$\boxed{1}$

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB について，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(1)　5：3 に内分する点　　　(2)　2：5 に外分する点

$\boxed{2}$

△ABC の重心を G とするとき，任意の点 P に対して，等式 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}-2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=3\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{3}$

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 3：2 に内分する点を E，対角線 BD を 2：5 に内分する点を F とする。このとき，3 点 E，F，C は一直線上にあることを証明せよ。

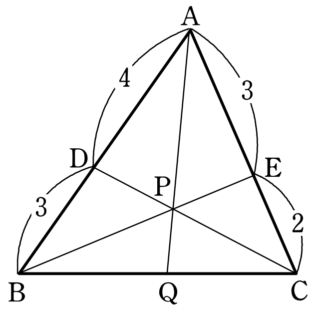
$\boxed{4}$

△ABC において，辺 AB を 4：3 に内分する点を D，辺 AC を 3：2 に内分する点を E とし，2 つの線分 CD，BE の交点を P とする。また，線分 AP の延長と辺 BC の交点を Q とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。



$\boxed{5}$

$\mathrm{OA}=2\sqrt{2}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ である △OAB の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

$\boxed{6}$

$\triangle$ABC において，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ が成り立つとき，$\triangle$ABC はどのような形の三角形か。

$\boxed{7}$

$\triangle$OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB を 4：5 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

$\boxed{8}$

AB$=5$，AC$=4$，$\angle$A$=60^\circ$ の $\triangle$ABC の頂点 A から辺 BC に下ろした垂線を AH とするとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ。

$\boxed{9}$

$\triangle$OAB で，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおき，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|2\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{2}$ とする。更に，$\triangle$OAB 内に点 H をとり，$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおく。ただし，s，t は実数とする。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{OH}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が垂直であるとき，s と t の関係式を求めよ。

(3)　点 H が $\triangle$OAB の垂心であるとき，s と t の値を求めよ。

$\boxed{10}$

AB$=3$，BC$=2$，CA$=4$ である $\triangle$ABC の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする。また，$\triangle$ABC の内接円と辺 BC との接点を E とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき

(1)　内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{AD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(3)　$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(4)　$\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

$\boxed{1}$

(解説)

(1)　線分 AB を 5：3 に内分する点の位置ベクトルは

$$\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{5+3}=\frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{8}$$

(2)　線分 AB を 2：5 に外分する点の位置ベクトルは

$$\frac{-5\vec{a}+2\vec{b}}{2-5}=\frac{5\vec{a}-2\vec{b}}{3}$$

$\boxed{2}$

(解説)

点 A，B，C，G，P の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{g}$，$\vec{p}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}-2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})-2(\vec{p}-\vec{c})$$

$$=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$$

$$3\overrightarrow{\mathrm{GC}}=3(\vec{c}-\vec{g})=3\vec{c}-3\times\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=3\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$$

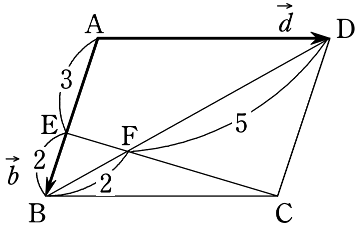
$$=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}-2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=3\overrightarrow{\mathrm{GC}}$

$\boxed{3}$

(解説)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{3}{5}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2+5}=\frac{5\vec{b}+2\vec{d}}{7}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}+\vec{d}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{5\vec{b}+2\vec{d}}{7}-\dfrac{3}{5}\vec{b}=\dfrac{2(2\vec{b}+5\vec{d})}{35}$

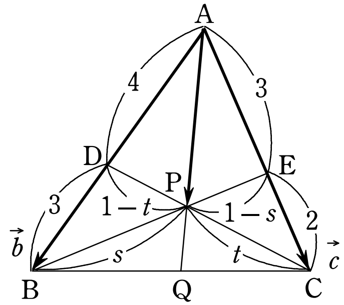
$$\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(\vec{b}+\vec{d})-\frac{3}{5}\vec{b}=\frac{2\vec{b}+5\vec{d}}{5}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ であるから，3 点 E，F，C は一直線上にある。

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　BP：PE$=s:(1-s)$，CP：PD$=t:(1-t)$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$=(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}\quad\cdots\cdots ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{4}{7}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\quad\cdots\cdots ②$$

①，② から　　$(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}=\frac{4}{7}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行でないから　　$1-s=\frac{4}{7}t$，$\frac{3}{5}s=1-t$

よって　　$7s+4t=7$，$3s+5t=5$　　　　これを解いて　　$s=\frac{15}{23}$，$t=\frac{14}{23}$

$s=\frac{15}{23}$ を ① に代入して　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ (k は実数) とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\left(\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}\right)=\frac{8}{23}k\vec{b}+\frac{9}{23}k\vec{c}\quad\cdots\cdots ③$$

BQ：QC$=u:(1-u)$ とすると　　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-u)\vec{b}+u\vec{c}\quad\cdots\cdots ④$

③，④ から　　$\frac{8}{23}k\vec{b}+\frac{9}{23}k\vec{c}=(1-u)\vec{b}+u\vec{c}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行でないから　　$\frac{8}{23}k=1-u$，$\frac{9}{23}k=u$

これを解いて　　$k=\frac{23}{17}$，$u=\frac{9}{17}$

$u=\frac{9}{17}$ を ④ に代入して　　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{8}{17}\vec{b}+\frac{9}{17}\vec{c}$

参考 1　後の項目「ベクトル方程式」で次のことを学習する。

点 P$(\vec{p})$ が 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線上にある

$$\Longleftrightarrow\quad \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},\ s+t=1$$

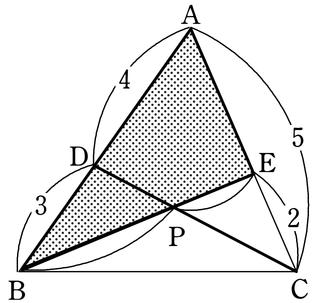
このことを利用すると，③ から直ちに k の値を求めることができる。

(別解)　点 Q は辺 BC 上にあるから，③ より

$$\frac{8}{23}k+\frac{9}{23}k=1\qquad これを解いて\qquad k=\frac{23}{17}$$

参考 2　(1) の $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求めるのにメネラウスの定理，(2) の $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を求めるのにチェバの定理を利用してもよい。

(1)　△ABE と直線 CD について，メネラウスの定理から



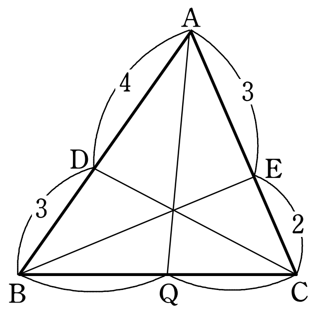
$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1$$

すなわち　　$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}=1$

よって，BP：PE$=15:8$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{8\overrightarrow{\mathrm{AB}}+15\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{15+8}=\frac{1}{23}\left(8\vec{b}+15\times\frac{3}{5}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}$$

(2)　チェバの定理から　　$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1$



すなわち　　$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=1$

よって，BQ：QC$=9:8$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{8\overrightarrow{\mathrm{AB}}+9\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9+8}=\frac{8}{17}\vec{b}+\frac{9}{17}\vec{c}$$

$\boxed{5}$

(解説)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数) とおく。

条件から　$|\vec{a}|=2\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$　……①

$AH\perp OB$ であるから　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

よって　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

① を代入して　$2s+3t-2=0$　……②

$BH\perp OA$ であるから　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

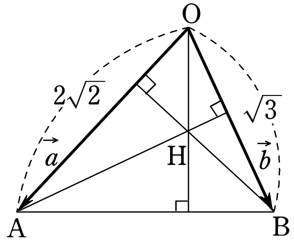
よって　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

ゆえに　$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

① を代入して　$8s+2t-2=0$　　よって　$4s+t-1=0$　……③

②，③ を解くと　$s=\dfrac{1}{10}$，$t=\dfrac{3}{5}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{10}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}$　　すなわち　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{10}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}$



[参考]　上の解答では，$AH\perp OB$ と $BH\perp OA$ を用いたが，$OH\perp AB$ を用いて求めてもよい。

$\boxed{6}$

(解説)

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると，条件式から

$$(\vec{c}-\vec{b})\cdot(-\vec{c})=(-\vec{c})\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$

よって　$-|\vec{c}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{b}|^2$

$-|\vec{c}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{b}|^2$ から　$|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

$|\vec{b}|>0$，$|\vec{c}|>0$ であるから　$|\vec{b}|=|\vec{c}|$　　すなわち　$AB=AC$

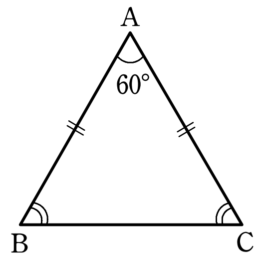
また，$-|\vec{c}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{b}\cdot\vec{c}$ から　$2\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2$

よって　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}|\vec{c}|^2$

ゆえに　$\cos\angle BAC=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\dfrac{\frac{1}{2}|\vec{c}|^2}{|\vec{c}|^2}=\dfrac{1}{2}$

$0°<\angle BAC<180°$ であるから　$\angle BAC=60°$

したがって，$AB=AC$，$\angle BAC=60°$ となるから，$\triangle ABC$ は正三角形である。



$\boxed{7}$

(解説)

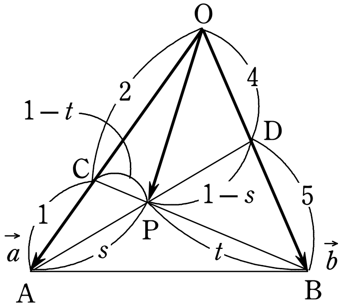
AP：PD$=s:(1-s)$，BP：PC$=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$=(1-s)\vec{a}+\frac{4}{9}s\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$



①，② から　$(1-s)\vec{a}+\frac{4}{9}s\vec{b}=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから

$$1-s=\frac{2}{3}t,\quad \frac{4}{9}s=1-t$$

よって　$3s+2t=3$，$4s+9t=9$　　これを解いて　$s=\frac{9}{19}$，$t=\frac{15}{19}$

$s=\frac{9}{19}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{10}{19}\vec{a}+\frac{4}{19}\vec{b}$

別解　△OAD と直線 BC について，メネラウスの

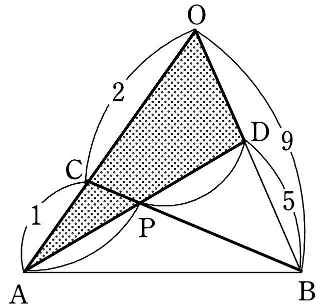
定理から　$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BO}}\cdot\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}=1$

すなわち　$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{1}=1$

よって，AP：PD$=9:10$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{10\overrightarrow{\mathrm{OA}}+9\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{9+10}=\frac{1}{19}\left(10\vec{a}+9\times\frac{4}{9}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{10}{19}\vec{a}+\frac{4}{19}\vec{b}$$



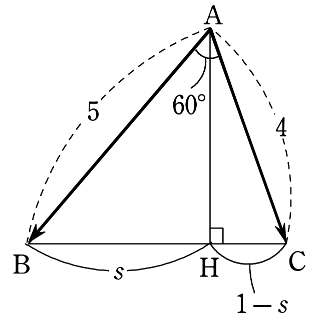
$\boxed{8}$

(解説)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると

$$|\vec{b}|=5,\quad |\vec{c}|=4,$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=5\times4\times\frac{1}{2}=10$$



BH：HC$=s:(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

すなわち　$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

よって　$(s-1)|\vec{b}|^2+(1-2s)\vec{b}\cdot\vec{c}+s|\vec{c}|^2=0$

$|\vec{b}|=5$，$|\vec{c}|=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=10$ を代入して

$$25(s-1)+10(1-2s)+16s=0$$　　これを解いて　$s=\frac{5}{7}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{5}{7}\vec{c}$　　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\boxed{9}$

(解説)

(1) $|2\vec{a}-\vec{b}|=2\sqrt{2}$ から $\quad |2\vec{a}-\vec{b}|^2=8$

よって $\quad 4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=8$

$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ を代入して $\quad 4\times3-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=8 \qquad$ ゆえに $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=2$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が垂直であるとき $\quad \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

すなわち $\quad (s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

よって $\quad -s|\vec{a}|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ を代入して $\quad -3s+2(s-t)+4t=0$

ゆえに $\quad s-2t=0$

(3) H が垂心のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(=\vec{b}-\vec{a})$ であるから，(2) の結果より

$$s-2t=0 \quad \cdots\cdots ①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから $\quad \overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

すなわち $\quad (s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0 \qquad$ よって $\quad s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ を代入して $\quad 2s+4t-2=0$

ゆえに $\quad s+2t=1 \quad \cdots\cdots ②$

①，② を解いて $\quad s=\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{1}{4}$

参考 (3) において，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の代わりに，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いてもよい。

$\boxed{10}$

(解説)

(1) AB＝3，CA＝4 から $\quad |\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$

BC＝2 すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2$ から $\quad |\vec{c}-\vec{b}|=2$

よって $\quad |\vec{c}-\vec{b}|^2=4 \qquad$ すなわち $\quad |\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=4$

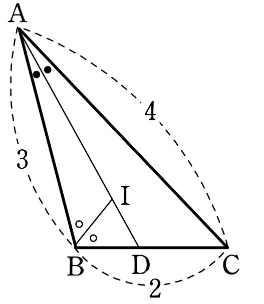
$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$ を代入して $\quad 16-2\vec{b}\cdot\vec{c}+9=4 \qquad$ ゆえに $\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{21}{2}$

別解 △ABC において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\times3\times4}=\frac{7}{8}$$

よって $\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BAC}=3\times4\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{21}{2}$

(2) AD は ∠A の二等分線であるから



$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=3:4 \quad \cdots\cdots ①$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+4}=\dfrac{4}{7}\vec{b}+\dfrac{3}{7}\vec{c}$

(3) BD：DC＝3：4 であり，BC＝2 であるから

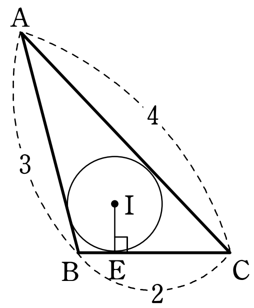
$$\mathrm{BD}=\frac{3}{3+4}\mathrm{BC}=\frac{3}{7}\times2=\frac{6}{7}$$

BI は ∠B の二等分線であるから

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=3:\frac{6}{7}=7:2$$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{7}{7+2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{7}{9}\left(\dfrac{4}{7}\vec{b}+\dfrac{3}{7}\vec{c}\right)=\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(4) BE：EC＝s：$(1-s)$ とすると



$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$ と表される。

IE⊥BC であるから $\quad \overrightarrow{\mathrm{IE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0 \quad \cdots\cdots ②$

ここで $\quad \overrightarrow{\mathrm{IE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\left(\dfrac{5}{9}-s\right)\vec{b}+\left(s-\dfrac{1}{3}\right)\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}$

よって，② から $\quad \left\{\left(\dfrac{5}{9}-s\right)\vec{b}+\left(s-\dfrac{1}{3}\right)\vec{c}\right\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

ゆえに $\quad \left(s-\dfrac{5}{9}\right)|\vec{b}|^2+\left(\dfrac{8}{9}-2s\right)\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(s-\dfrac{1}{3}\right)|\vec{c}|^2=0$

$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{21}{2}$ を代入して $\quad 9\left(s-\dfrac{5}{9}\right)+\dfrac{21}{2}\left(\dfrac{8}{9}-2s\right)+16\left(s-\dfrac{1}{3}\right)=0$

整理すると $\quad 4s-1=0 \qquad$ よって $\quad s=\dfrac{1}{4}$

したがって $\quad \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{3}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$

別解　まず，BE：EC を求める。

△ABC の内接円と辺 AB，CA との接点を，それぞれ F，G とすると

$$\mathrm{AF}=\mathrm{AG},\ \mathrm{BE}=\mathrm{BF},\ \mathrm{CE}=\mathrm{CG}$$

よって，AF$=l$，BE$=m$，CE$=n$ とおくと，AB=3，BC=2，CA=4 から

$$l+m=3 \ \cdots\cdots ③,\quad m+n=2 \ \cdots\cdots ④,$$

$$n+l=4 \ \cdots\cdots ⑤$$

③，④，⑤ の辺々を加えて　$2(l+m+n)=9$

よって　$l+m+n=\dfrac{9}{2}$　……⑥

⑥−⑤ から　$m=\dfrac{1}{2}$　　⑥−③ から　$n=\dfrac{3}{2}$

ゆえに　BE：EC$=m:n=1:3$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1+3}=\dfrac{3}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$