに，求める領域は右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



$\boxed{4}$

解答　(1)　(ア)　2　　(イ)　-1　　(2)　$2\leqq k<\sqrt{5}$

解説

(1)　$\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq\alpha\leqq 2\pi$ であるから　　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\alpha-\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\pi-\dfrac{\pi}{3}$

ゆえに　　$-2\leqq 2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 2$

よって　　$-2\leqq\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha\leqq 2$

$-1\leqq 1-(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha)\leqq 3$

ゆえに　$0\leqq|1-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha|\leqq 3$

よって　　$-1\leqq 2-|1-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha|\leqq 2$

したがって，最大値は ${}^{ア}2$，最小値は ${}^{イ}-1$

(2)　$f(x)=\sin x+2\cos x$ とすると

$$f(x)=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)=\sqrt{5}\sin(x+\alpha)$$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}+\alpha$

したがって，$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき，$f(x)$ は増加し，

$\dfrac{\pi}{2}\leqq x+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ すなわち $\dfrac{\pi}{2}-\alpha\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x)$ は減少する。

また，$f(0)=2$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ であり，$x=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ で $f(x)$ は最大値 $\sqrt{5}$ をとる。

ゆえに，$y=f(x)$　$\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフの概形は，右の図のようになる。

与えられた方程式が異なる２個の解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が異なる２つの共有点をもつ条件と同じである。

よって，求める k の値の範囲は，図から

$$2\leqq k<\sqrt{5}$$