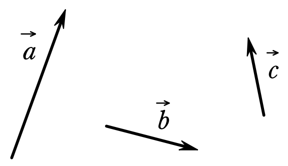
$\boxed{1}$

正方形 ABCD の各頂点を始点，終点とする有向線分で表されるベクトルのうち，次のベクトルを求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と大きさが等しい　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と等しい

$\boxed{2}$

右の図で与えられた 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について，ベクトル $\vec{a}+2\vec{b}$，$2\vec{a}-\vec{b}$，$2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ を図示せよ。



$\boxed{3}$

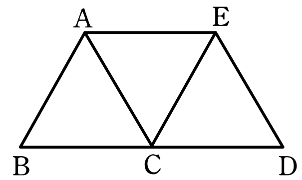
(1) $7(3\vec{a}+\vec{b})-5(\vec{a}-2\vec{b})$ を簡単にせよ。

(2) 次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

$$3(\vec{a}+\vec{b}-\vec{x})+\vec{b}=2\vec{a}+3\vec{b}$$

$\boxed{4}$

右の図において，△ABC，△ACE，△ECD は正三角形である。



(1) 点 A，B，C，D，E を始点，終点とする有向線分が表すベクトルのうち，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ に等しいものを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ED}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\boxed{5}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=6\vec{b}-4\vec{a}$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。ただし，$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないものとする。

$\boxed{6}$

$\vec{a}=(4,\ 5)$，$\vec{b}=(-1,\ 4)$ について

(1) $3\vec{a}-2\vec{b}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(2) $2(\vec{x}-3\vec{a})-3(\vec{b}-\vec{x})=\vec{x}$ を満たす $\vec{x}$ を成分で表せ。

7

$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$ のとき，$\vec{c}=(-6,\ 5)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

8

原点を O とし，A$(-2,\ 3)$，B$(-4,\ -1)$，C$(4,\ 2)$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

(2)　四角形 ABCD が平行四辺形のとき，D の座標を求めよ。

9

次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行になるように，x の値を定めよ。

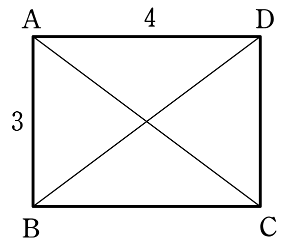
(1)　$\vec{a}=(1,\ -4)$，$\vec{b}=(x,\ -20)$　　(2)　$\vec{a}=(x^2-x,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$

10

△ABC の辺 BC の中点を M，辺 AC の 3 等分点のうち C に近い方の点を N とする。
$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

11

AB$=3$，AD$=4$ の長方形 ABCD がある。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とするとき，次のベクトルと同じ向きの単位ベクトルを $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

12

ベクトル $\vec{a}=(x,\ -2)$，$\vec{b}=(1,\ -4)$ に対し，$\vec{a}+4\vec{b}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が平行になるように，実数 x の値を定めよ。

13

$\vec{a}=(3,\ 4)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ とし，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) とする。

(1)　$|\vec{c}|=\sqrt{35}$ のとき，t の値を求めよ。

(2)　$|\vec{c}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

解説

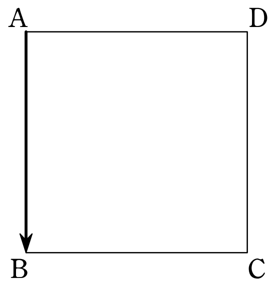
$\boxed{1}$

(解説)

(1)　求めるベクトルは

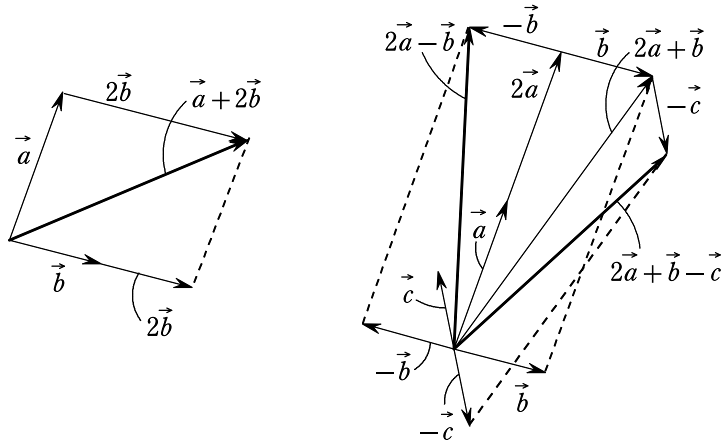
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(2)　求めるベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$



$\boxed{2}$

(解説)



$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$7(3\vec{a}+\vec{b})-5(\vec{a}-2\vec{b})=21\vec{a}+7\vec{b}-5\vec{a}+10\vec{b}=(21-5)\vec{a}+(7+10)\vec{b}$

$=16\vec{a}+17\vec{b}$

(2)　与えられた等式から　$3\vec{a}+3\vec{b}-3\vec{x}+\vec{b}=2\vec{a}+3\vec{b}$

よって　$3\vec{x}=3\vec{a}+4\vec{b}-(2\vec{a}+3\vec{b})$

すなわち　$3\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$　したがって　$\vec{x}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$

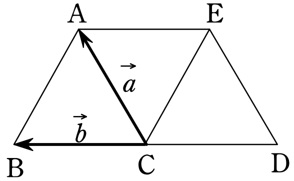
$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EA}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}-\vec{b}$



$\boxed{5}$

(解説)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=6\vec{b}-4\vec{a}=2(3\vec{b}-2\vec{a})$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3\vec{b}-2\vec{a}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}=3(4,\ 5)-2(-1,\ 4)=(12,\ 15)-(-2,\ 8)$

$=(12+2,\ 15-8)=(14,\ 7)$

$|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{14^2+7^2}=\sqrt{7^2(2^2+1)}=7\sqrt{5}$

(2)　与えられた等式から　$2\vec{x}-6\vec{a}-3\vec{b}+3\vec{x}=\vec{x}$

よって　$4\vec{x}=6\vec{a}+3\vec{b}$　ゆえに　$\vec{x}=\dfrac{1}{4}(6\vec{a}+3\vec{b})$

したがって　$\vec{x}=\dfrac{1}{4}\{6(4,\ 5)+3(-1,\ 4)\}=\dfrac{1}{4}(24-3,\ 30+12)$

$=\left(\dfrac{21}{4},\ \dfrac{21}{2}\right)$

$\boxed{7}$

(解説)

$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと　$(-6,\ 5)=s(2,\ -1)+t(3,\ -2)$

$$=(2s+3t,\ -s-2t)$$

よって　$2s+3t=-6,\ -s-2t=5$

これを解いて　$s=3,\ t=-4$　したがって　$\vec{c}=3\vec{a}-4\vec{b}$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-2,\ 3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-4-(-2),\ -1-3)=(-2,\ -4)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

(2)　四角形 ABCD が平行四辺形であるための必要十分

条件は　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$　…… ①

頂点 D の座標を $(x,\ y)$ とすると

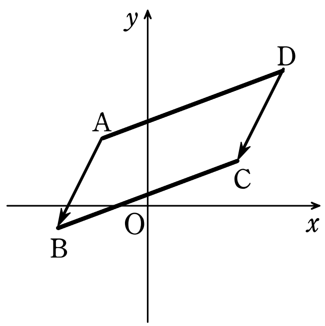
$$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(4-x,\ 2-y)$$

よって，① から　$(-2,\ -4)=(4-x,\ 2-y)$

ゆえに　$-2=4-x,\ -4=2-y$

よって　$x=6,\ y=6$

したがって，D の座標は　$(6,\ 6)$



$\boxed{9}$

(解説)

(1)　$\vec{a}/\!/\vec{b}$ であるためには，$\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k があればよい。

よって　$(x,\ -20)=k(1,\ -4)$　すなわち　$(x,\ -20)=(k,\ -4k)$

ゆえに　$x=k$　…… ①，　$-20=-4k$　…… ②

② から　$k=5$　よって，① から　$x=5$

(2)　$\vec{a}/\!/\vec{b}$ であるためには，$\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k があればよい。

よって　$(2,\ 1)=k(x^2-x,\ 3)$　すなわち　$(2,\ 1)=(k(x^2-x),\ 3k)$

ゆえに　$2=k(x^2-x)$　…… ①，　$1=3k$　…… ②

② から　$k=\dfrac{1}{3}$　$k=\dfrac{1}{3}$ を ① に代入すると　$2=\dfrac{1}{3}(x^2-x)$

よって　$x^2-x-6=0$　ゆえに　$(x+2)(x-3)=0$

したがって　$x=-2,\ 3$

注意　(1)，(2) とも，$\vec{b}=k\vec{a}$（k は実数）の代わりに $\vec{a}=k\vec{b}$（k は実数）とおいてもよい。

別解　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{a}/\!/\vec{b} \iff a_1b_2-a_2b_1=0$$

が成り立つ。このことを用いて解くと

(1)　$1\times(-20)-(-4)\times x=0$ から　$x=5$

(2)　$(x^2-x)\times1-3\times2=0$ から　$x^2-x-6=0$

よって，$(x+2)(x-3)=0$ から　$x=-2,\ 3$

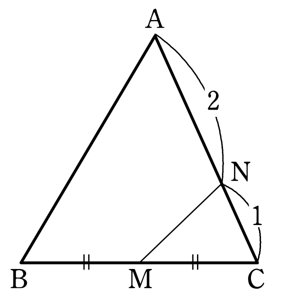
$\boxed{10}$

(解説)

$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{MC}}+\overrightarrow{\mathrm{CN}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



$\boxed{11}$

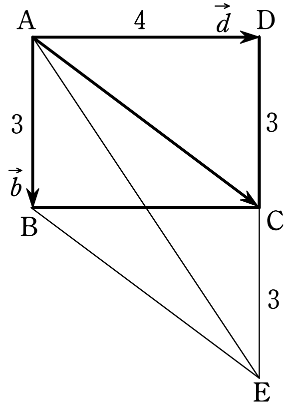
(解説)

(1) $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{d}-\vec{b}$

よって，$\overrightarrow{BD}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|}=\frac{1}{5}(\vec{d}-\vec{b})=-\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{d}$$



(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\vec{b}+(\vec{b}+\vec{d})$

$=2\vec{b}+\vec{d}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$ とすると，図から

$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

よって，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AE}|}=\frac{1}{2\sqrt{13}}(2\vec{b}+\vec{d})=\frac{1}{\sqrt{13}}\vec{b}+\frac{1}{2\sqrt{13}}\vec{d}$$

$\boxed{12}$

(解説)

$\vec{a}+4\vec{b}=(x,\ -2)+4(1,\ -4)=(x+4,\ -18)$

$\vec{b}-\vec{a}=(1,\ -4)-(x,\ -2)=(1-x,\ -2)$

$\vec{a}+4\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}-\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}+4\vec{b}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が平行になるための必要十分条件は，$\vec{a}+4\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$ となる実数 k が存在することである。

よって　$(x+4,\ -18)=k(1-x,\ -2)$

ゆえに　$x+4=k(1-x)$ ……①，　$-18=-2k$ ……②

② から　$k=9$

これを ① に代入して　$x+4=9(1-x)$　　これを解いて　$x=\frac{1}{2}$

$\boxed{13}$

(解説)

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(3,\ 4)+t(2,\ 1)=(3+2t,\ 4+t)$

よって　$|\vec{c}|^2=(3+2t)^2+(4+t)^2=5t^2+20t+25$

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{35}$ から　$|\vec{c}|^2=35$

よって　$5t^2+20t+25=35$　　ゆえに　$t^2+4t-2=0$

これを解いて　$t=-2\pm\sqrt{6}$

(2) $|\vec{c}|^2=5(t^2+4t)+25=5(t+2)^2+5$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=-2$ で最小値 5 をとる。

$|\vec{c}|\geqq0$ であるから，このとき $|\vec{c}|$ も最小となる。

したがって，$|\vec{c}|$ は $t=-2$ で最小値 $\sqrt{5}$ をとる。