$\boxed{1}$

次の角のうち，その動径が 80° の動径と一致するものはどれか。

440°，　900°，　1520°，　-80°，　-280°，　-1000°

$\boxed{2}$

次の角を，度数は弧度に，弧度は度数に，それぞれ書き直せ。

(1)　120°　　(2)　300°　　(3)　144°　　(4)　-540°

(5)　$\dfrac{11}{4}\pi$　　(6)　$-\dfrac{23}{6}\pi$　　(7)　$\dfrac{14}{3}\pi$　　(8)　$-\dfrac{19}{12}\pi$

$\boxed{3}$

座標平面上で，x 軸の正の部分を始線にとる。次の角の動径は第何象限にあるか。

(1)　$\dfrac{5}{6}\pi$　　(2)　$\dfrac{11}{3}\pi$　　(3)　$\dfrac{25}{6}\pi$　　(4)　$-\dfrac{3}{4}\pi$

$\boxed{4}$

θ が次の値のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

(1)　$\dfrac{2}{3}\pi$　　(2)　$\dfrac{7}{4}\pi$　　(3)　$-\dfrac{5}{6}\pi$

$\boxed{5}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうちの 1 つが次の値であるとき，残りの 2 つの三角関数の値を求めよ。[　] 内は θ の動径が含まれる象限を表す。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{12}{13}$　[第 1 象限]　　(2)　$\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$　[第 3 象限]

(3)　$\tan\theta=-2\sqrt{2}$　[第 4 象限]

$\boxed{6}$

次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{2}{5}$ のとき　$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

(2)　$\tan\theta=2\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき　$\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$\boxed{7}$

$\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{8}$

$\sin\theta+\cos\theta=t$ のとき，次の式の値を t で表せ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$\boxed{9}$

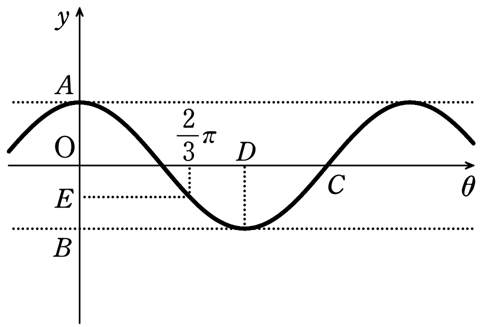
$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

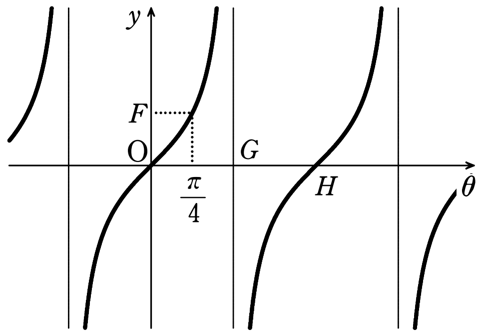
(1)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$　　(2)　$\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}$

$\boxed{10}$

下の図は $y=\cos\theta$ のグラフと $y=\tan\theta$ のグラフである。

目盛り A～H の値を求めよ。





$\boxed{11}$

次の関数のグラフをかけ。また，その周期をいえ。

(1) $y=\cos\theta-2$　(2) $y=\frac{1}{3}\sin\theta$　(3) $y=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

(4) $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$　(5) $y=\cos 4\theta$　(6) $y=\sin\frac{\theta}{3}$

(7) $y=3\tan\frac{\theta}{2}$

$\boxed{12}$

次の関数のグラフをかけ。また，その周期をいえ。

(1) $y=-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$　(2) $y=\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

(3) $y=3\sin\left(3\theta-\frac{\pi}{2}\right)+1$

$\boxed{13}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sqrt{2}\sin\theta+1\geqq 0$　(2) $2\cos\theta-\sqrt{3}<0$　(3) $\tan\theta+1\geqq 0$

$\boxed{14}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$　(2) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$　(4) $\tan\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

$\boxed{15}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)>1$

(3) $\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{16}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $2\sin^2\theta+\sin\theta=0$　(2) $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$

(3) $\sqrt{3}\tan^2\theta+4\tan\theta+\sqrt{3}=0$

$\boxed{17}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $2\cos^2\theta<5\cos\theta+3$　(2) $2\cos^2\theta\leqq\sin\theta+1$

$\boxed{18}$

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1) $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$　$(0\leqq\theta\leqq\pi)$　(2) $y=\tan\theta$　$\left(-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\right)$

$\boxed{19}$

次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1) $y=3\sin\theta-1$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

(2) $y=\sin^2\theta-4\cos\theta+1$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

(3) $y=2\tan^2\theta+4\tan\theta+7$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

解説

$\boxed{1}$

（解説）

$$440° = 80° + 360° \times 1$$
$$900° = 180° + 360° \times 2$$
$$1520° = 80° + 360° \times 4$$
$$-80° = 280° + 360° \times (-1)$$
$$-280° = 80° + 360° \times (-1)$$
$$-1000° = 80° + 360° \times (-3)$$

よって，求める角は　$440°$，$1520°$，$-280°$，$-1000°$

$\boxed{2}$

（解説）

(1) $\dfrac{\pi}{180} \times 120 = \dfrac{2}{3}\pi$（ラジアン）　(2) $\dfrac{\pi}{180} \times 300 = \dfrac{5}{3}\pi$（ラジアン）

(3) $\dfrac{\pi}{180} \times 144 = \dfrac{4}{5}\pi$（ラジアン）　(4) $\dfrac{\pi}{180} \times (-540) = -3\pi$（ラジアン）

(5) $\dfrac{180}{\pi} \times \dfrac{11}{4}\pi = 495$　よって　$495°$

(6) $\dfrac{180}{\pi} \times \left(-\dfrac{23}{6}\pi\right) = -690$　よって　$-690°$

(7) $\dfrac{180}{\pi} \times \dfrac{14}{3}\pi = 840$　よって　$840°$

(8) $\dfrac{180}{\pi} \times \left(-\dfrac{19}{12}\pi\right) = -285$　よって　$-285°$

$\boxed{3}$

（解説）

(1) 第 2 象限

(2) $\dfrac{11}{3}\pi = \dfrac{5}{3}\pi + 2\pi$　よって，第 4 象限

(3) $\dfrac{25}{6}\pi = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi \times 2$　よって，第 1 象限

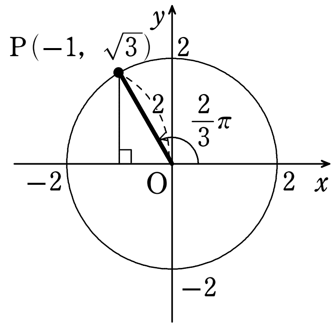
(4) $-\dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{5}{4}\pi + 2\pi \times (-1)$　よって，第 3 象限

$\boxed{4}$

（解説）

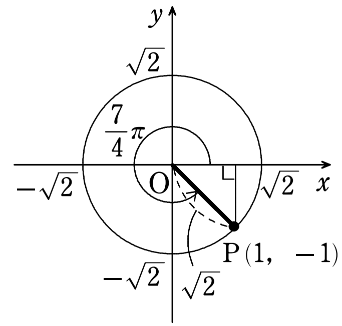
(1) $\dfrac{2}{3}\pi$ の動径と，原点を中心とする半径が 2 の円との交点を P とすると，P の座標は $(-1,\ \sqrt{3})$ である。よって

$$\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2},$$
$$\tan\frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$$



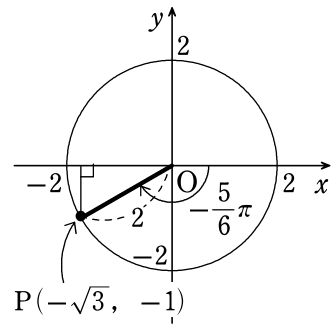
(2) $\dfrac{7}{4}\pi$ の動径と，原点を中心とする半径が $\sqrt{2}$ の円との交点を P とすると，P の座標は $(1,\ -1)$ である。よって

$$\sin\frac{7}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\cos\frac{7}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\tan\frac{7}{4}\pi = -1$$



(3) $-\dfrac{5}{6}\pi$ の動径と，原点を中心とする半径が 2 の円との交点を P とすると，P の座標は $(-\sqrt{3},\ -1)$ である。よって

$$\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2},$$
$$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\tan\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$\boxed{5}$

(解説)

(1)　θ の動径は第 1 象限にあるから　　$\cos\theta>0$

よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{12}{13}\div\dfrac{5}{13}=\dfrac{12}{5}$

(2)　θ の動径は第 3 象限にあるから　　$\sin\theta<0$

よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\div\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(3)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-2\sqrt{2})^2=9$　　よって　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{9}$

θ の動径は第 4 象限にあるから　　$\cos\theta>0$

ゆえに　　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{3}$

また　　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=-2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)
$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=2\div\frac{2}{5}=5$$

(2)
$$\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\frac{(1-\sin\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$
$$=\frac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$
$$=\frac{2-2\sin\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}=\frac{2}{\cos\theta}$$

ここで　　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+2^2=5$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から　　$\cos\theta>0$

よって　　$\dfrac{1}{\cos\theta}=\sqrt{5}$　　　ゆえに　　(与式)$=2\sqrt{5}$

$\boxed{7}$

(解説)

$\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=3+2\sqrt{2}$ の分母を払って　　$1+\tan\theta=(3+2\sqrt{2})(1-\tan\theta)$

整理して　　$2(2+\sqrt{2})\tan\theta=2(1+\sqrt{2})$

したがって　　$\tan\theta=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$$=\frac{2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって　　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{2}$　　　ゆえに　　$\cos^2\theta=\dfrac{2}{3}$

したがって　　$\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき　　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき　　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

以上から　　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　または　$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=t^2$ から　$1+2\sin\theta\cos\theta=t^2$

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\frac{3t-t^3}{2}$$

$\boxed{9}$

(解説)

(1)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\quad\cdots\cdots①$$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$　　ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

これを ① に代入して　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=-\dfrac{8}{3}$

(2)　$\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}=\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)^3-3\tan\theta\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}\left(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}\right)$

$$=\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^3-3\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\left(-\frac{8}{3}\right)^3-3\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{512}{27}+8=-\frac{296}{27}$$

$\boxed{10}$

(解説)

$y=\cos\theta$ の値域は $-1\leqq y\leqq 1$ であるから　$A=1$，$B=-1$

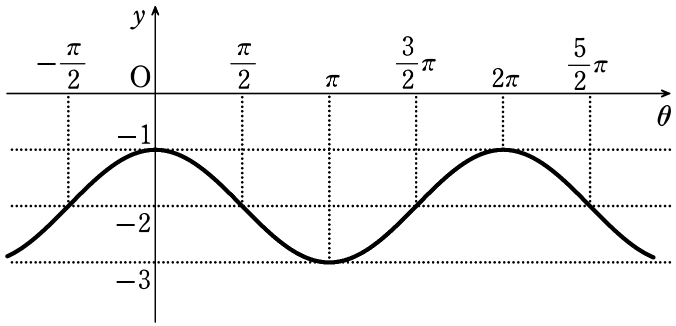
また　$C=\dfrac{3}{2}\pi$，$D=\pi$，$E=\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$

$F=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$，$G=\dfrac{\pi}{2}$，$H=\pi$

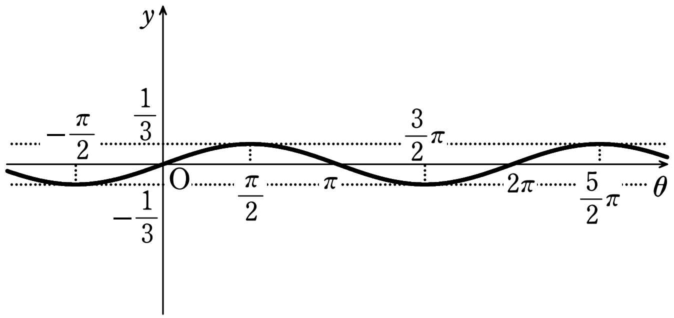
$\boxed{11}$

(解説)

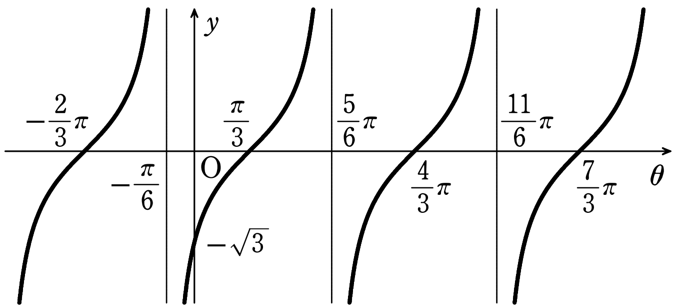
(1)　$y=\cos\theta-2$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを y 軸方向に -2 だけ平行移動したもので，[図] のようになる。周期は　2π



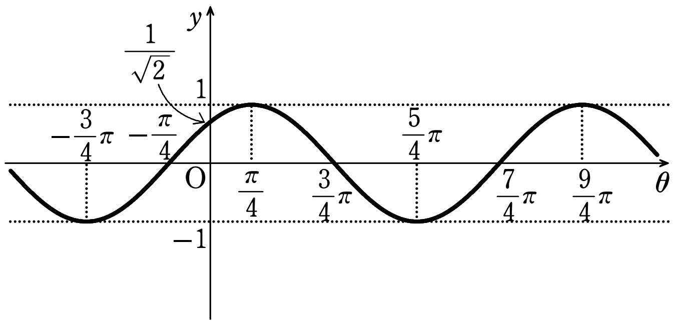
(2)　$y=\dfrac{1}{3}\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ 倍に縮小したもので，[図] のようになる。周期は　2π



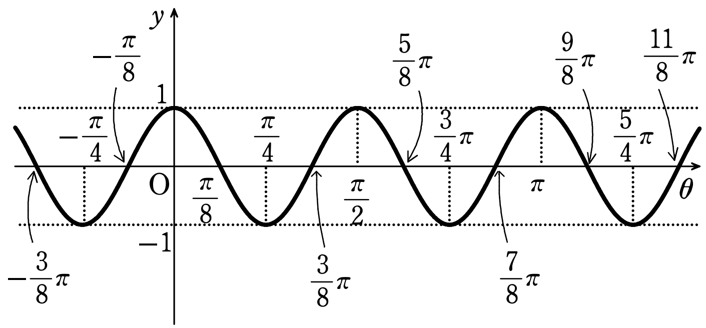
(3)　$y=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\tan\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，[図] のようになる。周期は　π



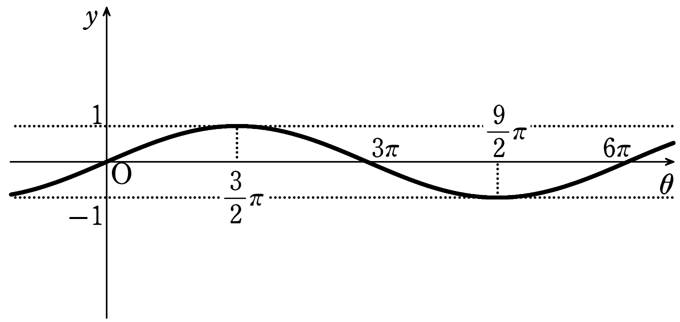
(4)　$y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したもので，〔図〕のようになる。周期は　2π



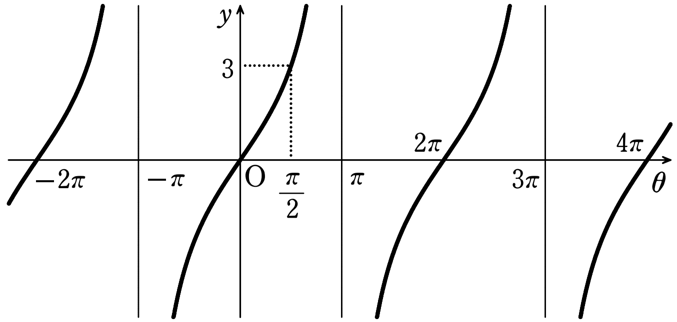
(5)　$y=\cos 4\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向に $\frac{1}{4}$ 倍に縮小したもので，〔図〕のようになる。周期は　$2\pi\div 4=\frac{\pi}{2}$



(6)　$y=\sin\frac{\theta}{3}$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向に 3 倍に拡大したもので，〔図〕のようになる。周期は　$2\pi\div\frac{1}{3}=6\pi$



(7)　$y=3\tan\frac{\theta}{2}$ のグラフは，$y=\tan\theta$ のグラフを y 軸をもとにして θ 軸方向に 2 倍に拡大し，更に θ 軸をもとにして y 軸方向に 3 倍に拡大したもので，〔図〕のようになる。周期は　$\pi\div\frac{1}{2}=2\pi$

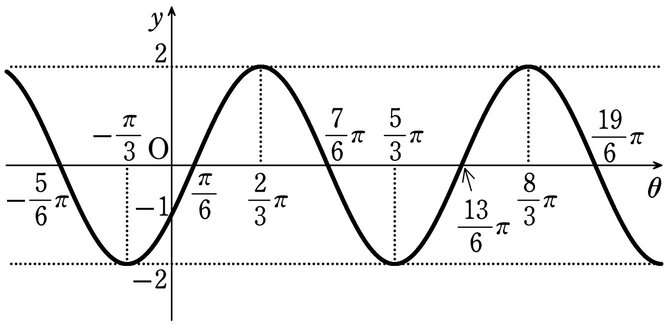


$\boxed{12}$

（解説）

(1)　$y=-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=2\cos\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動した後，θ 軸に関して対称移動したもので，[図] のようになる。

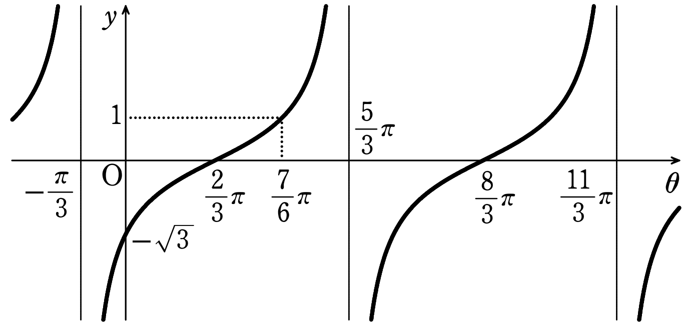
周期は　2π



(2)　$\tan\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\dfrac{1}{2}\left(\theta-\dfrac{2}{3}\pi\right)$

よって，$y=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\tan\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{2}{3}\pi$ だけ平行移動したもので，[図] のようになる。

周期は　$\pi\div\dfrac{1}{2}=2\pi$



(3)　$3\sin\left(3\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)+1=3\sin3\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$

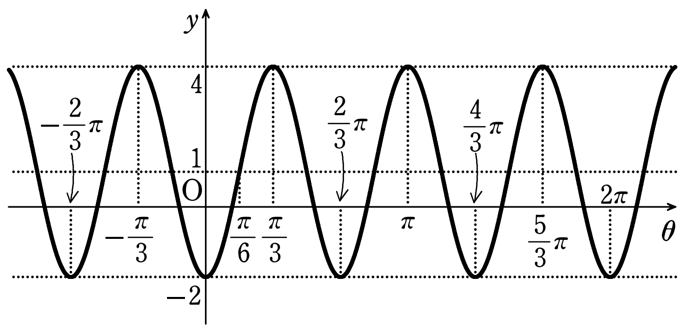
よって，$y=3\sin\left(3\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)+1$ のグラフは，$y=3\sin3\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，[図] のようになる。

周期は　$2\pi\div3=\dfrac{2}{3}\pi$

別解　$3\sin\left(3\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)+1=3\sin\left\{-\left(\dfrac{\pi}{2}-3\theta\right)\right\}+1=-3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3\theta\right)+1$

$=-3\cos3\theta+1$

よって，$y=3\sin\left(3\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)+1$ のグラフは，$y=3\cos3\theta$ のグラフを θ 軸に関して対称移動した後，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，[図] のようになる。



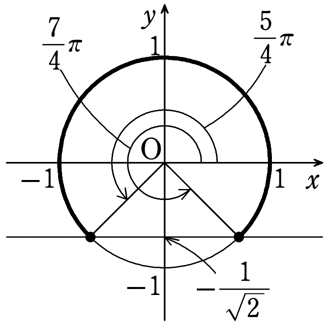
13

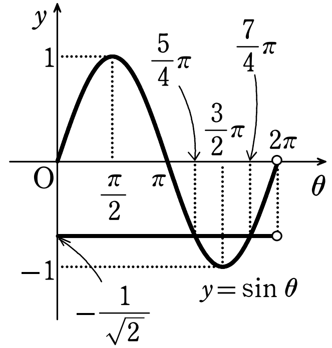
解説

(1)　$\sqrt{2}\sin\theta+1\geqq 0$ から　　$\sin\theta\geqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値は　　$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

図から，不等式の解は　　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$

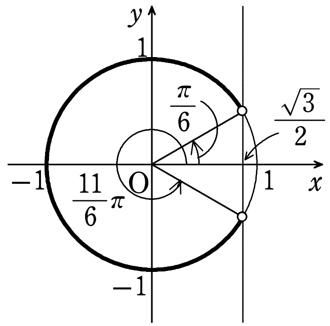


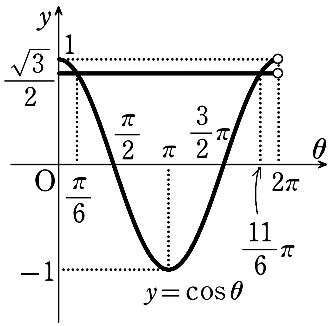


(2)　$2\cos\theta-\sqrt{3}<0$ から　　$\cos\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ の値は　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{11}{6}\pi$

図から，不等式の解は　　$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$

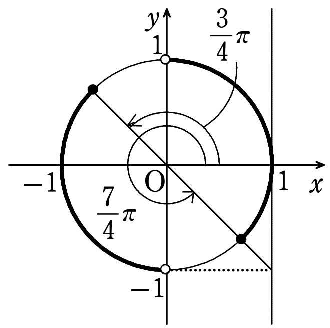


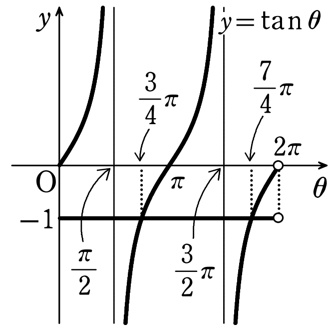


(3)　$\tan\theta+1\geqq 0$ から　　$\tan\theta\geqq-1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\tan\theta=-1$ を満たす θ の値は　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

図から，不等式の解は　　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq\theta<\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi\leqq\theta<2\pi$





$\boxed{14}$

解説

(1) $\theta+\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと　$\sin t=-\dfrac{1}{2}$ ……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<2\pi+\dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{4}\leqq t<\dfrac{9}{4}\pi$ ……②

② の範囲で，① を解くと　$t=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

すなわち　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$　よって　$\theta=\dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{19}{12}\pi$

(2) $\theta+\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\cos t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}<2\pi+\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{7}{3}\pi$ ……②

② の範囲で，① を解くと　$t=\dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$

すなわち　$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{11}{6}\pi,\ \dfrac{13}{6}\pi$　よって　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

(3) $2\theta+\dfrac{\pi}{6}=t$ とおくと　$\sin t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{6}\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{6}<4\pi+\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{25}{6}\pi$ ……②

② の範囲で，① を解くと　$t=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi,\ \dfrac{11}{4}\pi$

すなわち　$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi,\ \dfrac{11}{4}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{24},\ \dfrac{7}{24}\pi,\ \dfrac{25}{24}\pi,\ \dfrac{31}{24}\pi$

(4) $2\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\tan t=-\sqrt{3}$ ……①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{3}<4\pi-\dfrac{\pi}{3}$

すなわち　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{11}{3}\pi$ ……②

② の範囲で，① を解くと　$t=-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi$

すなわち　$2\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi$

よって　$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

15

解説

(1) $\theta+\dfrac{\pi}{6}=t$ とおくと　$\sin t<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　…… ①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}<2\pi+\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{13}{6}\pi$　…… ②

② の範囲で，① を解くと　$\dfrac{\pi}{6}\leqq t<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi<t<\dfrac{13}{6}\pi$

すなわち　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi<\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$

よって　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{12}$，$\dfrac{7}{12}\pi<\theta<2\pi$

(2) $\theta-\dfrac{\pi}{3}=t$ とおくと　$\tan t>1$　…… ①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}<2\pi-\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq t<\dfrac{5}{3}\pi$　…… ②

② の範囲で，① を解くと　$\dfrac{\pi}{4}<t<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{4}\pi<t<\dfrac{3}{2}\pi$

すなわち　$\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{4}\pi<\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{3}{2}\pi$

よって　$\dfrac{7}{12}\pi<\theta<\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{19}{12}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$

(3) $2\theta+\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと　$\cos t\leqq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　…… ①

$0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{4}<4\pi+\dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{4}\leqq t<\dfrac{17}{4}\pi$　…… ②

② の範囲で，① を解くと　$\dfrac{5}{6}\pi\leqq t\leqq\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{17}{6}\pi\leqq t\leqq\dfrac{19}{6}\pi$

すなわち　$\dfrac{5}{6}\pi\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{17}{6}\pi\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{19}{6}\pi$

よって　$\dfrac{7}{24}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{11}{24}\pi$，$\dfrac{31}{24}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{35}{24}\pi$

16

解説

(1) $2\sin^2\theta+\sin\theta=0$ から　$\sin\theta(2\sin\theta+1)=0$　よって　$\sin\theta=0,\ -\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\sin\theta=0$ より　$\theta=0,\ \pi$

$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

ゆえに，解は　$\theta=0,\ \pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

(2) $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$ から　$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta=0$

よって　$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$　ゆえに　$(\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)=0$

$\cos\theta+2\neq0$ であるから　$2\cos\theta-1=0$　よって　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

(3) $\sqrt{3}\tan^2\theta+4\tan\theta+\sqrt{3}=0$ から　$(\tan\theta+\sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta+1)=0$

よって　$\tan\theta=-\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\tan\theta=-\sqrt{3}$ より　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

ゆえに，解は　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

$\boxed{17}$

(解説)

(1)　$2\cos^2\theta<5\cos\theta+3$ から　　$2\cos^2\theta-5\cos\theta-3<0$

よって　　　$(\cos\theta-3)(2\cos\theta+1)<0$　……①

$\cos\theta-3<0$ であるから，① より　　$2\cos\theta+1>0$　　　　ゆえに　　$\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，解は　　$0\leqq\theta<\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$

(2)　$2\cos^2\theta\leqq\sin\theta+1$ から　　$2(1-\sin^2\theta)\leqq\sin\theta+1$

よって　　　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1\geqq0$

ゆえに　　　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)\geqq0$　……①

$\sin\theta+1\geqq0$ であるから，① より

$\sin\theta+1=0$　または　$2\sin\theta-1\geqq0$

よって　　　$\sin\theta=-1$　または　$\sin\theta\geqq\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\sin\theta=-1$ より　　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\theta\geqq\dfrac{1}{2}$ より　　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

したがって，解は　　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

$\boxed{18}$

(解説)

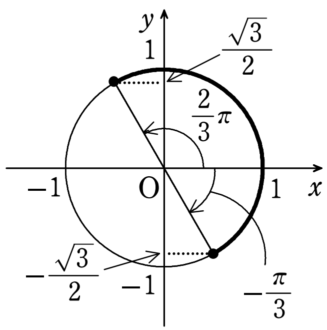
(1)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ から　　$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{2}{3}\pi$

よって，y は

$\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ で最大値 1，

$\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$　すなわち　$\theta=0$ で最小値 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

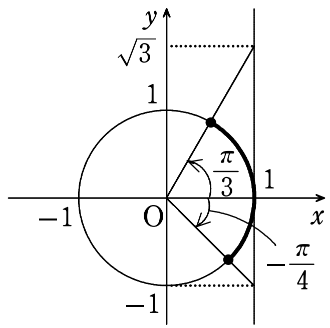
をとる。



(2)　$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ において，y は

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\sqrt{3}$，

$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 -1　をとる。

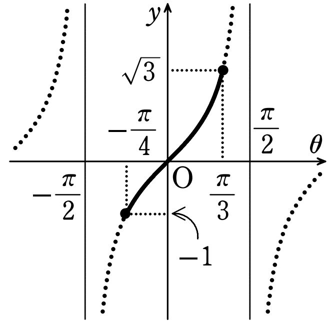


$\boxed{別解}$　$y=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，右の図のようになる。

よって，y は

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $\sqrt{3}$，

$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ で最小値 -1　をとる。



19

解説

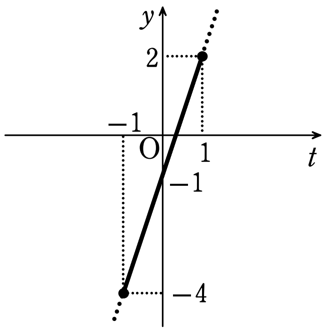
(1)　$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$$-1\leqq t\leqq 1$$

また　　$y=3t-1$

よって，y は　$t=1$　で最大値 2，

　　　　$t=-1$ で最小値 -4　をとる。



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$t=1$ ならば　　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$t=-1$ ならば　　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

ゆえに　　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 2，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -4

(2)　　$y=(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta+1$

$\quad=-\cos^2\theta-4\cos\theta+2$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$$-1\leqq t\leqq 1\quad\cdots\cdots①$$

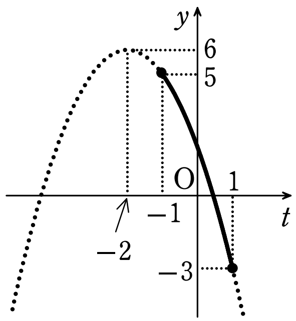
y を t で表すと

$$y=-t^2-4t+2=-(t+2)^2+6$$

① の範囲において，y は

　$t=-1$ で最大値 5，

　$t=1$ で最小値 -3　をとる。



$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$t=-1$ ならば　$\theta=\pi$，　$t=1$ ならば　$\theta=0$

よって　　$\theta=\pi$ で最大値 5，$\theta=0$ で最小値 -3

(3)　$\tan\theta=t$ とおくと，t は任意の実数値をとりうる。

y を t で表すと　　$y=2t^2+4t+7=2(t^2+2t)+7$

$\quad=2(t+1)^2+5$

よって，y は $t=-1$ で最小値 5 をとる。

また，y はいくらでも大きくなるから，最大値はない。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$t=-1$ ならば　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

ゆえに　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$ で最小値 5，最大値はない。