高1数学総合SA＋　春期第2講演習問題

$\boxed{1}$

次の角のうち，その動径が $70°$ の動径と同じ位置にある角はどれか。

$$420°,\ 790°,\ 1130°,\ -70°,\ -560°,\ -1010°$$

$\boxed{2}$

座標平面上で，x 軸の正の部分を始線にとる。次の角の動径は，第何象限にあるか。

(1) $\dfrac{11}{4}\pi$　(2) $-\dfrac{5}{6}\pi$　(3) $\dfrac{13}{3}\pi$　(4) $-\dfrac{25}{4}\pi$

$\boxed{3}$

次の θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1) $\theta=\dfrac{7}{4}\pi$　(2) $\theta=-\dfrac{4}{3}\pi$　(3) $\theta=\dfrac{23}{6}\pi$　(4) $\theta=-\dfrac{3}{2}\pi$

$\boxed{4}$

(1) $\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$ $(\pi<\theta<2\pi)$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$

$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。

(1) $\sin\theta-\cos\theta$　(2) $\sin\theta+\cos\theta$　(3) $\sin\theta$，$\cos\theta$

$\boxed{6}$

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1) $y=3\sin\theta$　(2) $y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

(3) $y=\tan\dfrac{\theta}{3}$　(4) $y=2\cos3\theta$

$\boxed{7}$

$y=\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを y 軸をもとにして θ 軸方向に ア $\boxed{}$ 倍に拡大し，θ 軸をもとにして y 軸方向に イ $\boxed{}$ 倍に縮小し，それを θ 軸方向に ウ $\boxed{}$ だけ平行移動したものである。

$\boxed{8}$

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1) $y=\sin\theta+1$　(2) $y=-\cos\theta-1$

(3) $y=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$　(4) $y=2\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$

$\boxed{9}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $2\cos\theta=-\sqrt{3}$　(2) $\sqrt{2}\sin\theta+1=0$

(3) $2\sin\theta+\sqrt{3}\leqq0$　(4) $\tan\theta+1>0$

$\boxed{10}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$　(2) $\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)>1$　(4) $\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{1}$

(解説)

$420° = 60° + 360° \times 1$,　　$790° = 70° + 360° \times 2$,　　$1130° = 50° + 360° \times 3$,

$-70° = 290° + 360° \times (-1)$,　　$-560° = 160° + 360° \times (-2)$,　　$-1010° = 70° + 360° \times (-3)$

よって，求める角は　$790°$, $-1010°$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$\dfrac{11}{4}\pi = \dfrac{3}{4}\pi + 2\pi$

よって　第 2 象限

(2)　第 3 象限

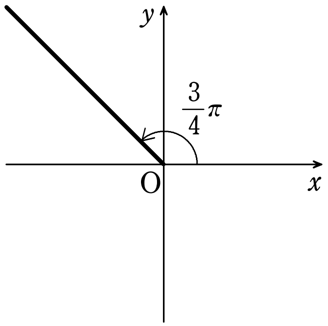
(3)　$\dfrac{13}{3}\pi = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi \times 2$

よって　第 1 象限

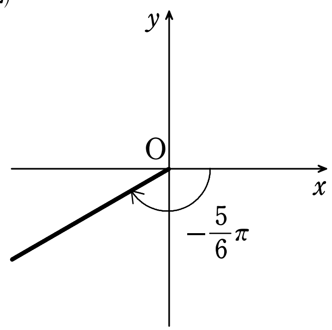
(4)　$-\dfrac{25}{4}\pi = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi \times (-3)$

よって　第 4 象限

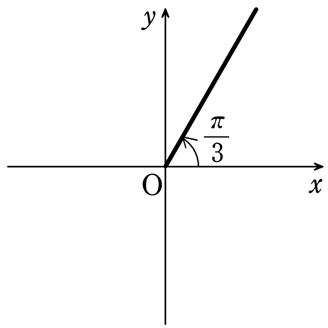
(1)



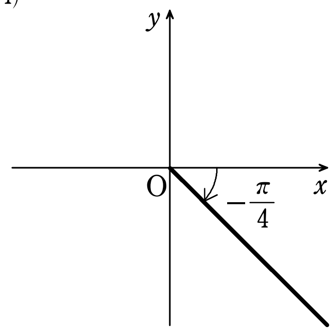
(2)



(3)



(4)



$\boxed{3}$

(解説)

角を表す動径と円 $x^2+y^2=r^2$ の交点をPとする。

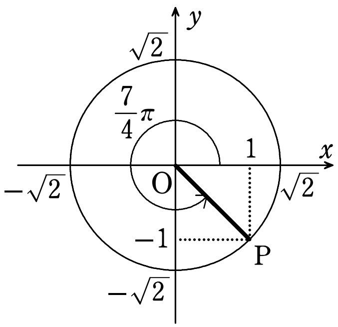
(1)　右の図で円の半径が $r=\sqrt{2}$ のとき，Pの座標は

$(1,\ -1)$

よって　$\sin\frac{7}{4}\pi=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos\frac{7}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\tan\frac{7}{4}\pi=\frac{-1}{1}=-1$



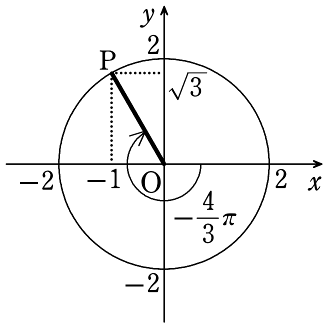
(2)　右の図で円の半径が $r=2$ のとき，Pの座標は

$(-1,\ \sqrt{3})$

よって　$\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$,

$\tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$



(3)　$\frac{23}{6}\pi=\frac{11}{6}\pi+2\pi$ であるから，$\frac{23}{6}\pi$ を表す動径と $\frac{11}{6}\pi$ を表す動径は一致する。

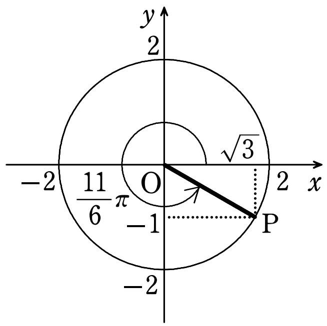
右の図で円の半径が $r=2$ のとき，Pの座標は

$(\sqrt{3},\ -1)$

よって　$\sin\frac{11}{6}\pi=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$,

$\cos\frac{11}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\frac{11}{6}\pi=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$



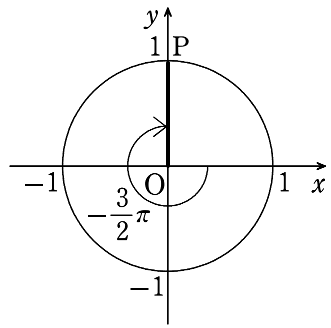
(4)　右の図で円の半径が $r=1$ のとき，Pの座標は

$(0,\ 1)$

よって　$\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{1}{1}=1$,

$\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{0}{1}=0$,

$\tan\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$ は定義されない



$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$\tan\theta<0$ であるから，θ の動径は第2象限または第4象限にある。

これと $\pi<\theta<2\pi$ の条件より，θ の動径は第4象限にあるから　$\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$

$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{5}$ であるから　$\cos\theta=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

(2)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

よって　$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{8}{9}}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\div\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times(-3)=-2\sqrt{2}$

$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\div\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times(-3)=2\sqrt{2}$

$\boxed{5}$

(解説)

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから　　$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$

(1)　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$ より，$\sin\theta-\cos\theta>0$ であるから

$$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{3}\quad\cdots\cdots①$$

(2)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

よって　　$\sin\theta+\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　$\cdots\cdots$②，$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　$\cdots\cdots$③　とする。

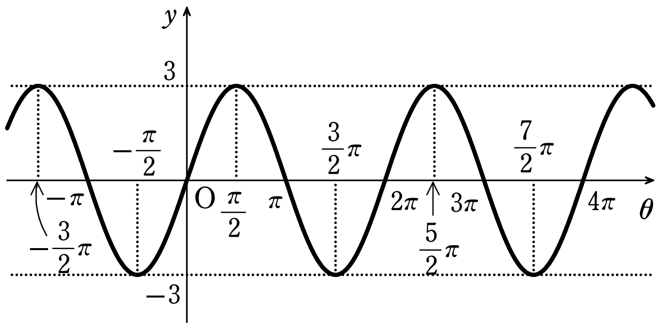
①，② を連立して解くと　　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$

①，③ を連立して解くと　　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$

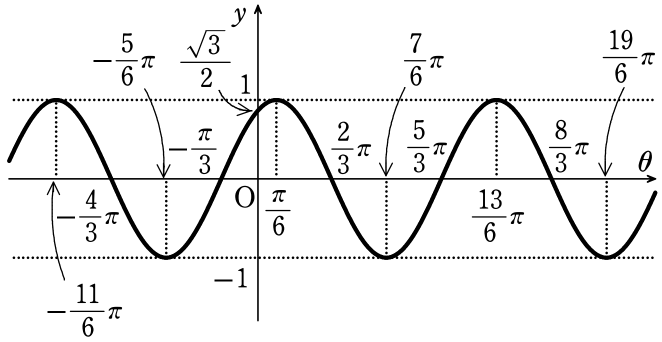
$\boxed{6}$

(解説)

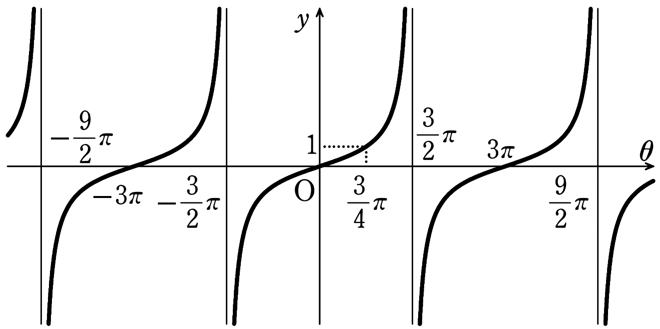
(1)　このグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ 3 倍に拡大したもので，[図] のようになる。周期は　　2π



(2)　このグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもので，[図] のようになる。周期は　　2π

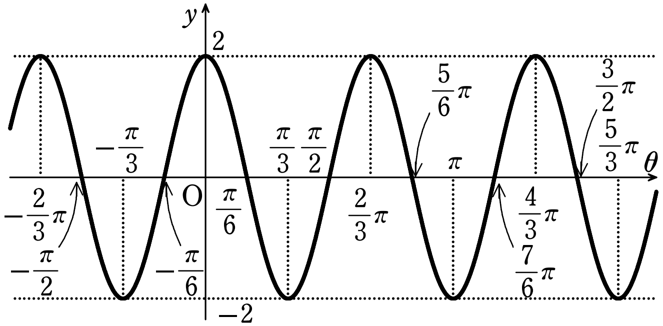


(3)　このグラフは，$y=\tan\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ 3 倍に拡大したもので，[図] のようになる。周期は　　$\pi\div\dfrac{1}{3}=3\pi$



(4)　このグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\dfrac{1}{3}$ 倍に縮小，θ 軸をもとにして y 軸方向に 2 倍に拡大したもので，[図] のようになる。

周期は　$2\pi \div 3 = \dfrac{2}{3}\pi$



$\boxed{7}$

(解説)

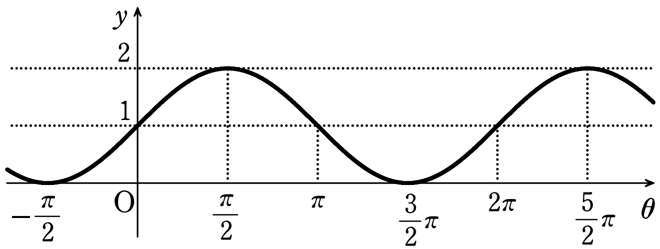
$$\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}\sin\left\{\frac{1}{2}\left(\theta-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$

よって，$y=\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向に $^{ア}2$ 倍に拡大し，θ 軸をもとにして y 軸方向に $^{イ}\dfrac{1}{3}$ 倍に縮小し，それを θ 軸方向に $^{ウ}\dfrac{2}{3}\pi$ だけ平行移動したものである。

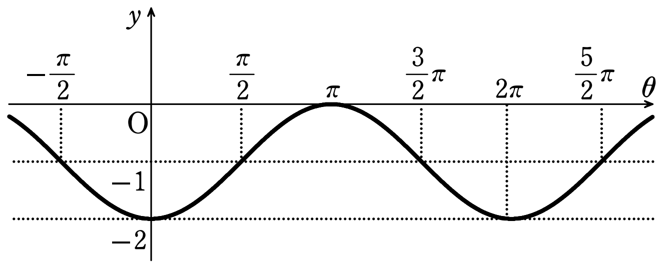
$\boxed{8}$

(解説)

(1)　このグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる。周期は　2π

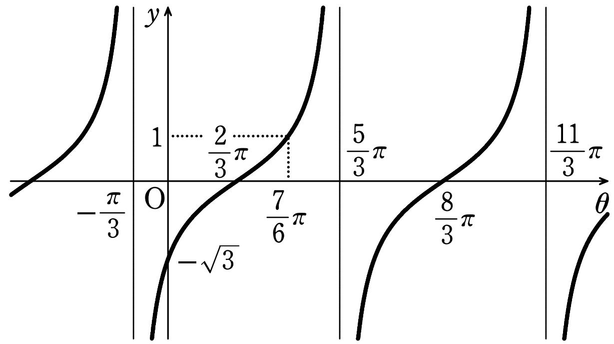


(2)　このグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを θ 軸に関して対称移動し，さらに y 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる。周期は　2π



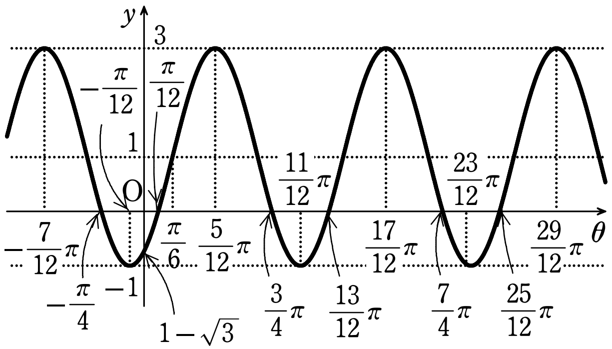
(3)　$\tan\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\dfrac{1}{2}\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)$

よって，$y=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\tan\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{2}{3}\pi$ だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる。　周期は　$\pi \div \dfrac{1}{2}=2\pi$



(4)　$2\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+1=2\sin2\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$

よって，$y=2\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$ のグラフは，$y=2\sin2\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる。周期は　$2\pi \div 2=\pi$



$\boxed{9}$

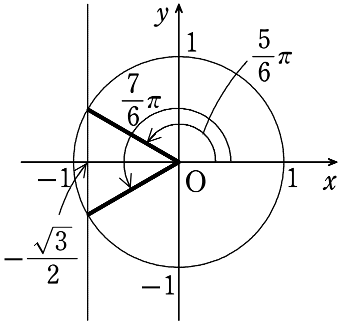
(解説)

単位円またはグラフを利用する。

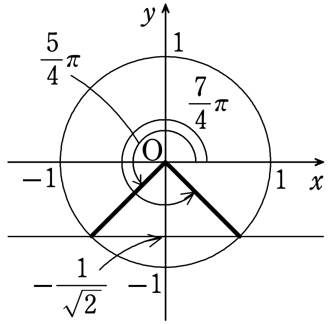
(1)　$2\cos\theta=-\sqrt{3}$ から　　$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　図から　　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi$

(2)　$\sqrt{2}\sin\theta+1=0$ から　　$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　　図から　　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

(1)



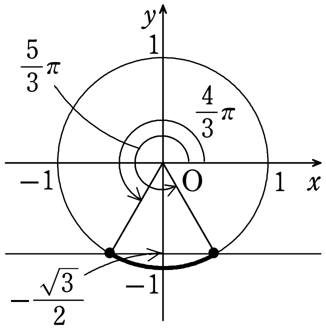
(2)

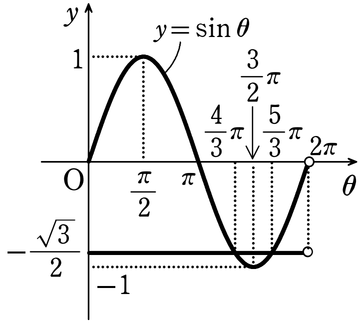


(3)　$2\sin\theta+\sqrt{3}\leqq 0$ から　　$\sin\theta\leqq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の解は　　$\theta=\dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$\dfrac{4}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

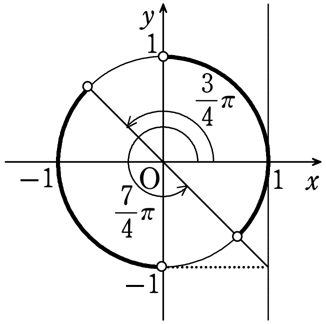


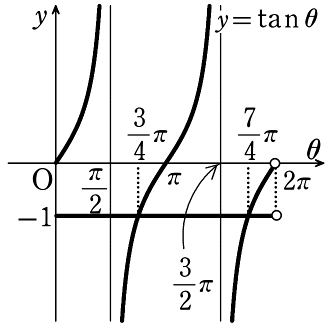


(4)　$\tan\theta+1>0$ から　　$\tan\theta>-1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\tan\theta=-1$ の解は　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

よって，不等式の解は，図から　　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$





$\boxed{10}$

(解説)

(1)　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　　$\sin t=-\dfrac{1}{2}$　$\cdots\cdots$ ①

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき　　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}<2\pi-\dfrac{\pi}{3}$　　　すなわち　　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{5}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　　$t=-\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$　　　すなわち　　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$

よって　　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{3}{2}\pi$

(2)　$2\theta+\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　　$\cos t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\cdots\cdots$ ①

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき　　$\dfrac{\pi}{3}\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{3}<2\cdot2\pi+\dfrac{\pi}{3}$　　　すなわち　　$\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{13}{3}\pi$

この範囲で，① を解くと　　$t=\dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi,\ \dfrac{23}{6}\pi,\ \dfrac{25}{6}\pi$

すなわち　　$2\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi,\ \dfrac{23}{6}\pi,\ \dfrac{25}{6}\pi$

よって　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi$

(3)　$\theta-\dfrac{\pi}{6}=t$ とおくと　　$\tan t>1$　$\cdots\cdots$ ①

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{6}<2\pi-\dfrac{\pi}{6}$

すなわち　　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{11}{6}\pi$　$\cdots\cdots$ ①

この範囲で，① を解くと　　$\dfrac{\pi}{4}<t<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi<t<\dfrac{3}{2}\pi$

すなわち　　$\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi<\theta-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{3}{2}\pi$

よって　　$\dfrac{5}{12}\pi<\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi<\theta<\dfrac{5}{3}\pi$

(4)　$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=t$ とおくと　　$\sin t\leqq-\dfrac{1}{2}$　$\cdots\cdots$ ①

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$\dfrac{\pi}{6}\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{6}<2\cdot2\pi+\dfrac{\pi}{6}$

すなわち　　$\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{25}{6}\pi$

この範囲で，① を解くと　　$\dfrac{7}{6}\pi\leqq t\leqq\dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{19}{6}\pi\leqq t\leqq\dfrac{23}{6}\pi$

すなわち　　$\dfrac{7}{6}\pi\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{19}{6}\pi\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{23}{6}\pi$

よって　　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{11}{6}\pi$