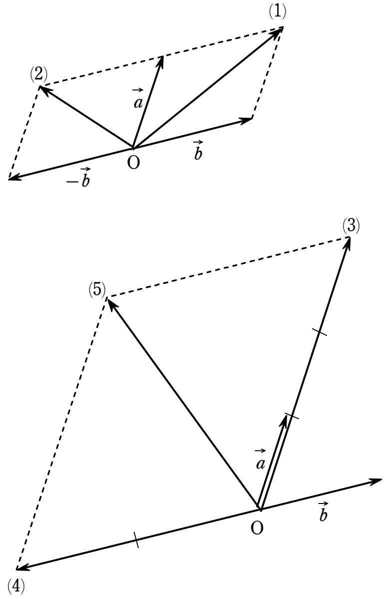
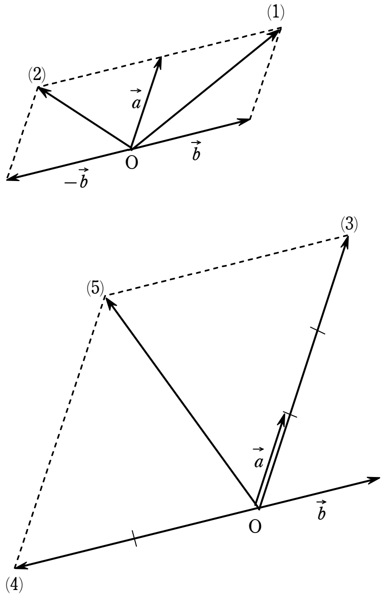
1

解答　(1)～(5)　［図］



解説

(1)～(5)　［図］



2

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　(左辺)$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}=$(右辺)

(2)　(左辺)$-$(右辺)$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}})=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+(\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{CC}}=\vec{0}$

よって　(左辺)=(右辺)

3

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2\vec{a}-\vec{b})-(5\vec{a}-4\vec{b})=3\vec{b}-3\vec{a}=3(\vec{b}-\vec{a})$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$

したがって　$\mathrm{PQ}/\!/\mathrm{AB}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(3\vec{a}-5\vec{b})-(\vec{a}-3\vec{b})=2(\vec{a}-\vec{b})$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-2\vec{b}-(\vec{a}-3\vec{b})=-(\vec{a}-\vec{b})$

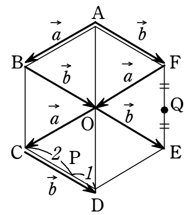
よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-2\overrightarrow{\mathrm{PR}}$

したがって，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

4

解答　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=-2\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}$

解説



$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=-\vec{b}+(-2\vec{a})$

$=-2\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{a}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$=\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

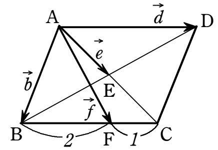
$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{EQ}}=2\vec{b}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EF}}$

$=2\vec{b}-\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}$

5

解答　$\vec{b}=-4\vec{e}+3\vec{f}$，$\vec{d}=6\vec{e}-3\vec{f}$

解説



$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

よって　$2\vec{e}=\vec{b}+\vec{d}$　……①

$3\vec{f}=3\vec{b}+2\vec{d}$　……②

②−①×2 から　$\vec{b}=-4\vec{e}+3\vec{f}$

①×3−② から　$\vec{d}=6\vec{e}-3\vec{f}$

6

解答　(1)　①　$(3,\ -6)$，$3\sqrt{5}$　　②　$(-2,\ 0)$，2　　③　$(11,\ -10)$，$\sqrt{221}$

(2)　①　$(2,\ 3)$，$\sqrt{13}$　　②　$(8,\ -6)$，10

解説

(1)　①　$3\vec{a}=3(1,\ -2)=(3,\ -6)$

$|3\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$

②　$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ -2)+(-3,\ 2)=(1-3,\ -2+2)=(-2,\ 0)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$

③　$2\vec{a}-3\vec{b}=2(1,\ -2)-3(-3,\ 2)=(2,\ -4)-(-9,\ 6)$

$=(2-(-9),\ -4-6)=(11,\ -10)$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{11^2+(-10)^2}=\sqrt{221}$

(2)　①　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

②　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(5-(-3),\ -2-4)=(8,\ -6)$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{100}=10$

7

解答　(1)　$\left(\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$　　(2)　$(-6,\ 8)$

解説

(1)　$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$

よって　$\vec{e}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{5}(3,\ -4)=\left(\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$

(2)　$\vec{b}=-10\vec{e}=-10\left(\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)=(-6,\ 8)$

8

解答　$\vec{c}=\dfrac{5}{4}\vec{a}-\dfrac{3}{4}\vec{b}$

解説

$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと　$(3,\ 7)=s(3,\ 5)+t(1,\ -1)$

$=(3s+t,\ 5s-t)$

よって　$3s+t=3$，$5s-t=7$　　これを解いて　$s=\dfrac{5}{4}$，$t=-\dfrac{3}{4}$

したがって　$\vec{c}=\dfrac{5}{4}\vec{a}-\dfrac{3}{4}\vec{b}$

9

解答　(1)　$t=6$　　(2)　$t=1$ で最小値 $\sqrt{13}$

解説

$\vec{p}+t\vec{q}=(5,\ 1)+t(-3,\ 2)=(5-3t,\ 1+2t)$

(1)　$\vec{p}+t\vec{q}\neq\vec{0}$，$\vec{r}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{p}+t\vec{q}$ と $\vec{r}$ が平行になるための必要十分条件は，

$\vec{p}+t\vec{q}=k\vec{r}$ となる実数 k が存在することである。

よって　$(5-3t,\ 1+2t)=k(1,\ -1)$

ゆえに　$5-3t=k$ ……①，　$1+2t=-k$ ……②

①，②から k を消去して　$1+2t=-(5-3t)$　　これを解いて　$t=6$

このとき，①から $k=-13$ (実数) となり，適する。

したがって，求める t の値は　$t=6$

(2)　$|\vec{p}+t\vec{q}|^2=(5-3t)^2+(1+2t)^2=13t^2-26t+26$

$=13(t^2-2t)+26=13(t-1)^2+13$

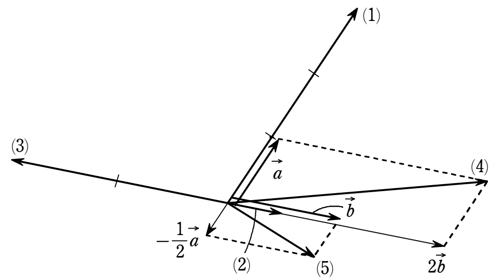
よって，$|\vec{p}+t\vec{q}|^2$ は $t=1$ で最小値 13 をとる。

$|\vec{p}+t\vec{q}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{p}+t\vec{q}|$ も最小となる。

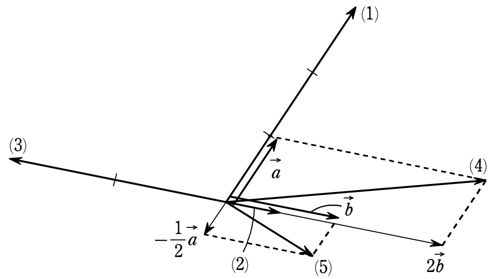
したがって，$|\vec{p}+t\vec{q}|$ は $t=1$ で最小値 $\sqrt{13}$ をとる。

1

解答



解説



2

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　左辺$=\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$

右辺$=\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$

よって　　左辺＝右辺

別解　左辺－右辺$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

よって　　左辺＝右辺

(2)　左辺$=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$

右辺$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})+\overrightarrow{AF}$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$

よって　　左辺＝右辺

別解　左辺－右辺$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{EF})-(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AF})$

$=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF})+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{EC})$

$=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FF}=\vec{0}$

よって　　左辺＝右辺

3

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(2\vec{a}+\vec{b})-(6\vec{a}-3\vec{b})$

$=-4\vec{a}+4\vec{b}=4(\vec{b}-\vec{a})$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$

よって　$\overrightarrow{PQ}=4\overrightarrow{AB}$

ゆえに　$\overrightarrow{PQ}/\!/\overrightarrow{AB}$

(2)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

$=(3\vec{u}-5\vec{v})-(\vec{u}-3\vec{v})=2(\vec{u}-\vec{v})$ ……①

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$

$=-2\vec{v}-(\vec{u}-3\vec{v})=-(\vec{u}-\vec{v})$　　……②

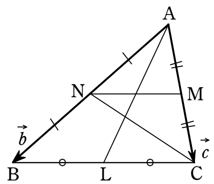
①，②から　　$\overrightarrow{PQ}=-2\overrightarrow{PR}$

したがって，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

4

解答　(1)　$\vec{c}-\vec{b}$　　(2)　$\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　(3)　$\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$　　(4)　$\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

解説



(1)　$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{c}-\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\vec{b}+\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

(4)　$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

5

解答　$\vec{a}=\vec{u}-\vec{v}$，$\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$

解説

対角線 AD，BE，CF の交点を O とすると　$\vec{u}=\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+\vec{b}$ であるから　$\vec{u}=2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$

また　$\vec{v}=\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$

よって　$2\vec{a}+2\vec{b}=\vec{u}$ ……①，　$\vec{a}+2\vec{b}=\vec{v}$ ……②

①－②から　　$\vec{a}=\vec{u}-\vec{v}$

①－②×2 から　$-2\vec{b}=\vec{u}-2\vec{v}$　　　よって　$\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$

6

解答　(1)　①　(3，9)，$3\sqrt{10}$　　②　(−3，2)，$\sqrt{13}$　　③　(15，1)，$\sqrt{226}$

④　(11，−22)，$11\sqrt{5}$

(2)　①　(12，5)，13　　②　(10，5)，$5\sqrt{5}$　　③　(−8，−1)，$\sqrt{65}$

④　(−2，0)，2

解説

(1)　①　$3\vec{a}=3(1,\ 3)=(3,\ 9)$

$|3\vec{a}|=\sqrt{3^2+9^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

② $-\vec{b}=-(3,\ -2)=(-3,\ 2)$

$|-\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

③ $3\vec{a}+4\vec{b}=3(1,\ 3)+4(3,\ -2)=(3,\ 9)+(12,\ -8)$

$=(3+12,\ 9-8)=(15,\ 1)$

$|3\vec{a}+4\vec{b}|=\sqrt{15^2+1^2}=\sqrt{226}$

④ $5\vec{b}-4\vec{a}=5(3,\ -2)-4(1,\ 3)=(15,\ -10)-(4,\ 12)$

$=(15-4,\ -10-12)=(11,\ -22)$

$|5\vec{b}-4\vec{a}|=\sqrt{11^2+(-22)^2}=11\sqrt{5}$

(2) ① $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(12,\ 5)$

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{12^2+5^2}=13$

② $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(12-2,\ 5-0)=(10,\ 5)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$

③ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(4-12,\ 4-5)=(-8,\ -1)$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{(-8)^2+(-1)^2}=\sqrt{65}$

④ $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(0-2,\ 0-0)=(-2,\ 0)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$

7

解答　(1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$　(2) $(-4,\ 2\sqrt{5})$

解説

(1) $\vec{a}=(1,\ 2)$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(1,\ 2)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(2) $\vec{b}=(2,\ -\sqrt{5})$ と反対向きで，大きさが 6 のベクトルは

$$-\frac{6\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\frac{6}{\sqrt{2^2+(-\sqrt{5})^2}}(2,\ -\sqrt{5})=(-4,\ 2\sqrt{5})$$

8

解答　(1) $\vec{p}=2\vec{a}+5\vec{b}$　(2) $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$

解説

(1) $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$(1,\ -4)=s(-2,\ 3)+t(1,\ -2)=(-2s+t,\ 3s-2t)$

よって　$-2s+t=1,\ 3s-2t=-4$

これを解いて　$s=2,\ t=5$

したがって　$\vec{p}=2\vec{a}+5\vec{b}$

(2) $\vec{q}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと

$(0,\ -1)=s(-2,\ 3)+t(1,\ -2)$

$=(-2s+t,\ 3s-2t)$

よって　$-2s+t=0,\ 3s-2t=-1$

これを解いて　$s=1,\ t=2$

したがって　$\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$

9

解答　(1) $x=\dfrac{2}{3}$

(2) ① $t=-1\pm\sqrt{2}$　② $t=-1$ のとき最小値 $\sqrt{5}$

解説

(1) $\vec{a}+3\vec{b}=(x,\ -1)+3(2,\ -3)=(x+6,\ -1-9)=(x+6,\ -10)$

$\vec{b}-\vec{a}=(2,\ -3)-(x,\ -1)=(2-x,\ -3+1)=(2-x,\ -2)$

$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が平行になるとき，$\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$ （k は実数）と表されるから

$(x+6,\ -10)=k(2-x,\ -2)$

よって　$x+6=k(2-x)$ ……①，　$-10=-2k$ ……②

② から　$k=5$　　これを ① に代入して　$x+6=5(2-x)$

したがって　$x=\dfrac{2}{3}$

(2) ① $\vec{c}=(3,\ 1)+t(1,\ 2)=(3+t,\ 1+2t)$

よって　$|\vec{c}|^2=(3+t)^2+(1+2t)^2=5t^2+10t+10$

$|\vec{c}|=\sqrt{15}$　すなわち　$|\vec{c}|^2=15$ のとき　$5t^2+10t+10=15$

ゆえに　$t^2+2t-1=0$　　したがって　$t=-1\pm\sqrt{2}$

② ① から　$|\vec{c}|^2=5(t+1)^2+5$

よって，$t=-1$ のとき $|\vec{c}|^2$ は最小値 5 をとる。

$|\vec{c}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{c}|$ も最小になる。

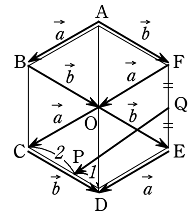
したがって，$|\vec{c}|$ は，$t=-1$ のとき最小値 $\sqrt{5}$ をとる。

1

解答　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=-\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=-\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\vec{a}+2\vec{b}$，

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

解説



$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{EO}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}=-\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$

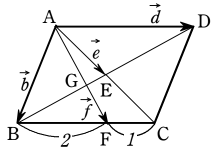
$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{QE}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

2

解答　(1) $\vec{b}=-4\vec{e}+3\vec{f}$，$\vec{d}=6\vec{e}-3\vec{f}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\dfrac{4}{5}(5\vec{e}-3\vec{f})$

解説



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

よって　$\vec{e}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$，$\vec{f}=\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{d}$

これを解いて　$\vec{b}=-4\vec{e}+3\vec{f}$，$\vec{d}=6\vec{e}-3\vec{f}$

(2) AD∥BC であるから　BG：DG＝BF：DA＝2：3

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\dfrac{2}{5}(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$

$=\dfrac{2}{5}\{(6\vec{e}-3\vec{f})-(-4\vec{e}+3\vec{f})\}$

$=\dfrac{4}{5}(5\vec{e}-3\vec{f})$

3

解答　$a=1-\sqrt{2}$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a-1,\ a)$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=(2,\ a+1)$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\neq\vec{0}$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ が平行であるための条件は

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=k\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ ……①

となる実数 k が存在することである。

① から　$(a-1,\ a)=k(2,\ a+1)$

よって　$a-1=2k$ ……②，　$a=k(a+1)$ ……③

② から　$k=\dfrac{a-1}{2}$ ……④

これを ③ に代入して　$a=\dfrac{a-1}{2}(a+1)$

整理すると　$a^2-2a-1=0$　　これを解くと　$a=1\pm\sqrt{2}$

$a<0$ から　　$a=1-\sqrt{2}$

このとき，④ から $k=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (実数) となり，適する。

したがって　　$a=1-\sqrt{2}$

別解　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a-1,\ a)$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=(2,\ a+1)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ が平行であるための条件は　　$(a-1)\cdot(a+1)-a\cdot 2=0$

整理すると　　$a^2-2a-1=0$　　　　これを解くと　　$a=1\pm\sqrt{2}$

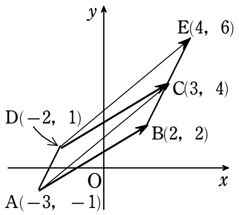
$a<0$ から　　$a=1-\sqrt{2}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$a=2,\ b=1$；$\sqrt{34}$，$\sqrt{5}$　　(2)　E $(4,\ 6)$，$7\sqrt{2}$

解説

(1)　四角形 ABCD が平行四辺形であるための必要十分条件は　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a+3,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(5,\ 4-b)$ であるから

$a+3=5$，　$3=4-b$

これを解いて　　$a=2,\ b=1$

平行四辺形 ABCD の隣り合う 2 辺の長さは

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1,\ 2)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

(2)　四角形 ACED が平行四辺形であるための必要十分条件は　　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(6,\ 5)$ であり，E $(x,\ y)$ とすると　　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=(x+2,\ y-1)$

よって　　$6=x+2$，　$5=y-1$　　　　ゆえに　　$x=4$，$y=6$

したがって　　E $(4,\ 6)$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(7,\ 7)$ であるから，対角線 AE の長さ $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$ は

$$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=7\sqrt{1^2+1^2}=7\sqrt{2}$$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　　(2)　$t=-1,\ -\dfrac{1}{5}$　　(3)　$t=-8$

解説

(1)　$\vec{a}+\vec{b}=(-3,\ 4)+(1,\ -2)=(-2,\ 2)$ であるから

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

よって，$\vec{a}+\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2\sqrt{2}}(-2,\ 2)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2)　$t\vec{a}+\vec{b}=t(1,\ 2)+(1,\ 1)=(t+1,\ 2t+1)$

$|t\vec{a}+\vec{b}|=1$ となるための条件は　　$|t\vec{a}+\vec{b}|^2=1$

よって　　$(t+1)^2+(2t+1)^2=1$　すなわち　$5t^2+6t+1=0$

ゆえに　　$(t+1)(5t+1)=0$　　　したがって　　$t=-1,\ -\dfrac{1}{5}$

(3)　$\vec{a}-\vec{c}=(-6,\ 4-t)$，$\vec{b}-\vec{c}=(6,\ -(t+5))$

$|\vec{a}-\vec{c}|=2|\vec{b}-\vec{c}|$ であるから　　$|\vec{a}-\vec{c}|^2=4|\vec{b}-\vec{c}|^2$

ゆえに　　$(-6)^2+(4-t)^2=4\{6^2+(t+5)^2\}$

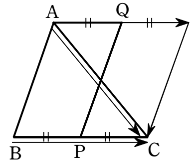
よって　　$t^2+16t+64=0$　　　ゆえに　　$(t+8)^2=0$

よって　　$t=-8$

$\boxed{1}$

解答　平行四辺形

解説



$2\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から　　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　……①

$2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から　　$2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって　　$2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　……②

①，② から　　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

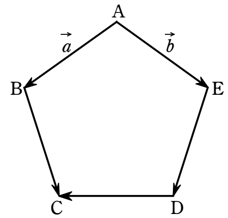
よって　　BP∥AQ，BP＝AQ

したがって，四角形 ABPQ は平行四辺形である。

$\boxed{2}$

(1)　△ABC において，辺 BC 上に点 D を，辺 AC 上に点 E をとり，BD：DC＝1：2，AE：EC＝1：2 とする。BE と AD の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

(2)　正五角形 ABCDE において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{b}$ とおくとき，3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。ただし，必要ならば $\cos 36^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ を用いてもよい。

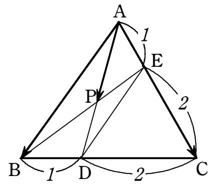


解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\vec{a}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{b}$

解説

(1)　BD：DC＝AE：EC であるから　　AB∥ED



よって　　BP：PE＝AB：DE＝AC：EC＝3：2

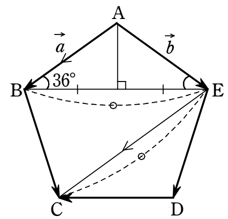
ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{BE}}$　……①

ここで　　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

これを ① に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

(2)　正五角形 ABCDE において，



∠BAE＝108° であるから

∠ABE＝∠AEB＝(180°−108°)÷2＝36°

よって，AB＝a とすると

$$\mathrm{BE}=2a\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$$

ゆえに　　AB：BE＝$1:\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

AB∥EC であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=\vec{b}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{a}-\vec{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{a}+\vec{b}$$

また，CD：BE＝1：$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ から　$\mathrm{CD}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\mathrm{BE}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathrm{BE}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EB}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$

更に　$\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

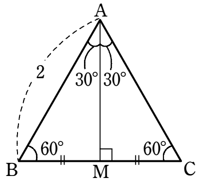
$$=\vec{a}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{b}-\vec{b}=\vec{a}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{b}$$

1

解答　(1)　3　　(2)　2　　(3)　-2　　(4)　0

解説

$|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ のなす角は　30°

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AM}}|\cos 30^\circ$

$$=2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角は　90°

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos 90^\circ=0$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角は　60°

よって　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos 60^\circ=2\times2\times\frac{1}{2}=2$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ のなす角は　$180^\circ-60^\circ=120^\circ$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\cos 120^\circ=2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

2

解答　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\sqrt{3}$，$\theta=150^\circ$

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times(-1)+1\times(-\sqrt{3})=-2\sqrt{3}$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

よって　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\cdot2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=150^\circ$

3

解答　$\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

解説

$\vec{e}=(x,\ y)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　すなわち　$x-\sqrt{3}\,y=0$

よって　$x=\sqrt{3}\,y$　……①

また，$|\vec{e}|^2=1^2$ から　$x^2+y^2=1$　……②

① と ② から　$y^2=\frac{1}{4}$　したがって　$y=\pm\frac{1}{2}$

① から，$y=\frac{1}{2}$　のとき　$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y=-\frac{1}{2}$ のとき　$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

4

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　(左辺)$=(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}-(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{c}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-(2\vec{b})\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{c}+(2\vec{b})\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{c}$

$=|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}=$(右辺)

(2)　(右辺)$=(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b})+3(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=(3\vec{a})\cdot(3\vec{a})+(3\vec{a})\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot(3\vec{a})+\vec{b}\cdot\vec{b}+3(\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a})$

$=9|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+3(|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2)$

$=12|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2=$(左辺)

5

解答　(1)　$\sqrt{23}$　　(2)　$\sqrt{7}$

解説

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=3^2+2(-1)+4^2=23$

$|\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{23}$

(2)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ であるから　$1^2=2^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

ここで　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ であるから

$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4\times2^2-12\times3+9\times(\sqrt{3})^2=7$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{7}$

6

解答　(ア)　$-\frac{3}{5}$　　(イ)　$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

解説

△ABC は半径 1 の円 O に内接するから　$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$

$5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ であるから　$5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-4\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

よって　$|5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|-4\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$

ここで　$|5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=25|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+30\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+9|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=30\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+34$

$|-4\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=16|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=16$

よって　$30\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+34=16$　　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}={}^{ア}-\frac{3}{5}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

$$=1-2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+1=\frac{16}{5}$$

したがって，辺 AB の長さは　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|={}^{イ}\frac{4\sqrt{5}}{5}$

7

解答　24

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ -10)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(4,\ -4)$ であるから

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-2)^2+(-10)^2}=2\sqrt{26}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times4+(-10)\times(-4)=32$

よって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{26})^2\times(4\sqrt{2})^2-32^2}=24$

別解　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|(-2)\times(-4)-(-10)\times4|=24$

$\boxed{1}$

解答　(1) 12　(2) 0　(3) -4　(4) -12

解説

$AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos30^\circ=2\sqrt{3}\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12$

(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos90^\circ=0$

(3) $\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{CA}$ のなす角は $180^\circ-60^\circ=120^\circ$ であるから

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|\cos120^\circ=2\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$

(4) $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BA}$ のなす角は $180^\circ-30^\circ=150^\circ$ であるから

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BA}|\cos150^\circ=4\times2\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-12$

$\boxed{2}$

解答　(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\theta=60^\circ$　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-5$，$\theta=135^\circ$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times(\sqrt{3}-1)+1\times(\sqrt{3}+1)=2$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=60^\circ$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1+2\times(-3)=-5$

また　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=135^\circ$

$\boxed{3}$

解答　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

解説

求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y)$ とする。

$|\vec{e}|=1$ であるから　$|\vec{e}|^2=1$　よって　$x^2+y^2=1$ ……①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$(-1)\times x+\sqrt{3}\times y=0$　よって　$x=\sqrt{3}\,y$ ……②

これを①に代入して　$(\sqrt{3}\,y)^2+y^2=1$

ゆえに　$y^2=\dfrac{1}{4}$　よって　$y=\pm\dfrac{1}{2}$

②から　$y=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$y=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，$\vec{a}$ に垂直な単位ベクトルは　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$\boxed{4}$

解答　(1) 略　(2) 略

解説

(1) $(\text{左辺})=\vec{p}\cdot(\vec{p}+2\vec{b})-\vec{a}\cdot(\vec{p}+2\vec{b})$

$=\vec{p}\cdot\vec{p}+2\vec{b}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{p}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{p}|^2-(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{p}-2\vec{a}\cdot\vec{b}=(\text{右辺})$

よって，等式は成り立つ。

(2) $(\text{左辺})=(\vec{a}-6\vec{b})\cdot(\vec{a}-6\vec{b})+(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$

$=(|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+36|\vec{b}|^2)+(4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2)$

$=5|\vec{a}|^2+45|\vec{b}|^2=5(|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2)=(\text{右辺})$

よって，等式は成り立つ。

$\boxed{5}$

解答　(1) $3\sqrt{7}$　(2) $\sqrt{37}$

解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ=2\times3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-3$

よって　$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9\times2^2-6\times(-3)+3^2=63$

$|3\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|3\vec{a}-\vec{b}|=3\sqrt{7}$

(2) $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=2$ であるから　$2^2=2^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times1^2$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

ゆえに　$|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\times2^2+12\times1+9\times1^2=37$

$|2\vec{a}+3\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{37}$

$\boxed{6}$

解答　(1) $-\dfrac{3}{2}$　(2) $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

解説

(1) 条件から　$|\overrightarrow{OA}|=2$，$|\overrightarrow{OB}|=1$，$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{2}$ ……①

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ から　$\overrightarrow{OC}=-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

よって　$|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2$

ゆえに　$|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$

①を代入して　$(\sqrt{2})^2=2^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+1^2$

よって　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{3}{2}$

(2) $\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2\times1^2-\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

参考　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めた後に，次のようにして $\triangle OAB$ の面積を求めることもできる。

$\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{2\times1}=-\dfrac{3}{4}$

$\sin\angle AOB>0$ であるから

$\sin\angle AOB=\sqrt{1-\cos^2\angle AOB}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

よって　$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}OA\times OB\sin\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times2\times1\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　5　(2)　$\dfrac{19}{2}$

解説

(1)　$S=\dfrac{1}{2}|3\cdot4-1\cdot2|=\dfrac{1}{2}\cdot10=5$

(2)　3点A$(-2,\ 1)$，B$(3,\ 0)$，C$(2,\ 4)$を，点Bが原点Oにくるように平行移動するとき，A，CがそれぞれA'，C'に移るとすると，$A'(-5,\ 1)$，$C'(-1,\ 4)$となる。
このとき，$S=\triangle A'OC'$であるから

$$S=\frac{1}{2}|(-5)\cdot4-1\cdot(-1)|=\frac{19}{2}$$

$\boxed{1}$

解答　$\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right),\left(\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

解説

求める単位ベクトルを$\vec{e}=(x,\ y)$とすると　$x^2+y^2=1$ ……①

また，$\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}||\vec{e}|\cos60^\circ$から　$x-y=\sqrt{2}\times1\times\dfrac{1}{2}$　よって　$x-y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……②

①, ②からxを消去して　$y^2+\sqrt{2}\,y+\dfrac{1}{2}+y^2=1$　すなわち　$2y^2+\sqrt{2}\,y-\dfrac{1}{2}=0$

これを解いて　$y=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{4}$

$y=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$のとき，②から　$x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$y=\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$のとき，②から　$x=\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ゆえに　$\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$または$\left(\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

$\boxed{2}$

解答　$t=-1$

解説

$|\vec{a}+\vec{b}|=2$から　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=4$　よって　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2$を代入して　$2^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=4$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$

$\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{a}+t\vec{b}$が垂直になるから　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0$

よって　$|\vec{a}|^2+(t+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-2$を代入して　$2^2+(t+1)\times(-2)+t\times2^2=0$

ゆえに　$2t+2=0$　したがって　$t=-1$

$\boxed{3}$

解答　$t=-\dfrac{2}{5}$で最小値$2\sqrt{3}$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{21}$から　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=21$　よって　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=21$

$|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=5$を代入して　$4^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2=21$　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=10$

したがって　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=4^2+2t\times10+t^2\times5^2$

$$=25t^2+20t+16=25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+12$$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$は$t=-\dfrac{2}{5}$で最小値12をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$であるから，このとき$|\vec{a}+t\vec{b}|$も最小になる。

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$は$t=-\dfrac{2}{5}$で最小値$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$をとる。

$\boxed{4}$

解答　略

解説

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$とすると

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{c}$　　$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{c}$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$から　$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{0}$

これと$|\vec{a}|=3,\ |\vec{c}|=2$から

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OE}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)=\frac{1}{3}|\vec{a}|^2-\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{3}{4}|\vec{c}|^2$$

$$=\frac{1}{3}\times3^2-\frac{3}{4}\times0-\frac{3}{4}\times2^2=0$$

$\overrightarrow{CD}\neq\vec{0},\ \overrightarrow{OE}\neq\vec{0}$であるから　$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{OE}$　したがって　$CD\perp OE$

$\boxed{5}$

解答　(1)　証明は略，等号成立は$\vec{a}=\vec{0}$または$\vec{b}=\vec{0}$または$\vec{a}$と$\vec{b}$の向きが同じとき
(2)　略

解説

(1)　[1]　$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$のとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角を$\theta$とすると

$$(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2-(|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$$
$$=2(|\vec{a}||\vec{b}|-\vec{a}\cdot\vec{b})=2(|\vec{a}||\vec{b}|-|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)$$
$$=2|\vec{a}||\vec{b}|(1-\cos\theta)$$

$|\vec{a}|>0,\ |\vec{b}|>0,\ 1-\cos\theta\geqq0$であるから　$2|\vec{a}||\vec{b}|(1-\cos\theta)\geqq0$

すなわち　$(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2\geqq0$

よって　$|\vec{a}+\vec{b}|^2\leqq(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$

$|\vec{a}|+|\vec{b}|>0,\ |\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$であるから　$|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$

等号が成り立つのは$1-\cos\theta=0$すなわち$\cos\theta=1$のときである。

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$であるから，$\cos\theta=1$より　$\theta=0^\circ$

このとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$の向きは同じである。

[2]　$\vec{a}=\vec{0}$のとき　$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{b}|,\ |\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{b}|$

よって　$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

[3]　$\vec{b}=\vec{0}$のとき　$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|,\ |\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}|$

よって　$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

以上から，$|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$が成り立つ。

等号が成り立つのは，$\vec{a}=\vec{0}$または$\vec{b}=\vec{0}$または$\vec{a}$と$\vec{b}$の向きが同じときである。

(2)　(1)の不等式から　$|3\vec{a}+4\vec{b}|\leqq|3\vec{a}|+|4\vec{b}|$

したがって　$|3\vec{a}+4\vec{b}|\leqq3|\vec{a}|+4|\vec{b}|$

1

解答　(1) $|\vec{a}|=\sqrt{7}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$　(2) $k\leqq-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{7}}{2}\leqq k$

解説

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{p}|^2=4^2$ から　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16$ ……①

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{q}|^2=2^2$ から　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$ ……②

①−② から　$4\vec{a}\cdot\vec{b}=12$　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

①+② から　$2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2=20$　ゆえに　$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=10$ ……③

また　$\vec{p}\cdot\vec{q}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$，

$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos 60^\circ=4\times2\times\dfrac{1}{2}=4$

よって　$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=4$ ……④

③，④ から　$|\vec{a}|^2=7$，$|\vec{b}|^2=3$

$|\vec{a}|\geqq0$，$|\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|\vec{a}|=\sqrt{7}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$

(2) $|t\vec{a}+k\vec{b}|\geqq|\vec{b}|$ は $|t\vec{a}+k\vec{b}|^2\geqq|\vec{b}|^2$ ……① と同値である。

① を変形すると　$t^2|\vec{a}|^2+2kt\vec{a}\cdot\vec{b}+(k^2-1)|\vec{b}|^2\geqq0$

(1) から　$7t^2+6kt+3(k^2-1)\geqq0$ ……②

求める条件は，すべての実数 t に対して ② が成り立つための条件であり，t の２次方程式 $7t^2+6kt+3(k^2-1)=0$ の判別式を D とすると，t^2 の係数が正であるから

$D\leqq0$　ゆえに　$\dfrac{D}{4}=(3k)^2-7\times3(k^2-1)\leqq0$

よって　$4k^2-7\geqq0$　ゆえに　$\left(k+\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(k-\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)\geqq0$

したがって　$k\leqq-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{7}}{2}\leqq k$

2

解答　(1) $\sqrt{k^2+4}$　(2) $k=-4+2\sqrt{3}$

解説

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交するから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

また，$\vec{c}+\vec{d}=2\vec{a}+k\vec{b}$ であるから

$|\vec{c}+\vec{d}|^2=|2\vec{a}+k\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2|\vec{b}|^2=k^2+4$

$|\vec{c}+\vec{d}|\geqq0$ であるから　$|\vec{c}+\vec{d}|=\sqrt{k^2+4}$

(2) $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{c}+\vec{d}$ のなす角が 60° であるとき

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{c}+\vec{d}|\cos60^\circ$ ……①

ここで　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+k\vec{b})$

$=2|\vec{a}|^2+(k+2)\vec{a}\cdot\vec{b}+k|\vec{b}|^2$

$=k+2$

また　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2$

$|\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2}$

ゆえに，① から　$k+2=\sqrt{2}\times\sqrt{k^2+4}\times\dfrac{1}{2}$

すなわち　$\sqrt{2}(k+2)=\sqrt{k^2+4}$ ……②

右辺の $\sqrt{k^2+4}$ は正であるから　$k+2>0$　よって　$k>-2$ ……③

このとき，② の両辺を２乗して整理すると　$k^2+8k+4=0$

これを解くと　$k=-4\pm2\sqrt{3}$

このうち，③ を満たすのは　$k=-4+2\sqrt{3}$

3

解答　(1) $\theta=120^\circ$　(2) $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解説

(1) $(\vec{a}+2\vec{b})\perp(\vec{a}-2\vec{b})$ であるから　$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$

よって　$|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|>0$，$|\vec{b}|>0$ であるから　$|\vec{a}|=2|\vec{b}|$ ……①

また，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2|\vec{b}|$ から　$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=4|\vec{b}|^2$

よって　$|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=4|\vec{b}|^2$　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2$ ……②

よって　$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-\dfrac{1}{4}|\vec{a}|^2$　① を代入して　$2|\vec{b}|^2\cos\theta=-|\vec{b}|^2$

$|\vec{b}|>0$ であるから　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

(2) $|\vec{a}|=1$ のとき，①，② から　$|\vec{b}|=\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{4}$

よって　$\left|t\vec{a}+\dfrac{1}{t}\vec{b}\right|^2=t^2|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{t^2}|\vec{b}|^2$

$=t^2\times1^2+2\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(t^2+\dfrac{1}{4t^2}\right)-\dfrac{1}{2}$

$\geqq2\sqrt{t^2\times\dfrac{1}{4t^2}}-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$t>0$ であるから，$\left|t\vec{a}+\dfrac{1}{t}\vec{b}\right|^2$ は $t^2=\dfrac{1}{4t^2}$ すなわち $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

$\left|t\vec{a}+\dfrac{1}{t}\vec{b}\right|\geqq0$ であるから，このとき $\left|t\vec{a}+\dfrac{1}{t}\vec{b}\right|$ も最小となる。

ゆえに，$\left|t\vec{a}+\dfrac{1}{t}\vec{b}\right|$ は $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をとる。

4

解答　$\theta=30^\circ$，150°

解説

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp(\vec{a}+3t\vec{b})$ であるから　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+3t\vec{b})=0$

よって　$3|\vec{b}|^2t^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}t+|\vec{a}|^2=0$ ……①

$|\vec{b}|\neq0$ であるから，$(\vec{a}+t\vec{b})\perp(\vec{a}+3t\vec{b})$ であるような実数 t がただ１つ存在するための条件は，t についての２次方程式 ① の判別式を D とすると　$D=0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(2\vec{a}\cdot\vec{b})^2-3|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(4\cos^2\theta-3)$

よって，$D=0$ から　$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(4\cos^2\theta-3)=0$

$|\vec{a}|\neq0$，$|\vec{b}|\neq0$ であるから，$\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$ より　$\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=30^\circ$，150°

1

解答　(1) $\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$　(2) $\dfrac{3}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

解説

(1) $\dfrac{3\vec{a}+\vec{b}}{1+3}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$

(2) $\dfrac{-3\vec{a}+\vec{b}}{1-3}=\dfrac{3}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

2

解答　(1) 辺 BC を 3：4 に内分する点を D とすると，線分 AD を 7：5 に内分する点

(2) 5：4：3

解説

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{p}$ とする。

等式から　$5\overrightarrow{AP}+4(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

よって　$5\vec{p}+4(\vec{p}-\vec{b})+3(\vec{p}-\vec{c})=\vec{0}$

ゆえに　$\vec{p}=\dfrac{4\vec{b}+3\vec{c}}{12}=\dfrac{7}{12}\times\dfrac{4\vec{b}+3\vec{c}}{7}=\dfrac{7}{12}\times\dfrac{4\vec{b}+3\vec{c}}{3+4}$

したがって，辺 BC を 3：4 に内分する点を D とすると，
点 P は線分 AD を 7：5 に内分する点である。

(2) △ABC の面積を S とすると

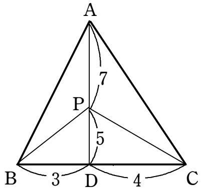
△PBC$=\dfrac{5}{12}S$

△PCA$=\dfrac{7}{12}$△ADC$=\dfrac{7}{12}\times\dfrac{4}{7}S=\dfrac{1}{3}S$

△PAB$=\dfrac{7}{12}$△ABD$=\dfrac{7}{12}\times\dfrac{3}{7}S=\dfrac{1}{4}S$

よって

△PBC：△PCA：△PAB$=\dfrac{5}{12}S：\dfrac{1}{3}S：\dfrac{1}{4}S=5：4：3$



3

解答　証明略，19：6

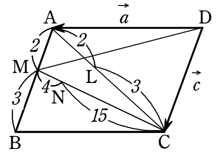
解説

$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とすると　$\overrightarrow{DL}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{c}}{5}$ ……①

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$ であるから

$\overrightarrow{DN}=\dfrac{15\overrightarrow{DM}+4\overrightarrow{DC}}{19}=\dfrac{15\left(\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{c}\right)+4\vec{c}}{19}$

$=\dfrac{15\vec{a}+10\vec{c}}{19}=\dfrac{5}{19}(3\vec{a}+2\vec{c})$ ……②



①，② から　$\overrightarrow{DN}=\dfrac{25}{19}\overrightarrow{DL}$

したがって，3 点 D，L，N は一直線上にあり，DL：LN=19：6

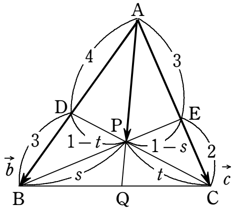
4

解答　(1) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{8}{23}\vec{b}+\dfrac{9}{23}\vec{c}$　(2) $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{8}{17}\vec{b}+\dfrac{9}{17}\vec{c}$

解説

(1)　BP：PE$=s:(1-s)$，CP：PD$=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$=(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}\quad\cdots\cdots ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{4}{7}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\quad\cdots\cdots ②$$



①，② から　$(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}=\frac{4}{7}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行でないから　$1-s=\frac{4}{7}t$，$\frac{3}{5}s=1-t$

よって　$7s+4t=7$，$3s+5t=5$　　これを解いて　$s=\frac{15}{23}$，$t=\frac{14}{23}$

$s=\frac{15}{23}$ を ① に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$（$k$ は実数）とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\left(\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}\right)=\frac{8}{23}k\vec{b}+\frac{9}{23}k\vec{c}\quad\cdots\cdots ③$$

BQ：QC$=u:(1-u)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-u)\vec{b}+u\vec{c}\quad\cdots\cdots ④$

③，④ から　$\frac{8}{23}k\vec{b}+\frac{9}{23}k\vec{c}=(1-u)\vec{b}+u\vec{c}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行でないから　$\frac{8}{23}k=1-u$，$\frac{9}{23}k=u$

これを解いて　$k=\frac{23}{17}$，$u=\frac{9}{17}$

$u=\frac{9}{17}$ を ④ に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{8}{17}\vec{b}+\frac{9}{17}\vec{c}$

参考 1　後の項目「ベクトル方程式」で次のことを学習する。

点 P$(\vec{p})$ が 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線上にある

$\iff$　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

このことを利用すると，③ から直ちに k の値を求めることができる。

(別解)　点 Q は辺 BC 上にあるから，③ より

$$\frac{8}{23}k+\frac{9}{23}k=1\qquad これを解いて\quad k=\frac{23}{17}$$

参考 2　(1) の $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求めるのにメネラウスの定理，(2) の $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を求めるのにチェバの定理を利用してもよい。

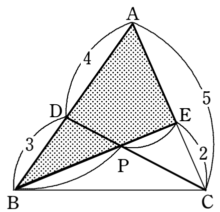
(1)　△ABE と直線 CD について，メネラウスの定理から

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1$$

すなわち　$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}=1$

よって，BP：PE$=15:8$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{8\overrightarrow{\mathrm{AB}}+15\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{15+8}=\frac{1}{23}\left(8\vec{b}+15\times\frac{3}{5}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}$$

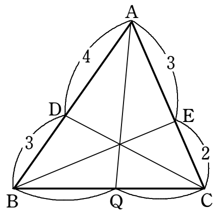


(2)　チェバの定理から　$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1$

すなわち　$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=1$

よって，BQ：QC$=9:8$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{8\overrightarrow{\mathrm{AB}}+9\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9+8}=\frac{8}{17}\vec{b}+\frac{9}{17}\vec{c}$$



5

解答　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{5}{24}\vec{a}+\frac{19}{144}\vec{b}$

解説

余弦定理から　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=5\cdot6\cdot\frac{1}{5}=6$

H は垂心であるから　OH⊥AB，AH⊥OB

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$（$s$，$t$ は実数）とする。

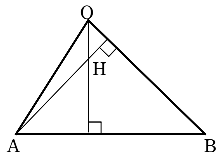
OH⊥AB より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

よって　$-s|\vec{a}|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

ゆえに　$-25s+6(s-t)+36t=0$

すなわち　$-19s+30t=0\quad\cdots\cdots ①$



また，AH⊥OB より $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ であるから

$$\{(s-1)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot\vec{b}=0$$

よって　$(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

ゆえに　$6(s-1)+36t=0$　　すなわち　$s+6t=1\quad\cdots\cdots ②$

①，② から　$s=\frac{5}{24}$，$t=\frac{19}{144}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{5}{24}\vec{a}+\frac{19}{144}\vec{b}$

6

解答　$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

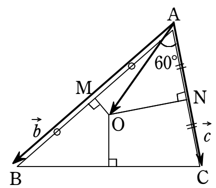
解説

条件から　$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3\times2\cos60^\circ=3$

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=s\vec{b}+t\vec{c}$（$s$，$t$ は実数）とおく。

辺 AB の中点を M とすると，点 O は △ABC の外心であるから　OM⊥AB　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{1}{2}\vec{b}-(s\vec{b}+t\vec{c})=\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{b}-t\vec{c}$$



であるから

$$\left\{\left(\frac{1}{2}-s\right)\vec{b}-t\vec{c}\right\}\cdot\vec{b}=0\qquad ゆえに\qquad \left(\frac{1}{2}-s\right)|\vec{b}|^2-t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

これに $|\vec{b}|=3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ を代入して整理すると　$6s+2t=3\quad\cdots\cdots ①$

辺 AC の中点を N とすると，点 O は △ABC の外心であるから　ON⊥AC

よって　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{1}{2}\vec{c}-(s\vec{b}+t\vec{c})=-s\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{c}$$

であるから

$$\left\{-s\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{c}\right\}\cdot\vec{c}=0\qquad ゆえに\qquad -s\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(\frac{1}{2}-t\right)|\vec{c}|^2=0$$

これに $\vec{b}\cdot\vec{c}=3$，$|\vec{c}|=2$ を代入して整理すると　$3s+4t=2\quad\cdots\cdots ②$

①，② を解いて　$s=\frac{4}{9}$，$t=\frac{1}{6}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

1

解答　(1) $\dfrac{5\vec{a}+2\vec{b}}{7}$　(2) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$　(3) $4\vec{a}-3\vec{b}$　(4) $\dfrac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}$

解説

(1) $\dfrac{5\vec{a}+2\vec{b}}{2+5}=\dfrac{5\vec{a}+2\vec{b}}{7}$　　(2) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

(3) $\dfrac{-4\vec{a}+3\vec{b}}{3-4}=4\vec{a}-3\vec{b}$　　(4) $\dfrac{-\vec{a}+3\vec{b}}{3-1}=\dfrac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}$

2

解答　(1) 辺 BC を 2：3 に内分する点を Q とすると，線分 AQ を 5：6 に内分する点
(2) 6：3：2

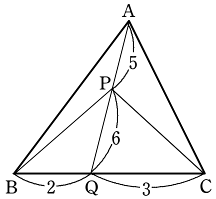
解説

(1) 与えられた等式から　$6\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

よって　$11\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

ゆえに　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{11}=\dfrac{5}{11}\times\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}$

$\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}=\overrightarrow{AQ}$ とおくと　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{11}\overrightarrow{AQ}$



よって　BQ：QC＝2：3，AP：PQ＝5：6
したがって，辺 BC を 2：3 に内分する点を Q とすると，点 P は線分 AQ を 5：6 に内分する点である。

(2) △PBQ：△PCQ＝BQ：QC＝2：3
よって，△PBQ＝$2S$ とすると　△PCQ＝$3S$
ゆえに　△PBC＝$2S+3S=5S$

△PCQ：△PCA＝6：5 であるから　△PCA＝$\dfrac{5}{6}\times3S=\dfrac{5}{2}S$

△PBQ：△PAB＝6：5 であるから　△PAB＝$\dfrac{5}{6}\times2S=\dfrac{5}{3}S$

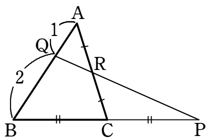
したがって　△PBC：△PCA：△PAB＝$5S:\dfrac{5}{2}S:\dfrac{5}{3}S=6:3:2$

3

解答　(1) 証明略，1：4　(2) 略

解説

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると



$\overrightarrow{AP}=\dfrac{-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$

$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\vec{b}$

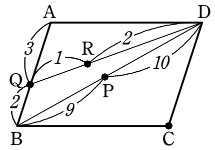
$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{2}\vec{c}-\dfrac{1}{3}\vec{b}=-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}=(-\vec{b}+2\vec{c})-\dfrac{1}{3}\vec{b}=-\dfrac{4}{3}\vec{b}+2\vec{c}=4\left(-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)$

ゆえに　$\overrightarrow{QP}=4\overrightarrow{QR}$
したがって，3点 P，Q，R は一直線上にある。
また　QR：QP＝1：4

(2) $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{d}$ とすると



$\overrightarrow{CP}=\dfrac{10\vec{b}+9\vec{d}}{19}$　……①

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BQ}=\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{d}$ であるから

$\overrightarrow{CR}=\dfrac{2\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{CD}}{3}=\dfrac{2\left(\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{d}\right)+\vec{d}}{3}$

$=\dfrac{10\vec{b}+9\vec{d}}{15}$　……②

①，②から　$\overrightarrow{CR}=\dfrac{19}{15}\overrightarrow{CP}$

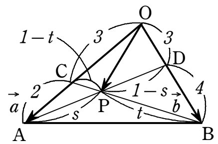
よって，3点 C，P，R は一直線上にある。

4

解答　(1) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{6}{13}\vec{a}+\dfrac{3}{13}\vec{b}$　(2) $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

解説

(1) AP：PD＝$s:(1-s)$，BP：PC＝$t:(1-t)$ とすると



$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{3}{7}s\vec{b}$,

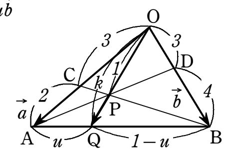
$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

よって　$(1-s)\vec{a}+\dfrac{3}{7}s\vec{b}=\dfrac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ であるから　$1-s=\dfrac{3}{5}t$，$\dfrac{3}{7}s=1-t$

これを解いて　$s=\dfrac{7}{13}$，$t=\dfrac{10}{13}$　　したがって　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{6}{13}\vec{a}+\dfrac{3}{13}\vec{b}$

(2) AQ：QB＝$u:(1-u)$ とすると　$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$
また，点 Q は直線 OP 上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$
(k は実数) とすると，(1) の結果から



$\overrightarrow{OQ}=k\left(\dfrac{6}{13}\vec{a}+\dfrac{3}{13}\vec{b}\right)=\dfrac{6}{13}k\vec{a}+\dfrac{3}{13}k\vec{b}$

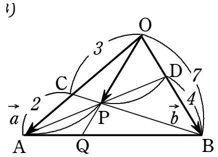
よって　$(1-u)\vec{a}+u\vec{b}=\dfrac{6}{13}k\vec{a}+\dfrac{3}{13}k\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ であるから　$1-u=\dfrac{6}{13}k$，$u=\dfrac{3}{13}k$

これを解いて　$k=\dfrac{13}{9}$，$u=\dfrac{1}{3}$　　したがって　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

別解　チェバ・メネラウスの定理の利用

(1) △OAD と直線 BC について，メネラウスの定理により



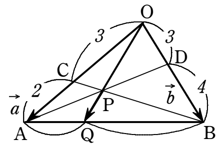
$\dfrac{OC}{CA}\cdot\dfrac{AP}{PD}\cdot\dfrac{DB}{BO}=1$　　よって　$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{AP}{PD}\cdot\dfrac{4}{7}=1$

ゆえに　$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{7}{6}$　　すなわち　AP：PD＝7：6

よって　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{6\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OD}}{7+6}=\dfrac{1}{13}\left(6\vec{a}+7\cdot\dfrac{3}{7}\vec{b}\right)$

$=\dfrac{6}{13}\vec{a}+\dfrac{3}{13}\vec{b}$

(2) △OAB において，チェバの定理により



$\dfrac{OC}{CA}\cdot\dfrac{AQ}{QB}\cdot\dfrac{BD}{DO}=1$　　よって　$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{AQ}{QB}\cdot\dfrac{4}{3}=1$

ゆえに　$\dfrac{AQ}{QB}=\dfrac{1}{2}$　　すなわち　AQ：QB＝1：2

よって　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

別解　直線のベクトル方程式の利用

(1) $\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{b}$ (x，y は実数) とする。

$\vec{b}=\dfrac{7}{3}\overrightarrow{OD}$ より　$\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\cdot\dfrac{7}{3}\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+\dfrac{7}{3}y\overrightarrow{OD}$

点 P は直線 AD 上にあるから　$x+\dfrac{7}{3}y=1$　……①

$\vec{a}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{OC}$ より　$\overrightarrow{OP}=x\cdot\dfrac{5}{3}\overrightarrow{OC}+y\vec{b}=\dfrac{5}{3}x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OB}$

点 P は直線 BC 上にあるから　$\dfrac{5}{3}x+y=1$　……②

①，②を解いて　$x=\dfrac{6}{13}$，$y=\dfrac{3}{13}$　　よって　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{6}{13}\vec{a}+\dfrac{3}{13}\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\dfrac{6}{13}k\vec{a}+\dfrac{3}{13}k\vec{b}$ (k は実数) とおくと，点 Q は直線 AB 上にあるから

$\dfrac{6}{13}k+\dfrac{3}{13}k=1$　　よって　$k=\dfrac{13}{9}$

ゆえに　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

5

解答　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=10$，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{35}\overrightarrow{OB}$

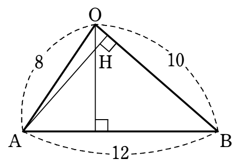
解説

$|\overrightarrow{AB}|=12$ から　$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=12$

両辺を 2 乗すると　$|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=144$

よって　$10^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+8^2=144$　　ゆえに　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=10$

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とおく。



$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ であるから　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$

すなわち

$s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-s|\overrightarrow{OA}|^2+t|\overrightarrow{OB}|^2-t\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

ゆえに　$10s-8^2s+10^2t-10t=0$

すなわち　$-3s+5t=0$　……①

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{OB}$ であるから　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　　よって　$(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}=0$

ゆえに　$(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}=0$

すなわち　$s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+t|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

ゆえに　$10s+10^2t-10=0$　　すなわち　$s+10t=1$　……②

①，②を解いて　$s=\dfrac{1}{7}$，$t=\dfrac{3}{35}$　　したがって　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{35}\overrightarrow{OB}$

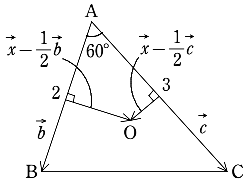
$\boxed{6}$

解答 $\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\vec{x}$ とする．$\vec{b}\neq\vec{0}, \vec{c}\neq\vec{0}, \vec{b}\not\parallel\vec{c}$ であるから

$\vec{x}=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$ と表される．



条件から $|\vec{b}|=2, |\vec{c}|=3, \vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=3$

外心 O は各辺の垂直二等分線の交点であるから

$\left(\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0, \left(\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=0$　よって

$\left\{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\vec{b}+\beta\vec{c}\right\}\cdot\vec{b}=0, \left\{\alpha\vec{b}+\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\vec{c}\right\}\cdot\vec{c}=0$

ゆえに　$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\cdot4+\beta\cdot3=0, \alpha\cdot3+\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\cdot9=0$ から

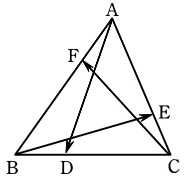
$4\alpha+3\beta=2, 3\alpha+9\beta=\frac{9}{2}$　　これを解いて　$\alpha=\frac{1}{6}, \beta=\frac{4}{9}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$

$\boxed{1}$

解答 (1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{3\vec{b}+\vec{c}}{1+3}=\frac{3\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{3}{4}\vec{c}-\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{c}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\frac{3\vec{b}+\vec{c}}{4}+\left(\frac{3}{4}\vec{c}-\vec{b}\right)+\left(\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{c}\right)$

$$=\frac{(3\vec{b}+\vec{c})+(3\vec{c}-4\vec{b})+(\vec{b}-4\vec{c})}{4}=\vec{0}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると，条件から

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2}{5}\vec{c}$$

線分 BE を 5：6 に内分する点を Q とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{6\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AE}}}{5+6}=\frac{1}{11}\left(6\vec{b}+5\times\frac{2}{5}\vec{c}\right)=\frac{2}{11}(3\vec{b}+\vec{c})$$

線分 CD を 9：2 に内分する点を R とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+9\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{9+2}=\frac{1}{11}\left(2\vec{c}+9\times\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\frac{2}{11}(3\vec{b}+\vec{c})$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}$

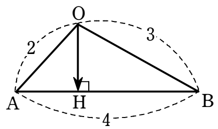
したがって，Q，R は同じ点である。

$\boxed{2}$

解答 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{21}{32}\vec{a}+\frac{11}{32}\vec{b}$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ $(0<t<1)$ とおける．



$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{b}-\vec{a}|=4$

ここで　$|\vec{b}-\vec{a}|^2=4^2$

すなわち　$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=16$

よって　$3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=16$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$$=-t\vec{a}\cdot\vec{a}+(1-t)\vec{b}\cdot\vec{b}+(2t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=-t|\vec{a}|^2+(1-t)|\vec{b}|^2+(2t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=-4t+9(1-t)-\frac{3}{2}(2t-1)$$

$$=\frac{21}{2}-16t$$

よって　$\frac{21}{2}-16t=0$

したがって　$t=\frac{21}{32}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{21}{32}\vec{a}+\frac{11}{32}\vec{b}$

別解　AH$=x$ とおくと　$2^2-x^2=3^2-(4-x)^2$

$$4-x^2=-7+8x-x^2$$

よって　$x=\frac{11}{8}$

したがって　AH：HB$=\frac{11}{8}:\left(4-\frac{11}{8}\right)=11:21$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{21}{32}\vec{a}+\frac{11}{32}\vec{b}$

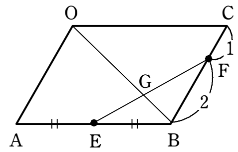
$\boxed{3}$

解答 (ア)　$-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　(イ)　$\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{5}{7}\vec{c}$

解説

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{a}$$



よって　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{a}\right)-\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$

$$={}^{ア}-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

G は線分 EF 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=k\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ となる実数 k がある。

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=-\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{c}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)+\left(-\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{c}\right)$

$$=\left(-\frac{2}{3}k+1\right)\vec{a}+\frac{1}{2}(k+1)\vec{c}\quad\cdots\cdots ①$$

また，G は線分 OB 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 l がある。

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+\vec{c}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=l(\vec{a}+\vec{c})=l\vec{a}+l\vec{c}$　$\cdots\cdots$②

①，② から　$\left(-\frac{2}{3}k+1\right)\vec{a}+\frac{1}{2}(k+1)\vec{c}=l\vec{a}+l\vec{c}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{a}$，$\vec{c}$ は平行でないから

$-\frac{2}{3}k+1=l$，　$\frac{1}{2}(k+1)=l$　　　これを解くと　$k=\frac{3}{7}$，$l=\frac{5}{7}$

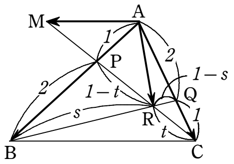
よって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}={}^{イ}\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{5}{7}\vec{c}$

$\boxed{4}$

解答 $r=\frac{7}{15}$

解説

BR：RQ$=s:(1-s)$，CR：RP$=t:(1-t)$　とすると



$$\overrightarrow{AR}=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AQ}$$
$$=(1-s)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}s\,\overrightarrow{AC}\quad\cdots\cdots①$$
$$\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AP}+(1-t)\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{t}{3}\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}\quad\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}$ であるから，①，②により

$$1-s=\frac{t}{3},\quad \frac{2}{3}s=1-t$$

これを解いて　$s=\dfrac{6}{7}$，$t=\dfrac{3}{7}$　　よって　$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}$

ゆえに　$\overrightarrow{AM}=\dfrac{-r\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AP}}{1-r}=\dfrac{1}{1-r}\left\{-r\left(\dfrac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right\}$

$$=\frac{1}{1-r}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{r}{7}\right)\overrightarrow{AB}-\frac{4}{7}r\overrightarrow{AC}\right\}$$

また　$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

よって，$\overrightarrow{AM}$ と $\overrightarrow{BC}$ が平行になるための条件は　$\dfrac{1}{3}-\dfrac{r}{7}=\dfrac{4}{7}r$

これを解いて　$r=\dfrac{7}{15}$　$(0<r<1$ を満たす)

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\overrightarrow{OE}=\dfrac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a}+\dfrac{3s}{2s+3}\vec{b}$　　(2)　$s=\dfrac{3}{8}$

解説

(1)　OC：CB$=3:2$ であるから　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$

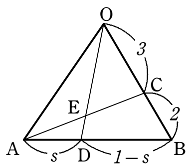
AD：DB$=s:(1-s)$ であるから　$\overrightarrow{OD}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

OE：OD$=t:1$ $(0<t<1)$ とおくと

$$\overrightarrow{OE}=t\overrightarrow{OD}=t(1-s)\vec{a}+ts\vec{b}$$

AE：EC$=u:(1-u)$ $(0<u<1)$ とおくと

$$\overrightarrow{OE}=(1-u)\overrightarrow{OA}+u\overrightarrow{OC}=(1-u)\vec{a}+\frac{3}{5}u\vec{b}$$



$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であり，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから

$$t(1-s)=1-u,\quad ts=\frac{3}{5}u$$

これを解くと　$t=\dfrac{3}{2s+3}$，$u=\dfrac{5s}{2s+3}$

よって　$\overrightarrow{OE}=\dfrac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a}+\dfrac{3s}{2s+3}\vec{b}$

(2)　△OAE と △OCE の面積が等しくなるための条件は，E が線分 AC の中点になることである。すなわち，$u=\dfrac{1}{2}$ となることであるから，(1) より

$$\frac{5s}{2s+3}=\frac{1}{2}\qquad すなわち\quad 10s=2s+3$$

これを解いて　$s=\dfrac{3}{8}$

別解　(1)　△ABC と直線 OD についてメネラウスの定理により

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CO}{OB}\cdot\frac{BD}{DA}=1\qquad すなわち\quad \frac{AE}{EC}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1-s}{s}=1$$

よって　$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{5s}{3(1-s)}$　　ゆえに　AE：EC$=5s:3(1-s)$

したがって

$$\overrightarrow{OE}=\frac{3(1-s)}{5s+3(1-s)}\overrightarrow{OA}+\frac{5s}{5s+3(1-s)}\overrightarrow{OC}=\frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a}+\frac{5s}{2s+3}\times\frac{3}{5}\vec{b}$$
$$=\frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a}+\frac{3s}{2s+3}\vec{b}$$

$\boxed{2}$

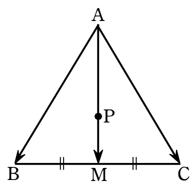
解答　略

解説

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ から

$$-\overrightarrow{AP}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

よって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$



ゆえに，P は △ABC の重心であるから，AP は △ABC の中線で，AP の延長と辺 BC の交点を M とすると

$$BM=CM\quad\cdots\cdots①$$

また，P は △ABC の内心であるから，AP は ∠A の二等分線である。

よって　AB：AC$=$BM：MC　……②

①，② から　AB$=$AC

以上は点 A を始点と考えたが，B を始点として同様に考えると　BA$=$BC

したがって，△ABC は正三角形である。

$\boxed{3}$

解答　(1)　略　　(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-15$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=-20$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

解説

(1)　$\overrightarrow{OG}=\vec{g}$ とする。

$4\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{BG}+5\overrightarrow{CG}=12\overrightarrow{OG}$ を変形すると　$4(\vec{g}-\vec{a})+3(\vec{g}-\vec{b})+5(\vec{g}-\vec{c})=12\vec{g}$

よって　$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$　……①

(2)　① より　$4\vec{a}+3\vec{b}=-5\vec{c}$　　よって　$|4\vec{a}+3\vec{b}|^2=|-5\vec{c}|^2$

ゆえに　$16|\vec{a}|^2+24\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=25|\vec{c}|^2$

$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=5^2$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

① より　$3\vec{b}+5\vec{c}=-4\vec{a}$　　よって　$|3\vec{b}+5\vec{c}|^2=|-4\vec{a}|^2$

ゆえに　$9|\vec{b}|^2+30\vec{b}\cdot\vec{c}+25|\vec{c}|^2=16|\vec{a}|^2$

$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=5^2$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{c}=-15$

① より　$5\vec{c}+4\vec{a}=-3\vec{b}$　　よって　$|5\vec{c}+4\vec{a}|^2=|-3\vec{b}|^2$

ゆえに　$25|\vec{c}|^2+40\vec{c}\cdot\vec{a}+16|\vec{a}|^2=9|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=5^2$ であるから　$\vec{c}\cdot\vec{a}=-20$

(3)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ であるから

$$|\overrightarrow{OG}|^2=\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}}{9}$$
$$=\frac{1}{9}\{5^2+5^2+5^2+2\times0+2\times(-15)+2\times(-20)\}=\frac{5}{9}$$

$|\overrightarrow{OG}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{OG}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

したがって　OG$=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{b\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}}{a+b}$　　(2)　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{b\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}}{a+b-c}$

(3)　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

解説

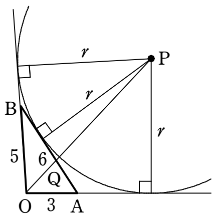
(1)　AQ：QB$=$△OAP：△OBP$=a:b$

よって　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{b\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}}{a+b}$

(2)　OQ：QP$=$△OAB：△ABP$=(a+b-c):c$

よって　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{a+b}{a+b-c}\overrightarrow{OQ}=\dfrac{a+b}{a+b-c}\times\dfrac{b\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}}{a+b}=\dfrac{b\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}}{a+b-c}$

(3)　点Ｐを中心とし，３直線ＯＡ，ＯＢ，ＡＢに接する円の半径を r とすると



$$a=\triangle \mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\times 3\times r=\frac{3}{2}r$$

$$b=\triangle \mathrm{OBP}=\frac{1}{2}\times 5\times r=\frac{5}{2}r$$

$$c=\triangle \mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\times 6\times r=3r$$

これらを (2) の結果に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\frac{5}{2}r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{2}r\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\frac{3}{2}r+\frac{5}{2}r-3r}$$

$$=\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\boxed{1}$

解答　(1) $\frac{21}{2}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}$　(3) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

解説

(1)　AB＝3，CA＝4 から　$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$

BC＝2 すなわち $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2$ から　$|\vec{c}-\vec{b}|=2$

よって　$|\vec{c}-\vec{b}|^2=4$　　すなわち　$|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=4$

$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$ を代入して　$16-2\vec{b}\cdot\vec{c}+9=4$　　ゆえに　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{21}{2}$

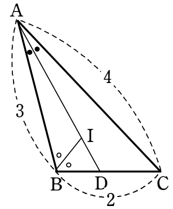
別解　△ABC において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\times 3\times 4}=\frac{7}{8}$$

よって　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BAC}=3\times 4\times\frac{7}{8}=\frac{21}{2}$

(2)　AD は ∠A の二等分線であるから

BD : DC＝AB : AC＝3 : 4　……①



よって　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+4}=\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}$

(3)　BD : DC＝3 : 4 であり，BC＝2 であるから

$$\mathrm{BD}=\frac{3}{3+4}\mathrm{BC}=\frac{3}{7}\times 2=\frac{6}{7}$$

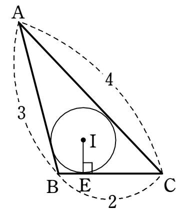
BI は ∠B の二等分線であるから

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=3:\frac{6}{7}=7:2$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{7}{7+2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{7}{9}\left(\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}\right)=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

(4)　BE : EC＝s : $(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$　と表される。



IE⊥BC であるから　$\overrightarrow{\mathrm{IE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$　……②

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{IE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\left(\frac{5}{9}-s\right)\vec{b}+\left(s-\frac{1}{3}\right)\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}$

よって，②から　$\left\{\left(\frac{5}{9}-s\right)\vec{b}+\left(s-\frac{1}{3}\right)\vec{c}\right\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

ゆえに　$\left(s-\frac{5}{9}\right)|\vec{b}|^2+\left(\frac{8}{9}-2s\right)\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(s-\frac{1}{3}\right)|\vec{c}|^2=0$

$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{21}{2}$ を代入して　$9\left(s-\frac{5}{9}\right)+\frac{21}{2}\left(\frac{8}{9}-2s\right)+16\left(s-\frac{1}{3}\right)=0$

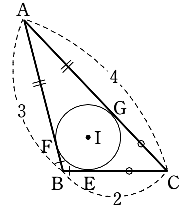
整理すると　$4s-1=0$　　よって　$s=\frac{1}{4}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

別解　まず，BE : EC を求める。

△ABC の内接円と辺 AB，CA との接点を，それぞれ F，G とすると

AF＝AG，BE＝BF，CE＝CG



よって，AF＝l，BE＝m，CE＝n とおくと，AB＝3，BC＝2，CA＝4 から

$l+m=3$ ……③，　$m+n=2$ ……④，

$n+l=4$ ……⑤

③，④，⑤の辺々を加えて　$2(l+m+n)=9$

よって　$l+m+n=\frac{9}{2}$　……⑥

⑥－⑤ から　$m=\frac{1}{2}$　　⑥－③ から　$n=\frac{3}{2}$

ゆえに　BE : EC＝m : n＝1 : 3

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

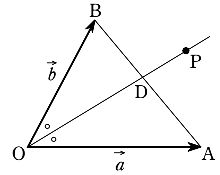
$\boxed{2}$

解答　(1) 略　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{7}{4}\vec{b}$

解説

(1)　∠AOB の二等分線と線分 AB の交点を D とすると

AD : DB＝OA : OB＝$|\vec{a}|:|\vec{b}|$



よって，点 D は線分 AB を $|\vec{a}|:|\vec{b}|$ に内分する点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}$

また，点 P が直線 OD 上にあるとき

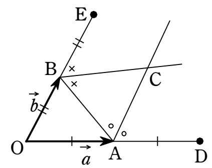
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$（$s$ は実数）

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}\right)=\frac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

$\frac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$ は実数であるから，点 P が ∠AOB の二等分線上にあるとき，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ となる実数 t が存在する。

(2)　直線 OA 上に，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるように D をとると，点 C は ∠BAD の二等分線上にある。



よって，(1) から $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=u\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)$ となる実数 u が存在する。

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=u\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)$

ここで　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=5^2-2\times 5+7^2=64$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=8$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\vec{a}=u\left(\frac{\vec{a}}{7}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{8}\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(1+\frac{u}{56}\right)\vec{a}+\frac{u}{8}\vec{b}$　……①

また，直線 OB 上に $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるように E をとると，点 C は ∠ABE の二等分

線上にある。

よって，(1) から $\overrightarrow{BC}=v\left(\dfrac{\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BE}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}\right)$ となる実数 v が存在する。

ゆえに　$\overrightarrow{BC}=v\left(\dfrac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}\right)$　　すなわち　$\overrightarrow{OC}-\vec{b}=v\left(\dfrac{\vec{b}}{5}+\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{8}\right)$

したがって　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{v}{8}\vec{a}+\left(1+\dfrac{3}{40}v\right)\vec{b}$　……②

$\vec{a}\neq 0$，$\vec{b}\neq 0$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，①，② より

$$1+\frac{u}{56}=\frac{v}{8},\quad \frac{u}{8}=1+\frac{3}{40}v$$

これを解くと　$u=14$，$v=10$

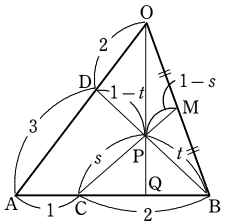
よって，$u=14$ を ① に代入すると　$\overrightarrow{OC}=\left(1+\dfrac{14}{56}\right)\vec{a}+\dfrac{14}{8}\vec{b}=\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{7}{4}\vec{b}$

3

解答　(1)　$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}$　　(2)　2：1

解説

(1)　CP：PM＝s：$(1-s)$，BP：PD＝t：$(1-t)$とすると



$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OM}$$
$$=(1-s)\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}+\frac{s}{2}\vec{b}$$
$$=\frac{2(1-s)}{3}\vec{a}+\frac{2+s}{6}\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$
$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OD}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$
$$=\frac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

①，② から

$$\frac{2(1-s)}{3}\vec{a}+\frac{2+s}{6}\vec{b}=\frac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ であるから

$$\frac{2(1-s)}{3}=\frac{2}{5}t,\quad \frac{2+s}{6}=1-t$$

これを解いて　$s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{5}{9}$

$t=\dfrac{5}{9}$ を ② に代入して

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{9}\vec{a}+\left(1-\frac{5}{9}\right)\vec{b}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\quad\cdots\cdots③$$

(2)　点 Q が直線 OP 上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ となる実数 k がある。

③ から　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{9}k\vec{a}+\dfrac{4}{9}k\vec{b}$　……④

また，AQ：QB＝u：$(1-u)$ とすると

$$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}\quad\cdots\cdots⑤$$

④，⑤ から

$$\frac{2}{9}k\vec{a}+\frac{4}{9}k\vec{b}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ であるから　$\dfrac{2}{9}k=1-u$，$\dfrac{4}{9}k=u$

これを解いて　$u=\dfrac{2}{3}$，$k=\dfrac{3}{2}$

したがって　AQ：QB＝$\dfrac{2}{3}:\dfrac{1}{3}=2:1$

参考　次の項目「ベクトル方程式」で学習する以下のことを用いてもよい。

点 P$(\vec{p})$ が 2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を通る直線上にある $\Leftrightarrow$ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

別解　点 Q が直線 OP 上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ となる実数 k がある。

③ から　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{9}k\vec{a}+\dfrac{4}{9}k\vec{b}$

点Q は直線 AB 上にあるから　$\dfrac{2}{9}k+\dfrac{4}{9}k=1$　　よって　$k=\dfrac{3}{2}$

ゆえに　$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2}{9}\times\dfrac{3}{2}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\times\dfrac{3}{2}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}=\dfrac{1\cdot\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}$

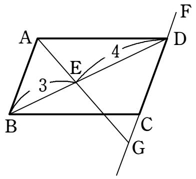
よって　AQ：QB＝2：1

4

解答　(1)　$\overrightarrow{AE}=\dfrac{4\vec{b}+3\vec{d}}{7}$，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{-\vec{b}+3\vec{d}}{3}$　　(2)　$\overrightarrow{AG}=\dfrac{4}{3}\vec{b}+\vec{d}$

(3)　AB：AD＝3：4

解説



(1)　$\overrightarrow{AE}=\dfrac{4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}}{7}=\dfrac{4\vec{b}+3\vec{d}}{7}$

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\vec{d}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\dfrac{-\vec{b}+3\vec{d}}{3}$

(2)　$\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AE}$ (k は実数) とおける．

よって　$\overrightarrow{AG}=\dfrac{4}{7}k\vec{b}+\dfrac{3}{7}k\vec{d}$ ……①

また，$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}$ であるから，

$\overrightarrow{AG}=\vec{d}+t\vec{b}$ (t は実数) とおける．

よって　$\overrightarrow{AG}=t\vec{b}+\vec{d}$ ……②

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{d}\neq\vec{0}$，$\vec{b}$ と $\vec{d}$ は平行でないから，①，② より　$\dfrac{4}{7}k=t$，$\dfrac{3}{7}k=1$

ゆえに　$k=\dfrac{7}{3}$，$t=\dfrac{4}{3}$　　よって，② から　$\overrightarrow{AG}=\dfrac{4}{3}\vec{b}+\vec{d}$

(3)　$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{-\vec{b}+3\vec{d}}{3}-\vec{b}=-\dfrac{4}{3}\vec{b}+\vec{d}$

$\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BF}$ から　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BF}=0$　　よって　$\left(\dfrac{4}{3}\vec{b}+\vec{d}\right)\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\vec{b}+\vec{d}\right)=0$

ゆえに　$|\vec{d}|^2-\dfrac{16}{9}|\vec{b}|^2=0$　　したがって　$\dfrac{|\vec{b}|}{3}=\dfrac{|\vec{d}|}{4}$

ゆえに　AB：AD＝$|\vec{b}|:|\vec{d}|=3:4$

5

解答　正三角形

解説

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると，条件式から

$$(\vec{c}-\vec{b})\cdot(-\vec{c})=(-\vec{c})\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$$

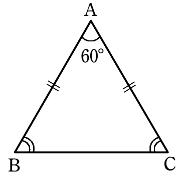
よって　$-|\vec{c}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{b}|^2$

$-|\vec{c}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}-|\vec{b}|^2$ から　$|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$

$|\vec{b}|>0$，$|\vec{c}|>0$ であるから　$|\vec{b}|=|\vec{c}|$　　すなわち　AB＝AC

また，$-|\vec{c}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{b}\cdot\vec{c}$ から　$2\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2$

よって　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}|\vec{c}|^2$



ゆえに　$\cos\angle BAC=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\dfrac{\frac{1}{2}|\vec{c}|^2}{|\vec{c}|^2}=\dfrac{1}{2}$

$0°<\angle BAC<180°$ であるから　$\angle BAC=60°$

したがって，AB＝AC，∠BAC＝60° となるから，△ABC は正三角形である。

6

解答　(1)　略　　(2)　$s(4t-1)=t$

解説

(1)　$\overrightarrow{CI}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CH})$，$\overrightarrow{CJ}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{CH})$

ゆえに　$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CJ}-\overrightarrow{CI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

(2)　4 点 C，D，I，J が同一直線上にあるための必要十分条件は，(1) から，点 I が線分 CD 上にあること，すなわち，$\overrightarrow{CI}=k\overrightarrow{CD}$ となる k が存在することである．

左辺＝$\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OC}$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH})-\overrightarrow{OC}$$
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OH}-2\overrightarrow{OC})$$
$$=\frac{1}{9}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-6\overrightarrow{OC})$$
$$=\frac{1}{9}(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-6s\overrightarrow{OA})$$
$$=\frac{1}{9}\{(-5s+1)\overrightarrow{OA}+(t+1)\overrightarrow{OB}\}$$

右辺＝$k\overrightarrow{CD}=k(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=-ks\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}$

ゆえに　$-ks=\dfrac{-5s+1}{9}$ かつ $kt=\dfrac{t+1}{9}$

よって　$9ks=5s-1$ かつ $9kt=t+1$

したがって　$(5s-1)t=s(t+1)$

ゆえに　$s(4t-1)=t$

$t=\dfrac{1}{4}$ はこの式を満たさないから　$t\neq\dfrac{1}{4}$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x=-4+3t$，$y=2-t$；$x+3y-2=0$

(2)　$x=t-3$，$y=-4t+5$；$4x+y+7=0$

解説

直線上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とする。

(1)　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

$\vec{p}=(x,\ y)$，$\vec{a}=(-4,\ 2)$，$\vec{d}=(3,\ -1)$ であるから

$(x,\ y)=(-4,\ 2)+t(3,\ -1)=(-4+3t,\ 2-t)$

ゆえに　$\begin{cases} x=-4+3t & \cdots\cdots① \\ y=2-t & \cdots\cdots② \end{cases}$　(t は媒介変数)

①＋②×3 から　$x+3y-2=0$

(2)　2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線のベクトル方程式は　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{p}=(x,\ y)$，$\vec{a}=(-3,\ 5)$，$\vec{b}=(-2,\ 1)$ であるから

$(x,\ y)=(1-t)(-3,\ 5)+t(-2,\ 1)=(t-3,\ -4t+5)$

ゆえに　$\begin{cases} x=t-3 & \cdots\cdots③ \\ y=-4t+5 & \cdots\cdots④ \end{cases}$　(t は媒介変数)

③×4＋④ から　$4x+y+7=0$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$3x-4y+12=0$　(2)　$\alpha=45^\circ$

解説

(1)　直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$ であるから　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

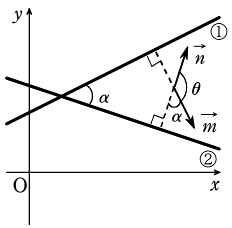
ここで　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-4,\ y-6)$

よって　$3\times(x-4)-4\times(y-6)=0$

したがって　$3x-4y+12=0$

(2)　$2x-4y+11=0$　……①

$x+3y-12=0$　……②



$\vec{m}=(2,\ -4)$，$\vec{n}=(1,\ 3)$ とすると，$\vec{m}$，$\vec{n}$ は，それぞれ 2 直線 ①，② の法線ベクトルである。

よって，$\vec{m}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{2\times1+(-4)\times3}{\sqrt{2^2+(-4)^2}\sqrt{1^2+3^2}}$$

$$=\frac{-10}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=135^\circ$

$0^\circ<\alpha<90^\circ$　であるから　$\alpha=180^\circ-\theta=45^\circ$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$　(2)　$\vec{p}=\left(2t-\dfrac{1}{2}\right)\vec{a}+t\vec{b}$　(t は実数)

解説

(1)　点 P は線分 AB の中点 M を通り，

AB に垂直な直線上にあるから　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

ゆえに　$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$

よって　$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

(2)　求める直線は，点 M を通り，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を方向ベクトルとする直線であるから，

そのベクトル方程式は

$\overrightarrow{\mathrm{GP}}=\overrightarrow{\mathrm{GM}}+t\overrightarrow{\mathrm{CA}}$　(t は実数)　……①

点 G に関する位置ベクトルを考えると

$$\overrightarrow{\mathrm{GG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}}{3}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{GC}}=-\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GB}}=-\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}})=\dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}-\vec{b})=-\dfrac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{a}-(-\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}+\vec{b}$

以上より　①は　$\vec{p}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+t(2\vec{a}+\vec{b})$

すなわち　$\vec{p}=\left(2t-\dfrac{1}{2}\right)\vec{a}+t\vec{b}$　(t は実数)

$\boxed{4}$

解答　(1)　線分 AB を 2 : 3 に内分する点を中心とする半径 1 の円

(2)　△ABC の重心を中心とする半径 1 の円

(3)　線分 AB を 1:2 に内分する点を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の円

(4)　線分 OA の垂直二等分線

(5)　点 A を中心とする半径 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ の円

(6)　点 O に関して点 A と対称な点と点 B を直径の両端とする円

解説

(1)　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=5$ から　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})|=5$

すなわち　$|5\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$

両辺を 5 で割って　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{5}\right|=1$

よって，点 P が描く図形は，線分 AB を 2 : 3 に内分する点を中心とする半径 1 の円である。

(2)　A，B，C，P の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とすると，

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=3$ から　$|-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})|=3$

ゆえに　$|(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})-3\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3$

すなわち　$|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})|=3$

よって　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|=1$　……①

△ABC の重心を G とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$

よって，① から　$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}|=1$

したがって，点 P は G を中心とする半径 1 の円を表す。

(3)　$|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$　から

$|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|$

よって，点 P は線分 AB を 1:2 に内分する点を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の円を描く。

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。

$|\vec{p}|=|\vec{p}-\vec{a}|$ の両辺を 2 乗すると　$|\vec{p}|^2=|\vec{p}-\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$　ゆえに　$2\vec{p}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2=0$

両辺を 2 で割ると　$\vec{p}\cdot\vec{a}-\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2=0$　すなわち　$\left(\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0$

ここで，線分 OA の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$ であるから

$\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{MP}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\neq\vec{0}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\vec{0}$ のとき，点 P は M と一致する。

したがって，点 P が描く図形は，線分 OA の中点 M を通り OA に垂直な直線，すなわち線分 OA の垂直二等分線である。

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。

$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ の両辺に $|\vec{a}|^2$ を加えると　$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$　ゆえに　$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{a}|$

したがって，点 P が描く図形は，点 A を中心とする半径 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ の円である。

(6)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　から　$\vec{p}\cdot\{\vec{p}-(\vec{b}-\vec{a})\}=\vec{a}\cdot\vec{b}$

よって　$|\vec{p}|^2+(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　$(\vec{p}+\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

すなわち　$\{\vec{p}-(-\vec{a})\}\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

よって，点 O に関して点 A と対称な点と点 B を直径の両端とする円。

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 C，D，E をとると，平行四辺形 ODEC の周および内部

(2)　$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ をとると，線分 A′B′

(3)　$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を満たす点 A′，B′ をとると，線分 A′B′

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 C，D をとると，△OCD の周および内部

(5)　$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を満たす点 B′ をとると，△OAB′ の周および内部

解説

(1)　$s=k$ (k は定数) とすると，$0\leqq k\leqq 2$ で　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

t の値が 0 から 3 まで変化すると，点 P は線分 QR 上を Q から R まで動く。

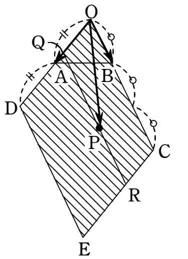
(ただし　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$)

次に，k の値が 0 から 2 まで変化すると，点 Q，R は，QR∥OC (∥DE) の状態を保ちながら，それぞれ線分 OD，CE 上を，O から D，C から E まで動く。

(ただし　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$)

よって，点 P の存在範囲は

平行四辺形 ODEC の周および内部



(2)　$s+t=3$ から　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{3}=1$

ここで，$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{3}=t'$ とおくと

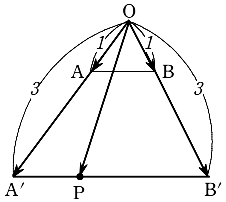
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となる点 A′，B′ をとると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

したがって，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。



(3)　$2s+3t=6$ から　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}=1$

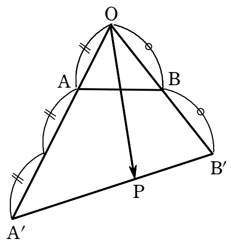
また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

ここで，$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を満たす点 A′，B′ をとると，P の存在範囲は線分 A′B′ である。



(4)　$s+t=k$ とおく。

$s+t=k$ から　$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$

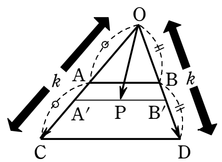
$\dfrac{s}{k}=s'$，$\dfrac{t}{k}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 A′，B′ をとると，定数 k に対して，点 P の存在範囲は辺 AB に平行な線分 A′B′ である。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点 C，D をとると，$0<k\leqq 2$ の範囲で k が変わるとき，線分 A′B′ 上の点は，点 O を除く △OCD の周および内部を動く。

したがって，点 P の存在範囲は，△OCD の周および内部である。



(5)　$0\leqq 3s+2t\leqq 3$ から　$0\leqq s+\dfrac{2}{3}t\leqq 1$

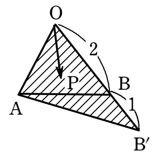
また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}t\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

ここで，$\dfrac{2}{3}t=t'$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t'\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$0\leqq s+t'\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t'\geqq 0$，

よって，$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ を満たす点 B′ をとると，P の存在範囲は △OAB′ の周および内部である。



1

解答　(1)　$\begin{cases} x=-1+t \\ y=5-2t \end{cases}$；$2x+y-3=0$　　(2)　$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=5-t \end{cases}$；$x+3y-14=0$

解説

(1)　点 A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示は

$(x,\ y)=(-1,\ 5)+t(1,\ -2)$

すなわち　$\begin{cases} x=-1+t \\ y=5-2t \end{cases}$

t を消去すると　$y=5-2(x+1)$　　すなわち　$2x+y-3=0$

(2)　2 点 A，B を通る直線の媒介変数表示は

$(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 5)+t(2,\ 4)$

すなわち　$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=5-t \end{cases}$

t を消去すると　$x=-1+3(5-y)$　　すなわち　$x+3y-14=0$

2

解答　(1)　$4x-y-14=0$　　(2)　45°

解説

(1)　直線上の任意の点を P$(x,\ y)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$ から　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-3,\ y+2)$，$\vec{n}=(-4,\ 1)$ から

$-4(x-3)+(y+2)=0$　　すなわち　$4x-y-14=0$

(2)　2 直線 $x-3y+5=0$，$2x+4y+3=0$ をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とすると，ℓ_1，ℓ_2 の法線ベクトルはそれぞれ　$\vec{n_1}=(1,\ -3)$，$\vec{n_2}=(2,\ 4)$　とおける。

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=1\times 2-3\times 4=-10$，$|\vec{n_1}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$，

$|\vec{n_2}|=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$

であるから，$\vec{n_1}$ と $\vec{n_2}$ のなす角を θ とすると

$\cos\theta=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\dfrac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{20}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから　$\theta=135^\circ$

したがって，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 のなす鋭角は　$180^\circ-135^\circ=45^\circ$

3

解答　(1)　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$　（$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$ でもよい）

(2)　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ (t は実数)　　(3)　$2\vec{p}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2$

解説

(1)　点 A を通り，BC に垂直な直線であるから，そのベクトル方程式は

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$　　すなわち　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$　（$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$ でもよい）

(2)　辺 BC の中点を M$(\vec{m})$ とすると　$\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

よって，求めるベクトル方程式は

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{m}$ (t は実数)　　すなわち　$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ (t は実数)

(3)　辺 BC の中点 M を通り，辺 BC に垂直な直線であるから，そのベクトル方程式は

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　　すなわち　$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

整理して　$2\vec{p}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=|\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2$

$\boxed{4}$

解答　(1)　線分 AB を 3：4 に内分する点を中心とする半径 1 の円

(2)　BC を 3:2 に内分する点，AD を 5:1 に内分する点をそれぞれ D，E とすると，E を中心とする半径 1 の円

(3)　辺 BC の中点を中心とし，点 A を通る円

(4)　線分 OA を3:1 に外分する点 Q を通り OA に垂直な直線

(5)　線分 OA を2:1 に外分する点を中心とする半径 $\sqrt{3}|\overrightarrow{OA}|$ の円

(6)　AB を直径の両端とする円

解説

(1)　$|4\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}|=7$ から　$|4\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})|=7$

すなわち　$|7\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AB}|=7$

両辺を 7 で割って　$\left|\overrightarrow{AP}-\dfrac{3\overrightarrow{AB}}{7}\right|=1$

よって，点 P が描く図形は，線分 AB を 3：4 に内分する点を中心とする半径 1 の円である。

(2)　A，B，C，P の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とすると，

$|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}|=6$ から　$|-\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})|=6$

ゆえに　$|(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})-6\overrightarrow{AP}|=6$

すなわち　$|6\overrightarrow{AP}-(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC})|=6$

よって　$\left|6\overrightarrow{AP}-\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}\right|=1$　……①

ここで　$\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$

BC を 3:2 に内分する点，AD を 5:1 に内分する点をそれぞれ D，E とすると

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AD}$

よって，$\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{6}=\overrightarrow{AE}$　となり，① から　$|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AE}|=1$

したがって，BC を 3:2 に内分する点，AD を 5:1 に内分する点をそれぞれ D，E とすると，点 P は E を中心とする半径 1 の円を表す。

(3)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{p}$ とする。

$|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}|=|(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})|=2\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|$

であるから，ベクトル方程式は

$$2\left|\vec{p}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|=|\vec{b}+\vec{c}|$$

ゆえに　$\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|=\left|\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right|$

よって，この方程式の表す図形は，BC の中点を中心とし，点 A を通る円である。

(4)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とする。

$|\vec{p}+2\vec{a}|=|\vec{p}-5\vec{a}|$ の両辺を 2 乗すると　$|\vec{p}+2\vec{a}|^2=|\vec{p}-5\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}|^2+4\vec{p}\cdot\vec{a}+4|\vec{a}|^2=|\vec{p}|^2-10\vec{p}\cdot\vec{a}+25|\vec{a}|^2$

ゆえに　$14\vec{p}\cdot\vec{a}-21|\vec{a}|^2=0$

両辺を 14 で割ると　$\vec{p}\cdot\vec{a}-\dfrac{3}{2}|\vec{a}|^2=0$　　すなわち　$\left(\vec{p}-\dfrac{3}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0$

ここで，線分 OA を3:1 に外分する点を Q とすると，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3}{2}\vec{a}$ であるから

$$\vec{p}-\frac{3}{2}\vec{a}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{QP}$$

よって　$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

ゆえに，$\overrightarrow{QP}\neq\vec{0}$ のとき　$\overrightarrow{QP}\perp\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{QP}=\vec{0}$ のとき，点 P は Q と一致する。

したがって，点 P が描く図形は，線分 OA を3:1 に外分する点 Q を通り OA に垂直な直線である。

(5)　$|\overrightarrow{OP}|^2-4\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=0$ から　$|\overrightarrow{OP}|^2-4\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}+4|\overrightarrow{OA}|^2=3|\overrightarrow{OA}|^2$

よって　$|\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OA}|^2=(\sqrt{3}|\overrightarrow{OA}|)^2$

ゆえに，点 P の描く図形は，線分 OA を2:1 に外分する点を中心とする半径 $\sqrt{3}|\overrightarrow{OA}|$ の円である。

(6)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とする。

$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{OA}(2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})$　から　$\vec{p}\cdot\{\vec{p}-(\vec{b}-\vec{a})\}=2\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{b}$

よって　$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

よって，点 P の描く図形は，AB を直径の両端とする円である。

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ となる点 C，D，E をとると，平行四辺形 ADEC の周および内部

(2)　$4\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点 A′，B′ をとると，線分 A′B′

(3)　$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点 A′，B′ をとると，線分 A′B′

(4)　$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OB}$ となる点 C，D をとると，△OCD の周および内部

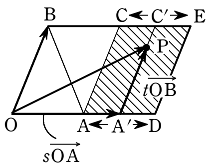
(5)　$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点 A′，B′ をとると，△OA′B′の周および内部

解説

(1)　s を固定して，$\overrightarrow{OA'}=s\overrightarrow{OA}$ とすると

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+t\overrightarrow{OB}$

ここで，t を $0\leqq t\leqq 1$ の範囲で変化させると，点 P は右の図の線分 A′C′ 上を動く。



ただし，$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB}$

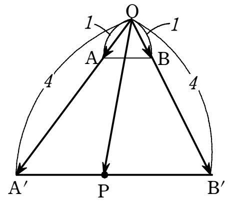
次に，s を $1\leqq s\leqq 2$ の範囲で変化させると，線分 A′C′ は図の線分 AC から DE まで平行に動く。

ただし，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}$

よって，点 P の存在範囲は

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ とすると，平行四辺形 ADEC の周および内部である。

(2)　$s+t=4$ から　$\dfrac{s}{4}+\dfrac{t}{4}=1$



ここで，$\dfrac{s}{4}=s'$，$\dfrac{t}{4}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'(4\overrightarrow{OA})+t'(4\overrightarrow{OB})$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

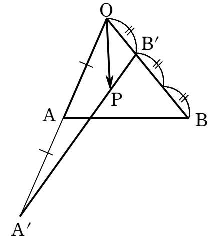
よって，$4\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点 A′，B′ をとると

$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$

$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

したがって，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。

(3)　$s+6t=2$ から　$\dfrac{s}{2}+3t=1$



また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{s}{2}(2\overrightarrow{OA})+3t\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$

ここで，$\dfrac{s}{2}=s'$，$3t=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'(2\overrightarrow{OA})+t'\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)$，

$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

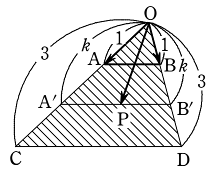
よって，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。

(4)　$s+t=k$ とおく。

$s+t=k$ から　$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$

$\dfrac{s}{k}=s'$，$\dfrac{t}{k}=t'$ とおくと　$\overrightarrow{OP}=s'(k\overrightarrow{OA})+t'(k\overrightarrow{OB})$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

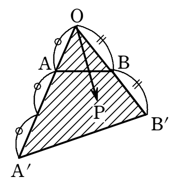
よって，$\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$ となる点 A′，B′ をとると，定数 k に対して，点 P の存在範囲は辺 AB に平行な線分 A′B′ である。



ここで，$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OB}$ となる点 C，D をとると，$0<k\leqq 3$ の範囲で k が変わるとき，線分 A′B′ 上の点は，点 O を除く △OCD の周および内部を動く。

したがって，点 P の存在範囲は，△OCD の周および内部である。

(5)　$0\leqq 2s+3t\leqq 6$ から　$0\leqq\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}\leqq 1$



また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{s}{3}(3\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$

ここで，$\dfrac{s}{3}=s'$，$\dfrac{t}{2}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'(3\overrightarrow{OA})+t'(2\overrightarrow{OB})$，

$0\leqq s'+t'\leqq 1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

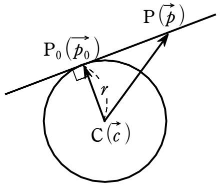
よって，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点 A′，B′ をとると，点 P の存在範囲は △OA′B′の周および内部である。

1

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　中心 C，半径 r の円の接線上に点 P$(\vec{p})$ があることは，$\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}=\vec{0}$ が成り立つことと同値である。



よって，接線のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}\cdot(\vec{p}-\vec{p_0})=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}=\vec{p_0}-\vec{c}$ であるから

$$(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot\{(\vec{p}-\vec{c})-(\vec{p_0}-\vec{c})\}=0$$

したがって　$(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})-|\vec{p_0}-\vec{c}|^2=0$

$|\vec{p_0}-\vec{c}|^2=\mathrm{CP_0}{}^2=r^2$ であるから　$(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$　……①

(2)　中心が原点 O$(\vec{0})$，半径 r の円上の点 P$_0(\vec{p_0})$ における接線のベクトル方程式は，

①において，$\vec{c}=\vec{0}$ とおくと得られるから　$\vec{p_0}\cdot\vec{p}=r^2$　……②

$\vec{p_0}=(x_0,\ y_0)$，$\vec{p}=(x,\ y)$ とおくと　　$\vec{p_0}\cdot\vec{p}=x_0x+y_0y$

これを②に代入して，接線の方程式は　　$x_0x+y_0y=r^2$

2

解答　(1)　$(x-4)^2+(y-6)^2=4$　　(2)　$x^2+y^2-\dfrac{5}{2}bx+b^2=0$

(3)　$(x-11)^2+(y+7)^2=72$

解説

(1)　$|\vec{p}|^2=x^2+y^2$，$\vec{a}\cdot\vec{p}=2x+3y$ より $x^2+y^2-8x-12y+48=0$

ゆえに　$(x-4)^2+(y-6)^2=4$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y)+(x-b,\ y)=(2x-b,\ 2y)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y)+(-2x+2b,\ -2y)=(-x+2b,\ -y)$

$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}})=0$ から　$(2x-b)(-x+2b)+2y(-y)=0$

すなわち　$-2x^2+5bx-2b^2-2y^2=0$

したがって　$x^2+y^2-\dfrac{5}{2}bx+b^2=0$

(3)　$2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$ から　　$4|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=9|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$

P$(x,\ y)$ とすると　$4\{(x-2)^2+(y-2)^2\}=9\{(x-7)^2+(y+3)^2\}$

展開して整理すると　　$x^2+y^2-22x+14y+98=0$

よって　$(x-11)^2+(y+7)^2=72$

3

解答　(ア)　$-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$　　(イ)　4

解説

(ア)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2\times\cos60^\circ=1$

$\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}$，$\vec{v}=2\vec{a}+\vec{b}$ とすると

$$|\vec{u}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=4\times1^2-12\times1+9\times2^2=28$$

$$|\vec{v}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times1^2+4\times1+2^2=12$$

$|\vec{u}|>0$，$|\vec{v}|>0$ であるから

$$|\vec{u}|=\sqrt{28}=2\sqrt{7},\quad |\vec{v}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

また　$\vec{u}\cdot\vec{v}=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2=4\times1^2-4\times1-3\times2^2=-12$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{-12}{2\sqrt{7}\times2\sqrt{3}}={}^{ア}-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

(イ)　原点 O に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{OV}}=\vec{v}$ とする。

$(\vec{p}-2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{p}-2\vec{a}-\vec{b})=0$ から　　$(\vec{p}-\vec{u})\cdot(\vec{p}-\vec{v})=0$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{UP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{VP}}=0$

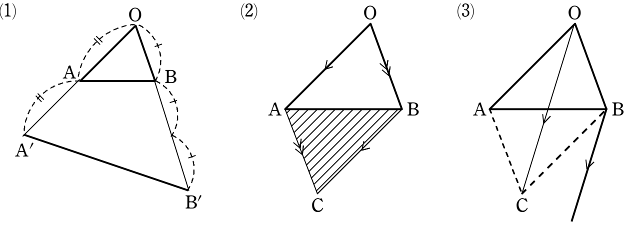
これは，線分 UV を直径とする円のベクトル方程式である。

よって，求める円の半径は　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{UV}}|}{2}=\dfrac{|\vec{v}-\vec{u}|}{2}=\dfrac{|4\vec{b}|}{2}={}^{イ}4$

4

解答　(1)　[図]　　(2)　[図]　斜線部分．境界線上の点を含む　　(3)　[図]

(1)　　(2)　　(3)



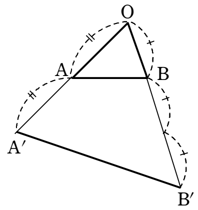
解説

(1)　$s=\dfrac{\alpha}{2}$，$t=\dfrac{\beta}{3}$ とおくと　$s+t=1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ となる。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点 A′, B′ をとると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$s+t=1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$

したがって，終点 P の集合は図の線分 A′B′ である。

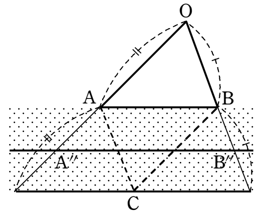


(2)　$0\leqq\alpha\leqq1$，$0\leqq\beta\leqq1$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると，P は平行四辺形 OACB の周および内部にある。

$1\leqq\alpha+\beta\leqq2$ のとき

$\alpha+\beta=k$ $(1\leqq k\leqq2)$ とすると　$\dfrac{\alpha}{k}+\dfrac{\beta}{k}=1$

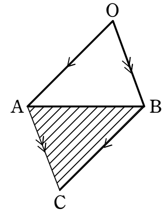


また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\alpha}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{\beta}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{OB}})$，$\overrightarrow{\mathrm{OA''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OB''}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点 A″, B″ をとると，P は直線 A″B″ 上を動く。

ここで，k を $1\leqq k\leqq2$ の範囲で動かすと，P は図の影の部分を動く。

したがって，$1\leqq\alpha+\beta\leqq2$，$0\leqq\alpha\leqq1$，$0\leqq\beta\leqq1$ のとき，終点 P の集合は図のようになる。ただし，境界線上の点を含む。



(3)　$\beta-\alpha=1$ から　$\beta=\alpha+1$

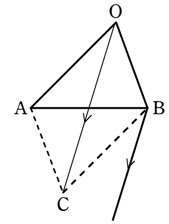
ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\alpha+1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\qquad=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\alpha(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$\alpha\geqq0$ であるから，終点 P の集合は

点 B を端点とし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に平行な半直線である。

[図]



1

解答　(1)　$\dfrac{2}{3}a$　　(2)　$3a$　　(3)　$\sqrt{3}\,a^2+\dfrac{2}{3}\pi a^2$

解説

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle BAC=a\times 2a\times\cos\frac{2}{3}\pi=-a^2$$

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ……① であるから

$$|\vec{d}|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right|^2=\frac{1}{9}(4|\vec{b}|^2+4\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)$$
$$=\frac{1}{9}\{4\times a^2+4\times(-a^2)+(2a)^2\}=\frac{4}{9}a^2$$

$|\overrightarrow{AD}|>0$ であるから　　$|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{2}{3}a$

(2)　$|2\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}|=|2\overrightarrow{AP}-2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})|=|-\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$

① より，$2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$ であるから　　$|3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP}|=a$　……②

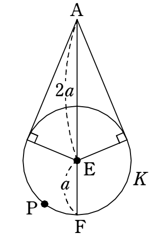
ここで，$3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$ とおき，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$，$\overrightarrow{AP}=\vec{p}$ とすると，② は

$|\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AP}|=a$　　　すなわち　　$|\vec{p}-\vec{e}|=a$

よって，点 P は，中心が E，半径が a の円周上の点である。

この円を K とおく。

ここで，直線 AE と円 K の交点のうち，点 A から遠い方を F とする。



$|\overrightarrow{AP}|$ が最大となるのは，点 P が点 F に一致するときである。

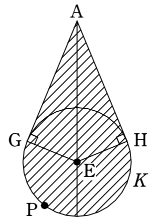
$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AD}$ であるから　　$|\overrightarrow{AE}|=3|\overrightarrow{AD}|=3\times\dfrac{2}{3}a=2a$

よって，$|\overrightarrow{AP}|$ の最大値は $|\overrightarrow{AE}|+|\overrightarrow{EF}|=3a$ である。

(3)　線分 AP が通過してできる図形は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

ここで，G，H は A から円 K に引いた 2 本の接線の接点である。



$$\cos\angle AEH=\frac{EH}{AE}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

$0<\angle AEH<\pi$ であるから　　$\angle AEH=\dfrac{\pi}{3}$

また，$\angle AEH=\angle AEG$ であるから　　$\angle GEH=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，線分 AP が通過してできる図形の面積 S は

$S=2\times\triangle AEH+$(円 K の面積)$-$(扇形 EGH の面積)

$$=2\times\frac{1}{2}\times a\times\sqrt{3}\,a+\pi a^2-\frac{1}{2}a^2\times\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}\,a^2+\frac{2}{3}\pi a^2$$

2

解答　(1)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とすると，線分 OB，OC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周と内部

(2)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$ とすると，線分 OC，OD を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周と内部

解説

(1)　$s\overrightarrow{OA}+(s+t)\overrightarrow{OB}=s(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+t\overrightarrow{OB}$ であるから，

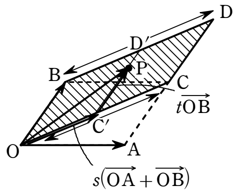
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とすると

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

よって，点 P の存在範囲は

線分 OB，OC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周と内部

である。



(2)　$(s-t)\overrightarrow{OA}+(s+t)\overrightarrow{OB}=s(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

であるから

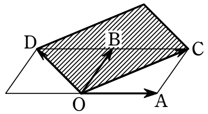
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$

とすると

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

ゆえに，点 P の存在範囲は

線分 OC，OD を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周と内部。



3

解答　(1)　$6\sqrt{6}$　　(2)　$18\sqrt{6}$　　(3)　$\dfrac{27\sqrt{6}}{5}$

解説

(1)　余弦定理により　　$\cos\angle AOB=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\dfrac{12}{2\cdot 5\cdot 6}=\dfrac{1}{5}$

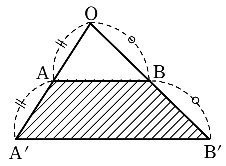
$\sin\angle AOB>0$ であるから　　$\sin\angle AOB=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

よって　　$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB\sin\angle AOB=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$

(2)　$\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$ となる点 A′，B′ をとると，点 P が存在しうる部分は右の図の斜線部分である。

$\triangle OAB\backsim\triangle OA'B'$ であり，その相似比は $1:2$ であるから，求める面積は

$$\triangle OA'B'-\triangle OAB=2^2\triangle OAB-\triangle OAB$$
$$=3\triangle OAB=3\times 6\sqrt{6}$$
$$=18\sqrt{6}$$



(3)　$2s=s'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=s'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+t\overrightarrow{OB}\quad(s'\geqq 0,\ t\geqq 0,\ 1\leqq s'+t\leqq 2)$$

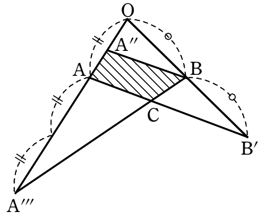
$s+3t\leqq 3$ から　　$\dfrac{s}{3}+t\leqq 1$

$\dfrac{s}{3}=s''$ とおくと　　$\overrightarrow{OP}=s''(3\overrightarrow{OA})+t\overrightarrow{OB}$　$(s''\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s''+t\leqq 1)$

よって，$\overrightarrow{OA''}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OA'''}=3\overrightarrow{OA}$ となる点 A″，A‴ をとると，点 P が存在しうる部分は，四角形 AA″BB′ の内部と △OA‴B の内部の共通部分で，右の図の斜線部分である。

線分 AB′ と線分 A‴B の交点を C とすると

$$\triangle A'''A''B=\triangle OA'''B-\triangle OA''B$$
$$=3\triangle OAB-\frac{1}{2}\triangle OAB$$
$$=\frac{5}{2}\triangle OAB=\frac{5}{2}\times 6\sqrt{6}=15\sqrt{6}$$



$\triangle A'''A''B\backsim\triangle A'''AC$ であり，その相似比は $5:4$ であるから，求める面積は

$$\triangle A'''A''B-\triangle A'''AC=\triangle A'''A''B-\left(\frac{4}{5}\right)^2\triangle A'''A''B$$
$$=\frac{9}{25}\triangle A'''A''B=\frac{9}{25}\times 15\sqrt{6}=\frac{27\sqrt{6}}{5}$$

1

解答 (1) $\dfrac{12}{5}$ (2) $\dfrac{28}{13}$

解説

(1) $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$ ……①, $\vec{q}=\dfrac{1}{4}(-\vec{a}+2\vec{b})$ ……② とする。

②から $4\vec{q}=-\vec{a}+2\vec{b}$ ……③

(①−③)÷2 から $\vec{a}=\dfrac{1}{2}(\vec{p}-4\vec{q})$ ……④

(①+③)÷4 から $\vec{b}=\dfrac{1}{4}(\vec{p}+4\vec{q})$ ……⑤

よって $|\vec{a}|^2=\dfrac{1}{4}(|\vec{p}|^2-8\vec{p}\cdot\vec{q}+16|\vec{q}|^2)=\dfrac{1}{4}(32-8\vec{p}\cdot\vec{q})=8-2\vec{p}\cdot\vec{q}$

$|\vec{b}|^2=\dfrac{1}{16}(|\vec{p}|^2+8\vec{p}\cdot\vec{q}+16|\vec{q}|^2)=\dfrac{1}{16}(32+8\vec{p}\cdot\vec{q})=2+\dfrac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ であるから $8-2\vec{p}\cdot\vec{q}=2+\dfrac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{q}$ これを解いて $\vec{p}\cdot\vec{q}=\dfrac{12}{5}$

(2) ④, ⑤から $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\dfrac{1}{4}(\vec{p}+4\vec{q})-\dfrac{1}{2}(\vec{p}-4\vec{q})=-\dfrac{1}{4}\vec{p}+3\vec{q}$

2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であるから $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

ここで $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ}=\left(-\dfrac{1}{4}\vec{p}+3\vec{q}\right)\cdot(\vec{q}-\vec{p})=\dfrac{1}{4}|\vec{p}|^2-\dfrac{13}{4}\vec{p}\cdot\vec{q}+3|\vec{q}|^2$

$=4-\dfrac{13}{4}\vec{p}\cdot\vec{q}+3=7-\dfrac{13}{4}\vec{p}\cdot\vec{q}$

よって $7-\dfrac{13}{4}\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ すなわち $\vec{p}\cdot\vec{q}=\dfrac{28}{13}$

2

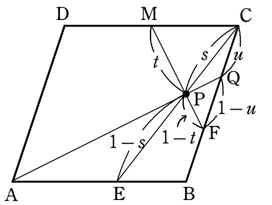
解答 (1) $\dfrac{19}{23}\vec{a}+\dfrac{13}{23}\vec{b}$ (2) 10：9

解説

(1) MP：PF$=t:(1-t)$, CP：PE$=s:(1-s)$ とする.

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AF}+(1-t)\overrightarrow{AM}=t\left(\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)+(1-t)\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)$

$=\dfrac{1+t}{2}\vec{a}+\dfrac{3-2t}{3}\vec{b}$ ……①



また $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AE}+(1-s)\overrightarrow{AC}$

$=s\times\dfrac{3}{5}\vec{a}+(1-s)(\vec{a}+\vec{b})$

$=\left(1-\dfrac{2}{5}s\right)\vec{a}+(1-s)\vec{b}$ ……②

$\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}, \vec{a}\nparallel\vec{b}$ であるから,

①, ②より $\dfrac{1+t}{2}=\dfrac{5-2s}{5}$, $\dfrac{3-2t}{3}=1-s$

これを解いて $s=\dfrac{10}{23}$, $t=\dfrac{15}{23}$

ゆえに, $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1+\frac{15}{23}}{2}\vec{a}+\left(1-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{15}{23}\right)\vec{b}=\dfrac{19}{23}\vec{a}+\dfrac{13}{23}\vec{b}$

(2) CQ：QF$=u:(1-u)$ とおくと,

$\overrightarrow{AQ}=u\overrightarrow{AF}+(1-u)\overrightarrow{AC}=u\left(\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)+(1-u)(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+\left(1-\dfrac{2}{3}u\right)\vec{b}$

また $\overrightarrow{AQ}=l\overrightarrow{AP}$ より, $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{19}{23}l\vec{a}+\dfrac{13}{23}l\vec{b}$ であるから,

$l=\dfrac{23}{19}$, $u=\dfrac{9}{19}$ となり CQ：QF$=\dfrac{9}{19}:\dfrac{10}{19}=9:10$ から FQ：QC$=10:9$

3

解答 (1) 2 (2) $\sqrt{3}$ (3) 30° (4) 15°

解説

(1) $|\overrightarrow{OB}|^2=(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)^2+(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2$
$=3\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$
$=4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=4$

よって $|\overrightarrow{OB}|=2$ 答

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta)+(\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta)$
$=2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta$
$=\sqrt{3}\sin90^\circ-\cos90^\circ=\sqrt{3}$ 答

別解 $\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ から

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ 答

(3) $|\overrightarrow{OA}|=1, |\overrightarrow{OB}|=2, \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}$ であるから $\cos\angle AOB=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ\leqq\angle AOB\leqq180^\circ$ であるから $\angle AOB=30^\circ$ 答

(4) $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ とすると $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

(2)により $\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta=0$

$\cos2\theta\neq0$ であるから $\tan2\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0^\circ\leqq2\theta\leqq180^\circ$ であるから $2\theta=30^\circ$ ゆえに $\theta=15^\circ$ 答

4

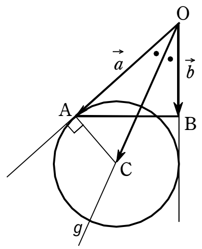
解答 $\vec{c}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{9}{10}\vec{b}$

解説

点Cは∠AOBの二等分線上にあるから

$\vec{c}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=t\left(\dfrac{\vec{a}}{3}+\dfrac{\vec{b}}{2}\right)$ （t は実数）

と表される。



また，中心Cの円が点Aで直線OAに接するから

CA⊥OA

よって $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ ……①

ここで $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{a}=\left\{\left(1-\dfrac{t}{3}\right)\vec{a}-\dfrac{t}{2}\vec{b}\right\}\cdot\vec{a}$

$=\left(1-\dfrac{t}{3}\right)|\vec{a}|^2-\dfrac{t}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(1-\dfrac{t}{3}\right)\times3^2-\dfrac{t}{2}\times4$

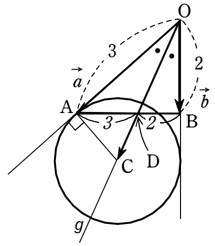
$=9-5t$

①から $9-5t=0$ ゆえに $t=\dfrac{9}{5}$

したがって $\vec{c}=\dfrac{9}{5}\left(\dfrac{\vec{a}}{3}+\dfrac{\vec{b}}{2}\right)=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{9}{10}\vec{b}$

別解 直線OCと辺ABの交点をDとすると

AD：DB＝OA：OB＝3：2



よって $\overrightarrow{OD}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$

$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OD}$ （k は実数）と表されるから，$\dfrac{k}{5}=t$ とおくと

$\vec{c}=t(2\vec{a}+3\vec{b})$ （t は実数）

と表される。

また，中心Cの円が点Aで直線OAに接するから

CA⊥OA

よって $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ ……①

ここで $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{a}=\{(1-2t)\vec{a}-3t\vec{b}\}\cdot\vec{a}$

$=(1-2t)|\vec{a}|^2-3t\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=(1-2t)\times3^2-3t\times4=9-30t$

①から $9-30t=0$ ゆえに $t=\dfrac{3}{10}$

したがって $\vec{c}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{9}{10}\vec{b}$

5

解答 (1) $\overrightarrow{AE}=2\vec{b}$, $\overrightarrow{AF}=3\vec{d}$ (2) $\overrightarrow{QR}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$ (3) 略

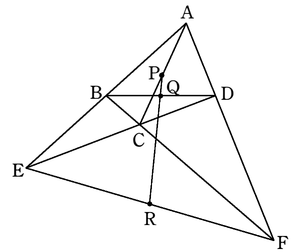
解説

(1) $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE}=h\overrightarrow{DC}$ とすると

$\overrightarrow{AE}=k\vec{b}$

$\overrightarrow{DE}=h(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=h\left(\dfrac{4}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{d}-\vec{d}\right)$

$=\dfrac{4}{5}h\vec{b}-\dfrac{2}{5}h\vec{d}$



ゆえに

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\vec{d}+\left(\dfrac{4}{5}h\vec{b}-\dfrac{2}{5}h\vec{d}\right)$

$=\dfrac{4}{5}h\vec{b}+\left(1-\dfrac{2}{5}h\right)\vec{d}$

$\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{d}\neq\vec{0}$, $\vec{b}$ と $\vec{d}$ は平行でないから

$\dfrac{4}{5}h=k$, $1-\dfrac{2}{5}h=0$

これを解いて $k=2$, $h=\dfrac{5}{2}$ よって $\overrightarrow{AE}=2\vec{b}$

$\overrightarrow{AF}=l\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF}=m\overrightarrow{BC}$ とすると $\overrightarrow{AF}=l\vec{d}$

$\overrightarrow{BF}=m(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=m\left(\dfrac{4}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{d}-\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{5}m\vec{b}+\dfrac{3}{5}m\vec{d}$

ゆえに $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\vec{b}-\dfrac{1}{5}m\vec{b}+\dfrac{3}{5}m\vec{d}=\left(1-\dfrac{1}{5}m\right)\vec{b}+\dfrac{3}{5}m\vec{d}$

これから $1-\dfrac{1}{5}m=0$, $\dfrac{3}{5}m=l$

これを解いて $l=3$, $m=5$ よって $\overrightarrow{AF}=3\vec{d}$

(2) $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}$

$\overrightarrow{AR}=\dfrac{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}}{2}=\dfrac{2\vec{b}+3\vec{d}}{2}$

よって　$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2\vec{b}+3\vec{d}}{2}-\dfrac{\vec{b}+\vec{d}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$

(3) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{d}\right)=\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{10}\vec{d}$

ゆえに　$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\vec{b}+3\vec{d}}{2}-\left(\dfrac{2}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{10}\vec{d}\right)=\dfrac{3}{5}(\vec{b}+2\vec{d})=\dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}\right)$

よって　$\overrightarrow{PR}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{QR}$

したがって，3点P，Q，Rは同一直線上にある。

$\boxed{6}$

解答　(1) $\overrightarrow{OR}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$　(2) $\overrightarrow{BS}=\dfrac{3}{4}\vec{a}-\vec{b}$　(3) $\dfrac{3}{4}$　(4) $\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

解説

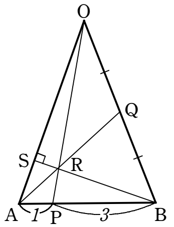
(1) 点Pは辺ABを1：3に内分するから

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3\vec{a}+\vec{b}}{1+3}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$

点Rは直線OP上にあるから，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OP}$（$k$は実数）とすると

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{3}{4}k\vec{a}+\dfrac{1}{4}k\vec{b}=\dfrac{3}{4}k\vec{a}+\left(\dfrac{1}{2}k\right)\dfrac{1}{2}\vec{b}$

$=\dfrac{3}{4}k\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}k\overrightarrow{OQ}$



点Rは直線AQ上にあるから　$\dfrac{3}{4}k+\dfrac{1}{2}k=1$

よって　$k=\dfrac{4}{5}$　　ゆえに　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$

(2) (1)から　$\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{5}\vec{a}-\dfrac{4}{5}\vec{b}$

点Sは直線BR上にあるから，$\overrightarrow{BS}=m\overrightarrow{BR}$（$m$は実数）とすると

$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{BR}=\dfrac{3}{5}m\vec{a}+\left(1-\dfrac{4}{5}m\right)\vec{b}$

点Sは辺OA上にあるから　$1-\dfrac{4}{5}m=0$　　よって　$m=\dfrac{5}{4}$

このとき　$\overrightarrow{BS}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{BR}=\dfrac{3}{4}\vec{a}-\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{OA}$ であるから　$\overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　　ゆえに，(2)から　$\dfrac{3}{4}|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$|\vec{a}|=1$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{4}$

(4) (3)から

$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

$\boxed{7}$

解答　(1) 2　(2) $\overrightarrow{AP}=\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}$，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}$

(3) $AP=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，$AQ=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　(4) $\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$

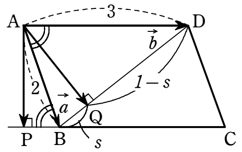
解説

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=AB\times AD\times\cos\angle BAD=2\times3\times\dfrac{1}{3}=2$

(2) 点Pは直線BC上にあり，AD∥BCであるから

$\overrightarrow{BP}=k\vec{b}$　（kは実数）

と表される。



よって　$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\vec{a}+k\vec{b}$

AD⊥APであるから　$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

ゆえに　$\vec{b}\cdot(\vec{a}+k\vec{b})=0$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}+k|\vec{b}|^2=0$

ゆえに　$2+k\cdot3^2=0$　　よって　$k=-\dfrac{2}{9}$

したがって　$\overrightarrow{AP}=\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}$

また，BQ：QD$=s:(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{AQ}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

BD⊥AQであるから　$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$　　よって　$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}=0$

ゆえに　$(s-1)|\vec{a}|^2+(1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2=0$

よって　$(s-1)\cdot2^2+(1-2s)\cdot2+s\cdot3^2=0$

ゆえに　$9s-2=0$　　よって　$s=\dfrac{2}{9}$

したがって　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}$

(3) $AP=|\overrightarrow{AP}|$，$AQ=|\overrightarrow{AQ}|$ であるから

$|\overrightarrow{AP}|^2=\left|\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}\right)$

$=|\vec{a}|^2-\dfrac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{4}{81}|\vec{b}|^2=2^2-\dfrac{4}{9}\cdot2+\dfrac{4}{81}\cdot3^2=\dfrac{32}{9}$

よって　$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\dfrac{32}{9}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$|\overrightarrow{AQ}|^2=\left|\dfrac{1}{9}(7\vec{a}+2\vec{b})\right|^2=\dfrac{1}{81}(7\vec{a}+2\vec{b})\cdot(7\vec{a}+2\vec{b})$

$=\dfrac{1}{81}(49|\vec{a}|^2+28\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\dfrac{1}{81}(49\cdot2^2+28\cdot2+4\cdot3^2)=\dfrac{288}{81}$

ゆえに　$|\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{\dfrac{288}{81}}=\dfrac{12\sqrt{2}}{9}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

(4) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{7}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}-\left(\vec{a}-\dfrac{2}{9}\vec{b}\right)=-\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}=-\dfrac{2}{9}(\vec{a}-2\vec{b})$

よって　$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left|-\dfrac{2}{9}(\vec{a}-2\vec{b})\right|^2=\dfrac{4}{81}(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$=\dfrac{4}{81}(|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2)=\dfrac{4}{81}(2^2-4\cdot2+4\cdot3^2)=\dfrac{4}{81}\cdot32$

ゆえに　$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\dfrac{4}{81}\cdot32}=\dfrac{2}{9}\cdot4\sqrt{2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$

よって　$PQ=\dfrac{8\sqrt{2}}{9}$

$\boxed{8}$

解答　(ア) $\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$　(イ) $(1,\ 2)$　(ウ) $0\leqq s'+t'\leqq\dfrac{1}{3}$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$

解説

$0\leqq s+t\leqq\dfrac{1}{2}$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ から

$0\leqq2s+2t\leqq1$，$2s\geqq0$，$2t\geqq0$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ から　$\overrightarrow{OP}=2s\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

よって，$\overrightarrow{OA'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ とおくと，点Pの存在範囲は△OA′B′の周および内部である。

ゆえに，点A′の座標は　ア$\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$

また，点B′の座標は　イ$(1,\ 2)$

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ であるから

$\overrightarrow{OQ}=s'\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OA}\right)+t'\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{3}{2}s'\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{2}t'\overrightarrow{OB}$

よって，点Qの存在範囲が点Pの存在範囲と一致するとき

$0\leqq\dfrac{3}{2}s'+\dfrac{3}{2}t'\leqq\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}s'\geqq0$，$\dfrac{3}{2}t'\geqq0$

ゆえに，実数s'とt'の満たす条件は

ウ$0\leqq s'+t'\leqq\dfrac{1}{3}$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$

$\boxed{9}$

解答　(1) $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=r$　(2) $\left|\overrightarrow{OQ}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right|=\dfrac{r}{2}$

(3) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{4}$，$(0,\ 2)$

解説

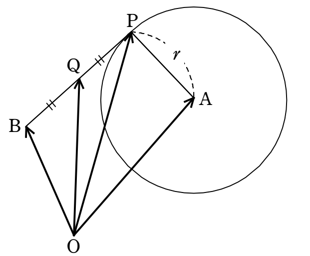
(1) $|\overrightarrow{AP}|=r$

また，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$ であるから　$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=r$

(2) $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OB})$

よって　$\overrightarrow{OQ}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}$

ゆえに　$\left|\overrightarrow{OQ}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right|=\dfrac{r}{2}$



別解　(2) $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB})$ から

$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}$

これを(1)の結果に代入すると

$|2\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=r$

ゆえに　$\left|\overrightarrow{OQ}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\right|=\dfrac{r}{2}$

(3) $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\dfrac{1}{2}(2-1,\ 5-1)=\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\left(x-\dfrac{1}{2},\ y-2\right)$

(2) の結果と $r=1$ から，D の方程式は　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2=\dfrac{1}{4}$

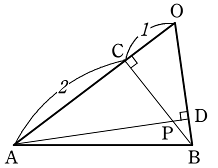
$x=0$ とおくと　$(y-2)^2=0$　　ゆえに　$y=2$

したがって，求める共有点の座標は　$(0,\ 2)$

1

解答　(1)　$60°$　　(2)　$t=\dfrac{3}{4}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

解説



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

すなわち　$(t\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=t|\vec{b}|^2$

$t=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$ を代入して　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$　……①

ゆえに　$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$

$0°<\angle\mathrm{AOB}<180°$ であるから　$\angle\mathrm{AOB}=60°$

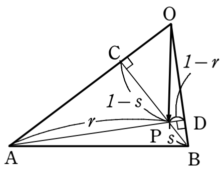
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ であるから　$\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{3}|\vec{a}|^2$　……②

①，② より　$\dfrac{1}{3}|\vec{a}|^2=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$　　$|\vec{a}|\neq 0$ であるから　$|\vec{a}|=\dfrac{3}{2}|\vec{b}|$

したがって　$t=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}=\dfrac{\frac{3}{2}|\vec{b}|}{2|\vec{b}|}=\dfrac{3}{4}$



(3)　$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=r:(1-r)$，$\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-r)\vec{a}+\dfrac{3}{4}r\vec{b}$　……③

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$　……④

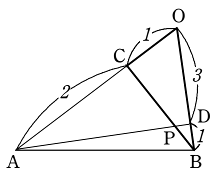
③，④ より　$(1-r)\vec{a}+\dfrac{3}{4}r\vec{b}=\dfrac{1}{3}s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$

ここで，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，かつ $\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でないから

$1-r=\dfrac{1}{3}s$，$\dfrac{3}{4}r=1-s$

これを解いて　$r=\dfrac{8}{9}$，$s=\dfrac{1}{3}$　　$s=\dfrac{1}{3}$ を ④ に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

別解　$t=\dfrac{3}{4}$ より　$\mathrm{OD}:\mathrm{DB}=3:1$



△OBCと直線 AD について，メネラウスの定理を適用して

$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DO}}\cdot\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}}=1$　すなわち　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}}=1$

よって　$\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}}=2$　　ゆえに　$\mathrm{CP}:\mathrm{PB}=2:1$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

2

解答　(1)　$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，$\cos 2\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\beta=75°,\ 105°$

(3)　$s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$t=-\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$

よって　$\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta}=\dfrac{2}{\sin 45°}$

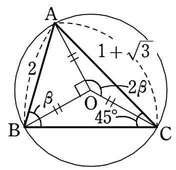
ゆえに　$\sin\beta=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

また　$\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2=1-2\cdot\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\angle\mathrm{ACB}=45°$ であるから　$0°<\beta<135°$　　よって　$0°<2\beta<270°$

ゆえに，$\cos 2\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から　$2\beta=150°,\ 210°$

したがって　$\beta=75°,\ 105°$



(3)　△ABC が鋭角三角形であるから　$\beta=75°$

円周角の定理により　$\angle\mathrm{AOB}=2\angle\mathrm{ACB}=90°$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

また，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ であるから　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2=\sqrt{2}$

すなわち　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\sqrt{2}$

円周角の定理により　$\angle\mathrm{AOC}=2\beta=150°$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 150°$

$=(\sqrt{2})^2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}$

更に，$\angle\mathrm{BOC}=360°-(90°+150°)=120°$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos 120°=(\sqrt{2})^2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$（$s$，$t$ は実数）とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s(\sqrt{2})^2+t\cdot 0=2s$

ゆえに，$2s=-\sqrt{3}$ から　$s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=s\cdot 0+t(\sqrt{2})^2=2t$

よって，$2t=-1$ から　$t=-\dfrac{1}{2}$

3

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{3-3t}{5-3t}\vec{a}+\dfrac{2t}{5-3t}\vec{c}$　　(2)　$t=\dfrac{2}{5}$

解説

(1)　$\mathrm{AP}:\mathrm{PL}=m:(1-m)$ とすると

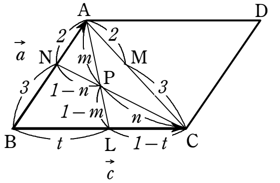
$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(1-m)\overrightarrow{\mathrm{BA}}+m\overrightarrow{\mathrm{BL}}=(1-m)\vec{a}+mt\vec{c}$　……①

また，$\mathrm{CP}:\mathrm{PN}=n:(1-n)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=n\overrightarrow{\mathrm{BN}}+(1-n)\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{3}{5}n\vec{a}+(1-n)\vec{c}$　……②

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{c}$ であるから，①，② より

$$1-m=\frac{3}{5}n,\quad mt=1-n$$



n を消去して整理すると　$(5-3t)m=2$

$0<t<1$ であるから　$5-3t\neq0$

よって　$m=\dfrac{2}{5-3t}$

① に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{3-3t}{5-3t}\vec{a}+\dfrac{2t}{5-3t}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{MD}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BM}}=(\vec{a}+\vec{c})-\dfrac{1}{5}(3\vec{a}+2\vec{c})=\dfrac{1}{5}(2\vec{a}+3\vec{c})$

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{5-3t}\{3(1-t)\vec{a}+2t\vec{c}\}=\frac{1}{5-3t}\{2\vec{a}+(5-5t)\vec{c}\}$$

P，M，D が一直線上にあり，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{c}$ であるから　$5-5t=3$

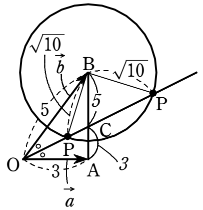
よって　$t=\dfrac{2}{5}$

4

解答　$\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$，$\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

解説

円との交点を P とすると，点 P は ∠AOB の二等分線上にあるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=t\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{5}\right)\ (t \text{ は実数})$$

と表される。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{t}{3}\vec{a}+\left(\dfrac{t}{5}-1\right)\vec{b}$

$\mathrm{BP}=\sqrt{10}$ より $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=10$ であるから

$$\frac{t^2}{9}|\vec{a}|^2+2\times\frac{t}{3}\left(\frac{t}{5}-1\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\frac{t}{5}-1\right)^2|\vec{b}|^2=10$$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times5\times\dfrac{3}{5}=9$ を代入して

$$t^2+6t\left(\frac{t}{5}-1\right)+(t-5)^2=10\qquad \text{整理して}\qquad 16t^2-80t+75=0$$

よって　$(4t-5)(4t-15)=0$　　ゆえに　$t=\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{15}{4}$

したがって，求める位置ベクトルは　$\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$，$\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

別解　∠AOB の二等分線と AB の交点を C とすると，AC：CB＝OA：OB＝3：5 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\times\frac{5\vec{a}+3\vec{b}}{3+5}$$

$\dfrac{t}{8}=k$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(5\vec{a}+3\vec{b})$ と表される。

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=5k\vec{a}+(3k-1)\vec{b}$

そこで，$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=10$ から $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=9$ を代入すると

$$48k^2-16k+1=0\qquad \text{これを解いて}\qquad k=\frac{1}{4},\ \frac{1}{12}$$

したがって，求める位置ベクトルは　$\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$，$\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

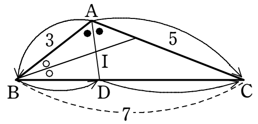
5

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}$　(2) $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　(3) $\sqrt{3}\leqq S\leqq\dfrac{25\sqrt{3}}{16}$

解説

(1) 直線 AI と辺 BC の交点を D とすると

BD：DC＝AB：AC＝3：5



よって　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+5}=\dfrac{1}{8}(5\vec{b}+3\vec{c})$

また　$\mathrm{BD}=\dfrac{3}{8}\mathrm{BC}=\dfrac{3}{8}\times7=\dfrac{21}{8}$

△ABD において　AI：ID＝AB：BD＝3：$\dfrac{21}{8}$＝8：7

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{8}{15}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{8}{15}\cdot\dfrac{1}{8}(5\vec{b}+3\vec{c})=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{c}$　……①

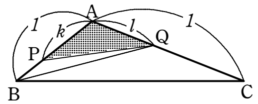
(2) △ABC において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ<\angle\mathrm{BAC}<180^\circ$ であるから　$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$

ゆえに　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=l\vec{c}$ $(0<k\leqq1,\ 0<l\leqq1)$ とすると，△APQ の面積 S は



$$S=kl\triangle\mathrm{ABC}=\frac{15\sqrt{3}}{4}kl$$

PI：IQ＝t：$(1-t)$ $(0<t<1)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)k\vec{b}+tl\vec{c}$　……②

$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\not\parallel\vec{c}$ であるから，①，② より

$$(1-t)k=\frac{1}{3}\ \cdots\cdots③,\quad tl=\frac{1}{5}\ \cdots\cdots④$$

よって　$k=\dfrac{1}{3(1-t)}$，$l=\dfrac{1}{5t}$

ゆえに　$S=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1}{3(1-t)}\cdot\dfrac{1}{5t}=\dfrac{\sqrt{3}}{4t(1-t)}$

ここで，$0<k\leqq1$ と ③ から　$1-t\geqq\dfrac{1}{3}$　　よって　$t\leqq\dfrac{2}{3}$

$0<l\leqq1$ と ④ から　$t\geqq\dfrac{1}{5}$

ゆえに，t のとりうる値の範囲は　$\dfrac{1}{5}\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}$

$4t(1-t)=-4\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+1$ であるから，$\dfrac{1}{5}\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}$ の範囲で $4t(1-t)$ は

$t=\dfrac{1}{5}$ のとき最小値 $4\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{25}$，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 1

をとる。

したがって，$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4t(1-t)}$ のとりうる値の範囲は

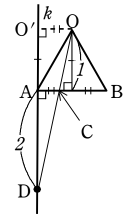
$$\frac{\sqrt{3}}{1}\leqq S\leqq\frac{\sqrt{3}}{\frac{16}{25}}\quad \text{すなわち}\quad \sqrt{3}\leqq S\leqq\frac{25\sqrt{3}}{16}$$

6

解答　(1) $m=2$，$n=1$　(2) $s=-\dfrac{14}{5}$，$t=\dfrac{7}{2}$

解説

(1) 点 O から直線 k に垂線 OO′ を引く。



△OCA：△ACD＝1：2 であるから　O′A：O′D＝1：3

また　$\overrightarrow{\mathrm{O'A}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'D}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+3\overrightarrow{\mathrm{O'A}}$

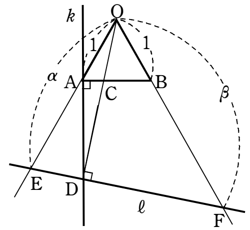
$=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$m=2$，$n=1$

(2) △OAB は，1 辺の長さが 1 の正三角形であるから



$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(\alpha\neq0,\ \beta\neq0)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$

ここで

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$=-2\alpha|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(2\beta-\alpha)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\beta|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$=-2\alpha\times1^2+(2\beta-\alpha)\times\dfrac{1}{2}+\beta\times1^2=-\dfrac{5}{2}\alpha+2\beta$

よって　$-\dfrac{5}{2}\alpha+2\beta=0$　……①

また　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{2}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\dfrac{1}{\beta}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$

点 D は直線 EF 上にあるから　$\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$　……②

① から　$\beta=\dfrac{5}{4}\alpha$　　これを ② に代入して　$\dfrac{2}{\alpha}+\dfrac{4}{5\alpha}=1$

これを解くと　$\alpha=\dfrac{14}{5}$　　このとき　$\beta=\dfrac{7}{2}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=-\dfrac{14}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから　$s=-\dfrac{14}{5}$，$t=\dfrac{7}{2}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$\vec{c}=\frac{5}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$，$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=3\sqrt{2}$

(3)　$t=\frac{1}{2}$，$s=\frac{3}{2}$ で最小値 4

解説

(1)　x，y を実数として，$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおく。

$\vec{a}\cdot\vec{c}=8$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=20$ に代入すると　$\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=8$，$\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=20$

ゆえに　$2x+2y=8$，$2x+10y=20$

よって　$x=\frac{5}{2}$，$y=\frac{3}{2}$　　したがって　$\vec{c}=\frac{5}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$

(2)　l を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=l\vec{a}+(1-l)\vec{b}$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

ゆえに　$(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$ …… ①

(1) の結果から，① の左辺は

$$\left\{l\vec{a}+(1-l)\vec{b}-\frac{5}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=\left\{\left(l-\frac{5}{2}\right)\vec{a}+\left(-l-\frac{1}{2}\right)\vec{b}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$
$$=(2l-2)\vec{a}\cdot\vec{b}-\left(l-\frac{5}{2}\right)|\vec{a}|^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2$$
$$=4l-4-2l+5-10l-5=-8l-4$$

よって，① から　$-8l-4=0$　　すなわち　$l=-\frac{1}{2}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=-3\vec{a}$　から　　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=3\sqrt{2}$

(3)　$(s+t-1)(s+3t-3)\leqq 0$

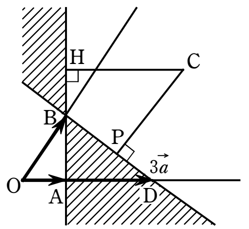
から

$$s+t\geqq 1,\ \frac{s}{3}+t\leqq 1$$

または

$$s+t\leqq 1,\ \frac{s}{3}+t\geqq 1$$

ゆえに，$3\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる



点 D をとると，点 P の存在する範囲は図の斜線部分になる。ただし，境界線を含む。

また，(1) より点 C は直線 OA，OB で挟まれた部分のうち，線分 BD に関して点 O と反対側の領域にあることがわかるから，線分 BD 上に点 P があるときの $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$ の最小値を求めればよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(s-\frac{5}{2}\right)\vec{a}+\left(t-\frac{3}{2}\right)\vec{b}$$

から　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=\left(s-\frac{5}{2}\right)^2|\vec{a}|^2+2\left(s-\frac{5}{2}\right)\left(t-\frac{3}{2}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(t-\frac{3}{2}\right)^2|\vec{b}|^2$

P が線分 BD上 の点から　$s=-3t+3$，$0\leqq t\leqq 1$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=2\left(-3t+\frac{1}{2}\right)^2+4\left(-3t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{3}{2}\right)+10\left(t-\frac{3}{2}\right)^2$

$$=16t^2-16t+20=16\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+16$$

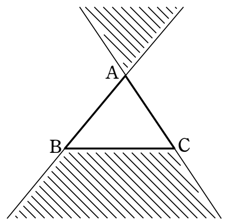
ゆえに，$0\leqq t\leqq 1$，$0\leqq s\leqq 3$ から，$t=\frac{1}{2}$，$s=\frac{3}{2}$ で $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ は最小値 16 をとり，このとき $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$ は最小値 4 をとる。

4 は $\mathrm{CH}=3\sqrt{2}$ より小さいから，これが求める最小値である。

$\boxed{8}$

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　[図]　境界線を含まない



解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{c+b}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　等式から　　$-a\overrightarrow{\mathrm{AP}}+b(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+c(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$

変形して　　$(a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

また，条件 (a) から　　$a+b+c\neq 0$

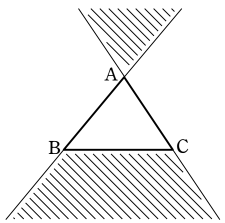
よって　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ゆえに，(1) から　　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

[1]　$a+b+c>0$ のとき，条件 (a) より $a<0$ であるから

$b+c>a+b+c>0$　　よって　$\frac{b+c}{a+b+c}>1$

[2]　$a+b+c<0$ のとき，条件 (a) より $b+c>0$ であるから　$\frac{b+c}{a+b+c}<0$

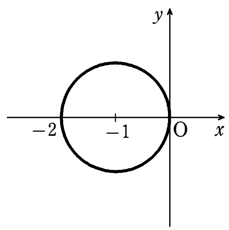


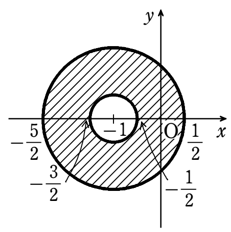
ゆえに，点 D は線分 BC (B，C を除く) 上の任意の点であり [1]，[2] から，点 P は線分 AD の外分点 (端点を除く) 全体を動く。

よって，図の斜線部分。ただし，境界線を除く。

$\boxed{9}$

解答　(1)　[図]　　(2)　[図]，境界線を含む





解説

P は点 A (2，0) を中心とする半径 1 の円 C_1 上を動くから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1\quad\text{…… ①}$$

Q は点 B (−4，0) を中心とする半径 2 の円 C_2 上を動くから

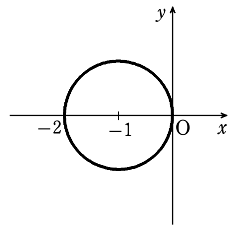
$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2\quad\text{…… ②}$$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ を変形して

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\quad\text{…… ③}$$

② に代入して　　$|2\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$

すなわち　　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right|=1$



$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=(-1,\ 0)$ であるから，点 S は点 (−1，0) を中心とする半径 1 の円上を動く。よって，点 S の動く範囲は右の図のようになる。

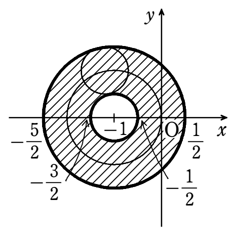
(2)　③ から　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OR}}-2\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

これを ① に代入すると

$$|2\overrightarrow{\mathrm{OR}}-2\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$$

すなわち　　$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}|=\frac{1}{2}$



よって，点 R は点 S を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円上を動く。

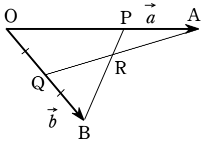
また，(1) より，点 S が点 (−1，0) を中心とする半径 1 の円上を動くことから，点 R の動く範囲は右の図の斜線部分になる。ただし，境界線を含む。

$\boxed{1}$

解答 $\frac{2}{5}\leqq t<1$

解説

条件から　$\overrightarrow{OP}=t\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\vec{b}$



QR：RA$=r:(1-r)$ $(0<r<1)$ とすると

$\overrightarrow{OR}=r\overrightarrow{OA}+(1-r)\overrightarrow{OQ}=r\vec{a}+\frac{1-r}{2}\vec{b}$ ……①

PR：RB$=s:(1-s)$ $(0<s<1)$とすると

$\overrightarrow{OR}=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OB}=(1-s)t\vec{a}+s\vec{b}$ ……②

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ が $0°<\theta<180°$ であるから　$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$

また，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，①，② より　$r=(1-s)t$，$\frac{1-r}{2}=s$

よって　$r=\frac{t}{2-t}$ $(0<t<1)$

ゆえに　$\overrightarrow{OR}=\frac{t}{2-t}\vec{a}+\frac{1-t}{2-t}\vec{b}$

よって　$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{t}{2-t}\vec{a}+\frac{1-t}{2-t}\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

$=\frac{1}{2-t}\{-t|\vec{a}|^2+(1-t)|\vec{b}|^2+(2t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}\}$

$=\frac{1}{2-t}\{-9t+4(1-t)+6(2t-1)\cos\theta\}$

$=\frac{1}{2-t}\{6(2t-1)\cos\theta-13t+4\}$

ここで，$0<t<1$ であるから　$2-t\neq0$

ゆえに，求める条件は，任意の θ $(0°<\theta<180°)$ に対して，$6(2t-1)\cos\theta-13t+4\neq0$ が成り立つことである。

ここで，$\cos\theta=p$ とすると　$-1<p<1$

よって，$f(p)=6(2t-1)p-13t+4$ とすると，$-1<p<1$を満たすすべての p について $f(p)\neq0$ が成り立つような t の値の範囲を求めればよい。

[1]　$t=\frac{1}{2}$ のとき

$f(p)=-\frac{5}{2}$ であるから，$f(p)\neq0$ を満たす。

[2]　$0<t<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<t<1$ のとき

$f(p)$ は1次関数であるから，$-1<p<1$ を満たすすべての p について $f(p)\neq0$ が成り立つための条件は

$f(-1)f(1)\geqq0$

ゆえに　$(-25t+10)(-t-2)\geqq0$

よって　$(5t-2)(t+2)\geqq0$　　ゆえに　$t\leqq-2$，$\frac{2}{5}\leqq t$

$0<t<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<t<1$との共通範囲は　$\frac{2}{5}\leqq t<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<t<1$

[1]，[2]から，求める t の値の範囲は　$\frac{2}{5}\leqq t<1$

$\boxed{2}$

解答 (1) 略　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$

解説

(1) (B)から　$|\vec{b}\cdot\vec{c}|\leqq|\vec{b}||\vec{c}|=1$

よって，(A)から　$|-\sqrt{3}\vec{a}\cdot\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq1$

したがって　$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$ ……①

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であると仮定すると，(B)から　$\vec{b}=\vec{a}$　または　$\vec{b}=-\vec{a}$

$\vec{b}=\vec{a}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2=1$ となり，① に矛盾する。

$\vec{b}=-\vec{a}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|^2=-1$ となり，① に矛盾する。

したがって，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でない。

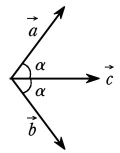
(2) $\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角を α，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を β とする。

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ から　$|\vec{a}||\vec{c}|\cos\alpha=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\beta$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ を代入すると　$\cos\alpha=\cos\beta$

$0°\leqq\alpha\leqq180°$，$0°\leqq\beta\leqq180°$ であるから　$\alpha=\beta$

(1)の結果より $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のなす角は，右の図のようになっている。



$\vec{a}\cdot\vec{c}=-\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{b}$ から　$\cos\alpha=-\sqrt{3}\cos2\alpha$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{3}(2\cos^2\alpha-1)$

$2\sqrt{3}\cos^2\alpha+\cos\alpha-\sqrt{3}=0$

$(2\cos\alpha+\sqrt{3})(\sqrt{3}\cos\alpha-1)=0$

$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{-\sqrt{3}}=-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{3}}$ であるから，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は　$\frac{1}{2}$ または $-\frac{1}{3}$

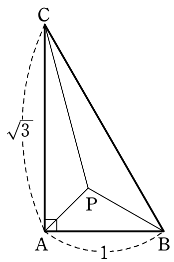
$\boxed{3}$

解答 (1)　$\angle APB=120°$，$\angle APC=120°$

(2)　$|\overrightarrow{PA}|=\frac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{PB}|=\frac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{PC}|=\frac{4}{\sqrt{7}}$

解説

(1)　$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}+\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=\vec{0}$ ……①



① より，$\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=-\left(\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}\right)$ であるから

$\left|\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}\right|$

両辺を2乗すると　$\frac{|\overrightarrow{PC}|^2}{|\overrightarrow{PC}|^2}=\frac{|\overrightarrow{PA}|^2}{|\overrightarrow{PA}|^2}+2\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}+\frac{|\overrightarrow{PB}|^2}{|\overrightarrow{PB}|^2}$

よって　$1=1+2\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}+1$

ゆえに　$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}=-\frac{1}{2}$

$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|}=\cos\angle APB$ であるから　$\cos\angle APB=-\frac{1}{2}$

よって　$\angle APB=120°$

① より，$\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}=-\left(\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}\right)$ であるから　$\left|\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}\right|$

両辺を2乗して上と同様に計算すると　$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|}=-\frac{1}{2}$

よって，$\cos\angle APC=-\frac{1}{2}$ から　$\angle APC=120°$

(2)　$\angle BAC=90°$，$AB=1$，$AC=\sqrt{3}$ から　$\angle ABC=60°$

よって　$\angle PAB=180°-\angle APB-\angle PBA$

$=180°-120°-\angle PBA=60°-\angle PBA=\angle PBC$

また　$\angle BPC=360°-\angle APB-\angle APC=360°-120°-120°=120°$

よって　$\angle APB=\angle BPC$

したがって　$\triangle PAB\backsim\triangle PBC$

AB：BC$=1:2$であるから，$\triangle PAB$と$\triangle PBC$の相似比は$1:2$である。

$AP=x$ とおくと，AP：BP$=1:2$ から　$BP=2x$

また，PB：PC$=1:2$ から　$PC=2PB=4x$

$\triangle PAB$に余弦定理を適用すると　$x^2+(2x)^2-2\cdot x\cdot2x\cos120°=1^2$

よって　$7x^2=1$　　$x>0$ から　$x=\frac{1}{\sqrt{7}}$

したがって　$|\overrightarrow{PA}|=\frac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{PB}|=\frac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{PC}|=\frac{4}{\sqrt{7}}$

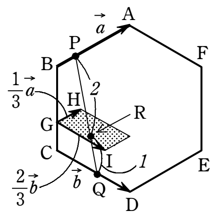
$\boxed{4}$

解答 $\frac{\sqrt{3}}{9}$

解説

点Pは辺AB上を動くから

$\overrightarrow{BP}=s\overrightarrow{BA}$ $(0\leqq s\leqq1)$



と表される。同様に，点Qは辺CD上を動くから

$\overrightarrow{CQ}=t\overrightarrow{CD}$ $(0\leqq t\leqq1)$

と表される。

よって，$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{b}$ とすると，

$\overrightarrow{BP}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{BC}+t\vec{b}$

と表される。

点Rは線分PQを$2:1$に内分するから

$\overrightarrow{BR}=\frac{1\cdot\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{BQ}}{2+1}=\frac{s}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BC}+t\vec{b})$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+s\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right)+t\left(\frac{2}{3}\vec{b}\right)$ ……①

ここで，G を $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ を満たす点とし，H，I を

$\overrightarrow{GH}=\frac{1}{3}\vec{a}$，$\overrightarrow{GI}=\frac{2}{3}\vec{b}$

を満たす点とする。

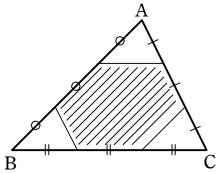
s と t はそれぞれ $0\leqq s\leqq1$，$0\leqq t\leqq1$ を満たすから，① より，点Rの通りうる範囲は

線分 GH，GI を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の周および内部
である。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は $60°$ であり，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ であるから，求める面積は

$$\mathrm{GH}\cdot\mathrm{GI}\sin 60°=\left|\frac{1}{3}\vec{a}\right|\left|\frac{2}{3}\vec{b}\right|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$\boxed{5}$

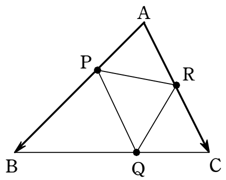
$\boxed{解答}$ ［図］，ただし，境界線は含まない



(解説)

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ (0<s<1)$， $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ (0<t<1)$，
$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{BC}}\ (0<u<1)$ 　とする。
$\triangle$PQR の重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+u\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

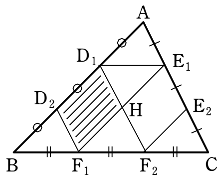


辺 AB の 3 等分点を A に近い方から $\mathrm{D_1}$，$\mathrm{D_2}$，
辺 AC の 3 等分点を A に近い方から $\mathrm{E_1}$，$\mathrm{E_2}$，
辺 BC の 3 等分点を B に近い方から $\mathrm{F_1}$，$\mathrm{F_2}$ 　とする。
また，$\mathrm{D_1F_2}$ と $\mathrm{E_1F_1}$ の交点を H とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AD_1}}+s\overrightarrow{\mathrm{D_1D_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{D_1H}}$$

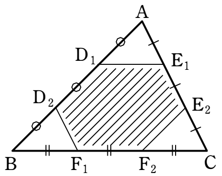
であり，$0<s<1$，$0<t<1$ であるから，点 S は
平行四辺形 $\mathrm{D_1D_2F_1H}$ の内部を動く。



この点 S に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+u\overrightarrow{\mathrm{F_1F_2}}$$

であり，$0<u<1$ であるから，$\triangle$PQR の重心 G の
存在範囲は六角形 $\mathrm{D_1D_2F_1F_2E_2E_1}$ の内部であり，
右の図の斜線部分である。
ただし，境界線は含まない。



$\boxed{6}$

$\boxed{解答}$ (1) 中心の位置ベクトルは $\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}$，半径は $\frac{2}{3}k+1$ 　　(2) $\frac{1}{2}<k<\frac{9}{2}$

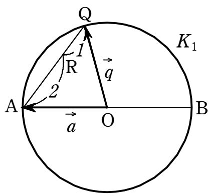
(解説)

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{q}}{3}-(-\vec{a})=\dfrac{4}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{q}$

よって　$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\vec{q}-\vec{a}+k\left(\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{q}\right)$

$$=\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}$$

ゆえに　$\vec{p}-\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}=\left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}$



よって　$\left|\vec{p}-\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\right|=\left|\frac{2}{3}k+1\right||\vec{q}|$

$k>0$ より $\frac{2}{3}k+1>0$ であり，$|\vec{q}|=1$ であるから

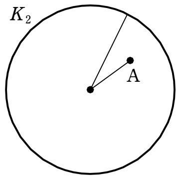
$$\left|\vec{p}-\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\right|=\frac{2}{3}k+1$$

したがって，点 P が描く図形 K_2 は中心の位置ベクトルが $\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}$，半径が

$\frac{2}{3}k+1$ の円である。

(2) (1) から，円 K_2 の内部に点 A が含まれるための条件は

$$\left|\vec{a}-\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\right|<\frac{2}{3}k+1$$



よって　$\left|2-\frac{4}{3}k\right||\vec{a}|<\frac{2}{3}k+1$

$|\vec{a}|=1$ であるから　$\left|2-\frac{4}{3}k\right|<\frac{2}{3}k+1$

両辺に 3 を掛けて　$|6-4k|<2k+3$

ゆえに　$-2k-3<6-4k<2k+3$

$-2k-3<6-4k$ から　$k<\frac{9}{2}$ ……①

$6-4k<2k+3$ から　$k>\frac{1}{2}$ ……②

①，② の共通範囲は　$\frac{1}{2}<k<\frac{9}{2}$ 　　これは $k>0$ に適する。

したがって，求める k の値の範囲は　$\frac{1}{2}<k<\frac{9}{2}$