1

解答 (1) $(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

(2) $(a,\ \sin\theta,\ \cos\theta)=(1,\ 0,\ -1),\ \left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

解説

(1) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{9}{5}$

したがって $\cos^2\theta=\dfrac{5}{9}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから $\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\mp\dfrac{2}{3}$ (複号同順)

よって $(\cos\theta,\ \sin\theta)=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right),\ \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$

(2) $\begin{cases}2\sin\theta-\cos\theta=1 & \cdots\cdots ①\\ \sin\theta-\cos\theta=a & \cdots\cdots ②\end{cases}$ とする。

①から $\cos\theta=2\sin\theta-1$ ……③

③を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して $\sin^2\theta+(2\sin\theta-1)^2=1$

整理して $5\sin^2\theta-4\sin\theta=0$

よって $\sin\theta(5\sin\theta-4)=0$

ゆえに $\sin\theta=0,\ \dfrac{4}{5}$

[1] $\sin\theta=0$ のとき ③から $\cos\theta=-1$

このとき，②から $a=0-(-1)=1$

[2] $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ のとき ③から $\cos\theta=2\cdot\dfrac{4}{5}-1=\dfrac{3}{5}$

このとき，②から $a=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{5}$

以上から $\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{\sin\theta=0}$，$\boldsymbol{\cos\theta=-1}$

または $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{5}}$，$\boldsymbol{\sin\theta=\dfrac{4}{5}}$，$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{3}{5}}$

2

解答 (1) 2 (2) (ア) 2 (イ) 5 (ウ) 3 (エ) 7 (3) -1

解説

(1) $(与式)=\cos^2\theta\cdot\dfrac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=\cos^2\theta\cdot\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}$

$=\cos^2\theta\cdot\dfrac{2}{\cos^2\theta}=2$

(2) $(与式)=\dfrac{4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-9\cos^2\theta-8\sin\theta\cos\theta}{7(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-\sin^2\theta+17\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{4\sin^2\theta-8\sin\theta\cos\theta-5\cos^2\theta}{6\sin^2\theta+17\sin\theta\cos\theta+7\cos^2\theta}$

$=\dfrac{(2\sin\theta+\cos\theta)(2\sin\theta-5\cos\theta)}{(2\sin\theta+\cos\theta)(3\sin\theta+7\cos\theta)}$

$=\dfrac{2\sin\theta-5\cos\theta}{3\sin\theta+7\cos\theta}=\dfrac{2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-5}{3\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+7}=\dfrac{{}^{ア}2\tan\theta-{}^{イ}5}{{}^{ウ}3\tan\theta+{}^{エ}7}$

(3) $2(\cos^6\theta+\sin^6\theta)-3(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$

$=2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)-3(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$

$=-(\cos^4\theta+2\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)=-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2=-1$

3

解答 (1) $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ (2) $\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$

解説

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$ であるから，

方程式は $1+2\sin\theta\cos\theta=1+\sin\theta$

ゆえに $\sin\theta(2\cos\theta-1)=0$

よって $\sin\theta=0$ または $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\sin\theta=0$ より $\theta=0,\ \pi$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

したがって，解は $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

(2) 不等式から $4\sqrt{3}(1-\cos^2\theta)+(6-2\sqrt{3})\cos\theta+3-4\sqrt{3}>0$

整理して $4\sqrt{3}\cos^2\theta+(2\sqrt{3}-6)\cos\theta-3<0$

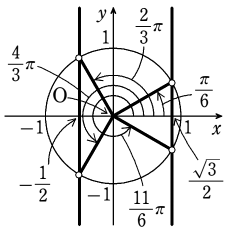
$4\cos^2\theta+2(1-\sqrt{3})\cos\theta-\sqrt{3}<0$

ゆえに $(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-\sqrt{3})<0$

よって $-\dfrac{1}{2}<\cos\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，解は

$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$



4

解答 $\sin\theta=\dfrac{2}{3},\ a=2$

解説

解と係数の関係により

$\sin\theta+\cos2\theta=\dfrac{21}{27}=\dfrac{7}{9}$ ……①，$\sin\theta\cos2\theta=\dfrac{a}{27}$ ……②

①から $\sin\theta+1-2\sin^2\theta=\dfrac{7}{9}$

よって $18\sin^2\theta-9\sin\theta-2=0$

したがって $(3\sin\theta-2)(6\sin\theta+1)=0$ ……③

$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\dfrac{1}{2}<\sin\theta<1$

ゆえに，③から $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$

よって，①から $\cos2\theta=\dfrac{7}{9}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$

したがって，②から $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{a}{27}$ ゆえに $a=2$

5

解答 (1) $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値4；$x=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -5 (2) $3<a<4$

解説

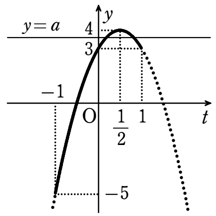
(1) $f(x)=2\sin^2x+4\sin x+3(1-2\sin^2x)=-4\sin^2x+4\sin x+3$

$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ から $-1\leqq t\leqq1$

$y=f(x)$ とし，y を t の式で表すと

$y=-4t^2+4t+3$

$=-4\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+4$



$-1\leqq t\leqq1$ の範囲において，y は

$t=\dfrac{1}{2}$ で最大値4，$t=-1$ で最小値 -5

をとる。$0\leqq x<2\pi$ であるから

$t=\dfrac{1}{2}$ となるのは，$\sin x=\dfrac{1}{2}$ から $x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$t=-1$ となるのは，$\sin x=-1$ から $x=\dfrac{3}{2}\pi$

のときである。したがって

$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ のとき最大値4；$x=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -5

(2) $\sin x=t$ を満たす x $(0\leqq x<2\pi)$ の個数は次のようになる。

$-1<t<1$ のとき 2個

$t=-1,\ 1$ のとき 1個

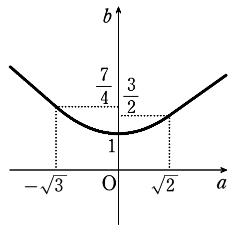
$t<-1,\ 1<t$ のとき 0個

よって，$f(x)=a$ が相異なる4個の解をもつための条件は，放物線 $y=-4t^2+4t+3$ と直線 $y=a$ が $-1<t<1$ の範囲で異なる2個の共有点をもつことである。

(1)の図から，求める a の値の範囲は $3<a<4$

6

解答 [図] $a=0$ のとき最小値1



解説

$y=(1-\sin^2\theta)+a\sin\theta=-\sin^2\theta+a\sin\theta+1$

$\sin\theta=x$ とおくと，$-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ から $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

y を x の式で表すと $y=-x^2+ax+1$

この右辺を $f(x)$ とすると　$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+1$

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=\frac{a}{2}$ である。

[1]　$\frac{a}{2}\leqq-\frac{\sqrt{3}}{2}$　すなわち　$a\leqq-\sqrt{3}$ のとき

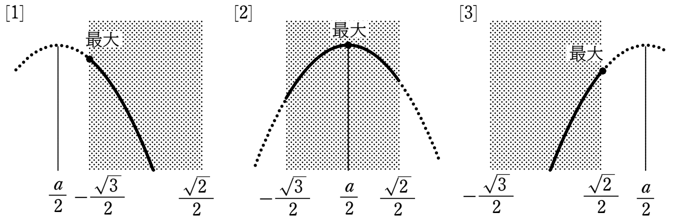
$$M(a)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+a\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{4}$$

[2]　$-\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{a}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$　すなわち　$-\sqrt{3}<a<\sqrt{2}$ のとき

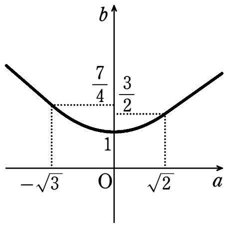
$$M(a)=f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}+1$$

[3]　$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\frac{a}{2}$　すなわち　$\sqrt{2}\leqq a$ のとき

$$M(a)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{1}{2}$$



以上から，$b=M(a)$ のグラフは，右の図のようになる。
したがって，$M(a)$ は $a=0$ のとき最小値 1 をとる。



7

解答　(1)　証明略，$\cos36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$　　(2)　証明略，$\sin18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

解説

(1)　示すべき等式は，$\sin108^\circ=\sin72^\circ$ ……① である。

① について　　(左辺)$=\sin(180^\circ-72^\circ)=\sin72^\circ=$(右辺)

よって，① すなわち $\sin3\theta=\sin2\theta$ が成り立つ。

この等式から　$3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\sin\theta=\sin36^\circ\neq0$ であるから，両辺を $\sin\theta$ で割って

$3-4\sin^2\theta=2\cos\theta$

ゆえに　$3-4(1-\cos^2\theta)=2\cos\theta$

整理して　$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

よって　$\cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$0<\cos36^\circ<1$ であるから　　$\cos36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

(2)　示すべき等式は，$\sin36^\circ=\cos54^\circ$ ……① である。

① について　　(左辺)$=\sin(90^\circ-54^\circ)=\cos54^\circ=$(右辺)

よって，① すなわち $\sin2\theta=\cos3\theta$ が成り立つ。

この等式から　　$2\sin\theta\cos\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta$

$\cos\theta=\cos18^\circ\neq0$ であるから，両辺を $\cos\theta$ で割って

$2\sin\theta=-3+4\cos^2\theta$

よって　　$2\sin\theta=-3+4(1-\sin^2\theta)$

整理して　　$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$

これを $\sin\theta$ について解くと　　$\sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

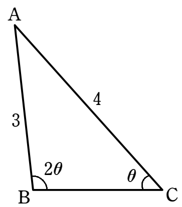
$0<\sin18^\circ<1$ であるから　　$\sin18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

8

解答　(1)　$\frac{2}{3}$　　(2)　$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　(3)　$\frac{7\sqrt{5}}{27}$　　(4)　$\frac{7}{3}$

解説

(1)　正弦定理により　　$\frac{3}{\sin\theta}=\frac{4}{\sin2\theta}$



よって　　$3\sin2\theta=4\sin\theta$

ゆえに　　$6\sin\theta\cos\theta=4\sin\theta$

すなわち　　$2\sin\theta(3\cos\theta-2)=0$

$\sin\theta\neq0$ であるから　　$\cos\theta=\frac{2}{3}$

(2)　$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

(3)　3 倍角の公式から

$$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}-4\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3$$
$$=\sqrt{5}-\frac{20\sqrt{5}}{27}=\frac{7\sqrt{5}}{27}$$

(4)　$\angle A=\pi-(\angle B+\angle C)=\pi-(2\theta+\theta)=\pi-3\theta$

よって，正弦定理により　　$\frac{BC}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{3}{\sin\theta}$

ゆえに　　$BC=\frac{3}{\sin\theta}\cdot\sin(\pi-3\theta)=\frac{3}{\sin\theta}\cdot\sin3\theta=3\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{7\sqrt{5}}{27}=\frac{7}{3}$

9

解答　$1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{6}$

解説

不等式から　　$1-2\sin^2x+4a\sin x+2a^2-8a-9<0$

整理して　　$2\sin^2x-4a\sin x-2a^2+8a+8>0$　……①

ここで，$\sin x=t$ とおくと　　$-1\leqq t\leqq1$　……②

① を t の式で表すと　　$2t^2-4at-2a^2+8a+8>0$

よって　　$t^2-2at-a^2+4a+4>0$

$f(t)=t^2-2at-a^2+4a+4$ とする。

不等式 ① の解がすべての実数であるための条件は，② の範囲における $f(t)$ の最小値が正となることである。

$f(t)=(t-a)^2-2a^2+4a+4$ であるから，軸は $t=a$

[1]　$a<-1$ のとき

$f(t)$ は ② の範囲で増加するから，求める条件は

$f(-1)=1+2a-a^2+4a+4>0$

ゆえに　　$a^2-6a-5<0$

よって　　$3-\sqrt{14}<a<3+\sqrt{14}$

これと $a<-1$ との共通範囲はない。

[2]　$-1\leqq a\leqq1$ のとき

求める条件は　　$f(a)=-2a^2+4a+4>0$

ゆえに　　$a^2-2a-2<0$

よって　　$1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{3}$

$-1\leqq a\leqq1$ との共通範囲は　　$1-\sqrt{3}<a\leqq1$

[3]　$a>1$ のとき

$f(t)$ は ② の範囲で減少するから，求める条件は

$f(1)=1-2a-a^2+4a+4>0$

ゆえに　　$a^2-2a-5<0$

よって　　$1-\sqrt{6}<a<1+\sqrt{6}$

$a>1$ との共通範囲は　　$1<a<1+\sqrt{6}$

[1]～[3] の範囲を合わせて　　$1-\sqrt{3}<a<1+\sqrt{6}$

10

解答　(ア)　$2+\sqrt{2}$　　(イ)　$2-\sqrt{2}$

解説

$x^2+y^2=1$ であるから，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくことができる。

$P=3x^2+2xy+y^2$ とすると

$$P=3\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$$
$$=3\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}+\sin2\theta+\frac{1-\cos2\theta}{2}$$
$$=\sin2\theta+\cos2\theta+2=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+2$$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{4}\leqq2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{17}{4}\pi$ であるから　　$-1\leqq\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$

ゆえに　　$-\sqrt{2}+2\leqq\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+2\leqq\sqrt{2}+2$

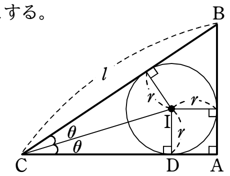
よって，P の最大値は ${}^{ア}2+\sqrt{2}$，最小値は ${}^{イ}2-\sqrt{2}$ である。

11 [立命館大]

解答　(1)　略　　(2)　$-\frac{l}{2}t^2+\frac{l}{2}t$，最大値 $\frac{l}{8}$

解説

(1)　△ABC の内心を I とし，円 I と辺 AC との接点を D とする。



$\angle C=2\theta$ であるから　　$\angle ICD=\theta$

よって　　$AC=AD+DC=ID+\frac{ID}{\tan\theta}$

$$=r\left(1+\frac{1}{\tan\theta}\right)=\frac{r(\tan\theta+1)}{\tan\theta}$$

また　　$AC=l\cos2\theta$

ゆえに　$l\cos 2\theta=\dfrac{r(\tan\theta+1)}{\tan\theta}$

$\tan\theta+1\neq 0$ であるから　$r=\dfrac{l\cos 2\theta\tan\theta}{1+\tan\theta}$

(2) $\tan\theta=t$ のとき　$\cos 2\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　よって，(1) から

$$\frac{r}{1+\cos 2\theta}=\frac{1}{1+\cos 2\theta}\cdot\frac{l\cos 2\theta\tan\theta}{1+\tan\theta}=l\cdot\frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{(1-t^2)t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+t}=l\cdot\frac{(1-t)t}{2}$$

$$=-\frac{l}{2}t^2+\frac{l}{2}t=-\frac{l}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{l}{8}\quad\cdots\cdots①$$

$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$0<\tan\theta<1$　すなわち　$0<t<1$

この範囲において，①は，$t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{l}{8}$ をとる。

12

解答　(1) $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi$　(2) $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi<x\leqq\pi$

解説

(1) $\cos x+\cos 3x=0$ から　$2\cos 2x\cos x=0$

よって　$\cos 2x=0$　または　$\cos x=0$

$0\leqq x\leqq\pi$ から　$0\leqq 2x\leqq 2\pi$

ゆえに，$\cos 2x=0$ から　$2x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$　よって　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

また　$\cos x=0$　から　$x=\dfrac{\pi}{2}$

したがって，解は　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi$

(2) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x<0$ から　$\cos 3x+2\cos 3x\cos 2x<0$

よって　$\cos 3x(2\cos 2x+1)<0$

ゆえに　$\left(\cos 3x>0 \text{ かつ } \cos 2x<-\dfrac{1}{2}\quad\cdots\cdots①\right)$　または

$\left(\cos 3x<0 \text{ かつ } \cos 2x>-\dfrac{1}{2}\quad\cdots\cdots②\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ から　$0\leqq 2x\leqq 2\pi$，$0\leqq 3x\leqq 3\pi$

よって，①から　$\left(0\leqq 3x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi<3x<\dfrac{5}{2}\pi\right)$　かつ　$\left(\dfrac{2}{3}\pi<2x<\dfrac{4}{3}\pi\right)$

すなわち　$\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{5}{6}\pi\right)$　かつ　$\left(\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2}{3}\pi\right)$

よって　$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{2}{3}\pi$

また，②から　$\left(\dfrac{\pi}{2}<3x<\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi<3x\leqq 3\pi\right)$　かつ　$\left(0\leqq 2x<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi<2x\leqq 2\pi\right)$

すなわち　$\left(\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi<x\leqq\pi\right)$　かつ　$\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi<x\leqq\pi\right)$

よって　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{6}\pi<x\leqq\pi$

したがって，解は　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi<x\leqq\pi$

1

解答　(1) $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$　(2) $a\geqq-\dfrac{1}{2}$

解説

$\tan x=t$ とおき，$g(t)=2at-t^2-2a$ とする。

(1) $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，t のとりうる値は　実数全体

よって，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)<1$ が常に成り立つための条件は，すべての実数 t に対して $g(t)<1$ が常に成り立つことである。

$g(t)=2at-t^2-2a=-(t-a)^2+a^2-2a$ であるから，t が実数全体を動くとき，

$g(t)$ は $t=a$ のとき最大値 a^2-2a をとる。

ゆえに，満たすべき条件は　$a^2-2a<1$　すなわち　$a^2-2a-1<0$

これを解くと　$1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

(2) $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，t のとりうる値は　$0<t<1$

よって，$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)<1$ が常に成り立つための条件は，$0<t<1$ の範囲において常に $g(t)<1$ が成り立つことである。

[1] $a\leqq 0$ のとき

区間 $0<t<1$ と軸の位置関係は右の図のようになる。

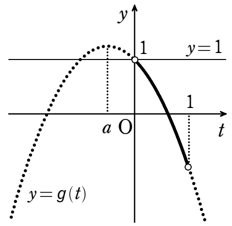
満たすべき条件は　$g(0)\leqq 1$

すなわち　$-2a\leqq 1$

これを解くと　$a\geqq-\dfrac{1}{2}$

$a\leqq 0$ と共通範囲を求めると

$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 0$



[2] $0<a<1$ のとき

区間 $0<t<1$ と軸の位置関係は右の図のようになる。

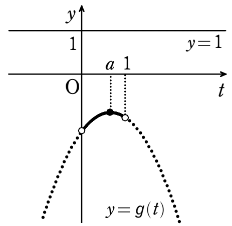
満たすべき条件は　$g(a)<1$

すなわち　$a^2-2a<1$

(1) より　$1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

$0<a<1$ と共通範囲を求めると

$0<a<1$



[3] $a\geqq 1$ のとき

区間 $0<t<1$ と軸の位置関係は右の図のようになる。

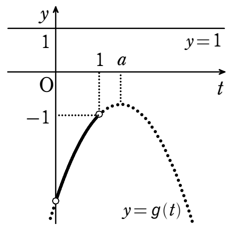
満たすべき条件は　$g(1)\leqq 1$

すなわち　$-1\leqq 1$

これは，常に成り立つ。

$a\geqq 1$ と共通範囲を求めると

$a\geqq 1$



[1]～[3] より，求める a の範囲は　$a\geqq-\dfrac{1}{2}$

2

解答　(1) $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$，$\theta_2=\dfrac{2}{3}\pi$，$y_1=\dfrac{3}{4}$，$y_2=\dfrac{13}{4}$，$y_3=-\dfrac{5}{4}$，$y_4=-\dfrac{3}{4}$

(2) a がとりうる値の範囲は $\dfrac{1}{3}<a<1$，

値域は $-a^2-1\leqq y\leqq a^2-4a+1$，$7a^2-1\leqq y\leqq a^2+4a+1$

(3) a がとりうる値の範囲は $0<a\leqq\dfrac{1}{3}$，値域は $-a^2-1\leqq y\leqq a^2+4a+1$

解説

(1) $y=2\cos^2\theta+4a\cos\theta+a^2-1$

$\cos\theta=t$ とおくと　$y=2t^2+4at+a^2-1$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，定義域は　$\dfrac{1}{2}\leqq|\cos\theta|$，$0\leqq\theta\leqq\pi$

$\dfrac{1}{2}\leqq|\cos\theta|$ から　$-1\leqq\cos\theta\leqq-\dfrac{1}{2}$　または　$\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq 1$

この不等式を $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で解くと　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$　または　$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\pi$

よって　$\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$，$\theta_2=\dfrac{2}{3}\pi$

また，(1) から　$y=2t^2+2t-\dfrac{3}{4}=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

θ が区間 A にあるとき　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$

y はこの区間で，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{4}$，$t=1$ のとき最大値 $\dfrac{13}{4}$ をとる。

よって　$y_1=\dfrac{3}{4}$，$y_2=\dfrac{13}{4}$

θ が区間 B にあるとき　$-1\leqq t\leqq-\dfrac{1}{2}$

y はこの区間で，$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{5}{4}$，$t=-1$ のとき最大値 $-\dfrac{3}{4}$ をとる。

よって　$y_3=-\dfrac{5}{4}$，$y_4=-\dfrac{3}{4}$

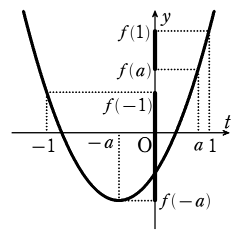
(2) $a\leqq|\cos\theta|$，$0\leqq\theta\leqq\pi$ から　$-1\leqq t\leqq-a$　または　$a\leqq t\leqq 1$

$f(t)=2t^2+4at+a^2-1$ とおく。

$f(t)=2(t+a)^2-a^2-1$ であるから，$y=f(t)$ のグラフの軸は　$t=-a$

$0<a<1$ から　$-1<-a<0$

右の図から，関数 y の値域が2つの区間になるのは，$f(-1)<f(a)$ のときである。



$f(-1)<f(a)$ から　$a^2-4a+1<7a^2-1$

整理すると　$3a^2+2a-1>0$

よって　$(3a-1)(a+1)>0$　ゆえに　$a<-1,\ \dfrac{1}{3}<a$

$0<a<1$ と合わせると，求める a の値の範囲は　$\dfrac{1}{3}<a<1$　……①

このときの y の値域は　$f(-a)\leqq y\leqq f(-1)$，$f(a)\leqq y\leqq f(1)$

すなわち　$-a^2-1\leqq y\leqq a^2-4a+1$，$7a^2-1\leqq y\leqq a^2+4a+1$

(3) 関数 y の値域が1つの区間になるのは，$f(-1)\geqq f(a)$ のときである。

① から，$f(-1)\geqq f(a)$ となる a の値の範囲は　$0<a\leqq\dfrac{1}{3}$

$y=f(t)$ のグラフの軸 $t=-a$ について，$-a<0$ であるから，$f(-1)<f(1)$ は常に成り立つ。よって，このときの y の値域は　$f(-a)\leqq y\leqq f(1)$

すなわち　$-a^2-1\leqq y\leqq a^2+4a+1$

3

解答 (1) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　(2) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$，$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$　(3) 略　(4) 略

解説

(1) $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$，$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$

であるから　$\sin\alpha=\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(2) $\tan\alpha>\sqrt{3}=\tan\dfrac{\pi}{3}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots①$$

同様に　$\dfrac{\pi}{3}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{3}<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$　……②

$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$ であるから

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{7}{9}$$

また $\tan\gamma=8$ であるから

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=1$$

①，② から　$\pi<\alpha+\beta+\gamma<\dfrac{3}{2}\pi$

よって　$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$

(3)
$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{3}{11}$$
$$\tan(\gamma-\beta)=\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta}=\frac{3}{41}$$

よって　$\tan(\beta-\alpha)>\tan(\gamma-\beta)$　……③

①，② から

$$-\frac{\pi}{6}<\beta-\alpha<\frac{\pi}{6},\quad -\frac{\pi}{6}<\gamma-\beta<\frac{\pi}{6}\quad\cdots\cdots④$$

$f(x)=\tan x$ は $-\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{6}$ の範囲で常に増加する。

したがって ③，④ から　$\beta-\alpha>\gamma-\beta$

(4) (3) で示した不等式から　$2\beta>\alpha+\gamma$

よって　$3\beta=\beta+2\beta>\beta+\alpha+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$　　ゆえに　$\beta>\dfrac{5\pi}{12}$

別解 $\tan\dfrac{5\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=2+\sqrt{3}$

$\sqrt{3}<2$ により　$\tan\dfrac{5\pi}{12}<4<\tan\beta$

$f(x)=\tan x$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に増加する。したがって　$\beta>\dfrac{5\pi}{12}$

4

解答 (1) 略　(2) 略　(3) $\dfrac{2}{5}\pi$　(4) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

解説

(1) $4x^2+2x-1=0$ を解いて

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$\alpha>\beta$ であるから

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\quad \beta=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$1<\sqrt{5}<3$ であるから　$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$　……①

$f(x)=\cos x$ は $\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で常に減少し，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ である。

よって，① から $f(\theta)=\alpha$ すなわち $\cos\theta=\alpha$ となる θ が $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ1つだけ存在する。

(2) $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

よって　$\cos2\theta=\beta$

(3) (1)，(2) から $\cos\theta$，$\cos2\theta$ は $4x^2+2x-1=0$ の解である。

よって，解と係数の関係から

$$\cos\theta+\cos2\theta=-\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots②,$$
$$\cos\theta\cos2\theta=-\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots③$$

③ から　$\dfrac{1}{2}(\cos3\theta+\cos\theta)=-\dfrac{1}{4}$

よって　$\cos3\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　……④

②，④ から　$\cos3\theta=\cos2\theta$

$\dfrac{2}{3}\pi\leqq2\theta\leqq\pi$，$\pi\leqq3\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ であるから

$$3\theta=2\pi-2\theta$$

したがって　$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$

(4) $\sin\dfrac{3\theta}{4}=\sin\dfrac{3\pi}{10}=-\cos\left(\dfrac{3\pi}{10}+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=-\cos2\theta=-\beta$

よって　$\sin\dfrac{3\theta}{4}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

5

解答 (1) $x=\dfrac{\pi}{6}$

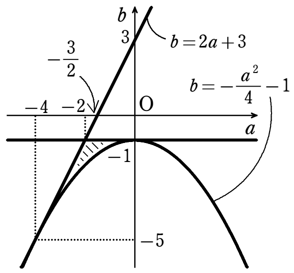
(2) $\cos3x=4\cos^3x-3\cos x$

(3) $-4<a<0$，$b>-\dfrac{a^2}{4}-1$，

$b<-1$，$b<2a+3$；

［図］ ただし，境界線は含まない

(3)



解説

(1) 与式から　$2\sin x\cos x=\cos x$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos x>0$ から

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

よって　$x=\dfrac{\pi}{6}$

(2) $\cos3x=\cos(2x+x)$

$=\cos2x\cos x-\sin2x\sin x$

$=(2\cos^2x-1)\cos x-2(1-\cos^2x)\cos x$

$=4\cos^3x-3\cos x$

(3) (2) から，条件式は

$4\cos^3x-2a\sin x\cos x+(b-3)\cos x=0$

よって　$\cos x(4\cos^2x-2a\sin x+b-3)=0$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\cos x\neq0$，また　$\cos^2x=1-\sin^2x$ から

$4(1-\sin^2x)-2a\sin x+b-3=0$

すなわち

$$\sin^2x+\frac{a}{2}\sin x-\frac{b+1}{4}=0\quad\cdots\cdots①$$

$\sin x=t$ とおくと $0<t<1$ で，① は

$$t^2+\frac{a}{2}t-\frac{b+1}{4}=0\quad\cdots\cdots②$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において，t の値1つに対して x の値も1つであるから，求める条件は ② が $0<t<1$ において異なる2つの実数解をもつことである。

$$f(t)=t^2+\frac{a}{2}t-\frac{b+1}{4}=\left(t+\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{16}-\frac{b+1}{4}$$

とおくと，条件は

軸 $t=-\dfrac{a}{4}$ について　$0<-\dfrac{a}{4}<1$

頂点の y 座標について　$-\dfrac{a^2}{16}-\dfrac{b+1}{4}<0$

$f(0)>0$，$f(1)>0$

よって　$-4<a<0$，$b>-\dfrac{a^2}{4}-1$，$b<-1$，$b<2a+3$

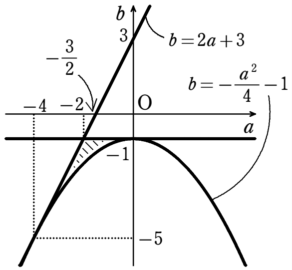
これらを③とする。

ここで　$-\dfrac{a^2}{4}-1=2a+3$

とすると　$(a+4)^2=0$

よって，放物線 $b=-\dfrac{a^2}{4}-1$ と直線 $b=2a+3$ は $a=-4$ で接する。

以上から，③を満たす点 $(a,\ b)$ の集合は，図の斜線部分である。ただし，境界線は含まない。



6

解答　(1) 証明略，1　(2) $\dfrac{8}{3}$

解説

(1) $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ であるから

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan(\pi-\gamma)=-\tan\gamma$$

よって　$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\tan\gamma$

ゆえに　$\tan\alpha+\tan\beta=-\tan\gamma(1-\tan\alpha\tan\beta)$

よって　$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

ゆえに　$\dfrac{1}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}+\dfrac{1}{\tan\beta\cdot\tan\gamma}+\dfrac{1}{\tan\gamma\cdot\tan\alpha}$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}=1$$

(2) $\tan(x+y)+\tan(x-y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}+\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}(\tan x+\tan y)+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(\tan x-\tan y)$$

$$=2(\tan x+\tan y)+\frac{2}{3}(\tan x-\tan y)$$

$$=\frac{8}{3}\tan x+\frac{4}{3}\tan y$$

ここで，(相加平均)≧(相乗平均) から

$$\frac{8}{3}\tan x+\frac{4}{3}\tan y\geqq 2\sqrt{\frac{8}{3}\tan x\cdot\frac{4}{3}\tan y}$$

$$=2\sqrt{\frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

等号は，$\dfrac{8}{3}\tan x=\dfrac{4}{3}\tan y$ かつ $\tan x\tan y=\dfrac{1}{2}$，すなわち　$\tan x=\dfrac{1}{2}$ かつ $\tan y=1$ のとき成り立つ。

したがって，求める最小値は　$\dfrac{8}{3}$

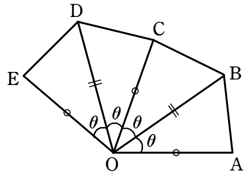
7

解答　$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

解説

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$0<3\theta<\frac{3}{2}\pi$$



よって，△OBE の内角 ∠BOE の大きさは 3θ，$2\pi-3\theta$ のどちらかになる。

OA＝OE であるから

$$\frac{\triangle\mathrm{OBE}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OE}|\sin3\theta|}{\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta}=\frac{|\sin3\theta|}{\sin\theta}=\frac{|3\sin\theta-4\sin^3\theta|}{\sin\theta}$$

$$=|3-4\sin^2\theta|$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$0<\sin\theta<1$

このとき，$3-4\sin^2\theta$ がとりうる値の範囲は　$-1<3-4\sin^2\theta<3$

よって，$\dfrac{\triangle\mathrm{OBE}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\dfrac{3}{2}$ すなわち $|3-4\sin^2\theta|=\dfrac{3}{2}$ のとき

$3-4\sin^2\theta=\dfrac{3}{2}$　　ゆえに　$\sin^2\theta=\dfrac{3}{8}$

$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　すなわち　$\sin\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

8

解答　(1) 証明略，$A=B$　(2) 証明略，$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$

解説

$A+B+C=\pi$ であるから　$C=\pi-(A+B)$

(1) $(\text{左辺})=\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{A+B}{2}-\cos\dfrac{A-B}{2}\right)$

ここで　$\cos\dfrac{A+B}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\sin\dfrac{C}{2}$

よって　$(\text{右辺})-(\text{左辺})=\dfrac{1}{2}\left(1-\sin\dfrac{C}{2}\right)-\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)-\left\{-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{A-B}{2}\right)\geqq 0$$

$\left(-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{A-B}{2}<\dfrac{\pi}{2}\right.$ より，$0<\cos\dfrac{A-B}{2}\leqq 1$ であるから。$\Big)$

ここで，$1-\cos\dfrac{A-B}{2}=0$ とすると　$\dfrac{A-B}{2}=0$

ゆえに，等号は $A=B$ のとき成り立つ。

(2) $\sin\dfrac{C}{2}=t$ とおくと，$0<\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$0<t<1$

(1) から　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leqq\dfrac{1}{2}\left(1-\sin\dfrac{C}{2}\right)\sin\dfrac{C}{2}$

$$=\frac{1}{2}t(1-t)=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$$

$0<t<1$ の範囲において，$t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $C=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{8}$ をとるから

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqq\frac{1}{8}$$

等号は，$A=B$ かつ $C=\dfrac{\pi}{3}$ すなわち $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ のとき成り立つ。

9

解答　(1) $x=\dfrac{2}{5}\pi$　(2) $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{7}{6}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$

(3) $x=\dfrac{\pi}{8}$，$\dfrac{5}{8}\pi$，$\dfrac{2}{3}\pi$

解説

(1) $\sin x+\sin2x+\sin3x+\sin4x=(\sin4x+\sin x)+(\sin3x+\sin2x)$

$$=2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{3}{2}x+2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}$$

$$=2\sin\frac{5}{2}x\left(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{5}{2}x\cdot2\cos x\cos\frac{x}{2}$$

ゆえに，方程式は　$\sin\dfrac{5}{2}x\cdot\cos x\cdot\cos\dfrac{x}{2}=0$　……①

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ であるから　$\cos x\neq0$，$\cos\dfrac{x}{2}\neq0$

よって，①から　$\sin\dfrac{5}{2}x=0$

$0<\dfrac{5}{2}x<\dfrac{5}{4}\pi$ であるから，$\sin\dfrac{5}{2}x=0$ となるのは，$\dfrac{5}{2}x=\pi$ のときである。

したがって　$x=\dfrac{2}{5}\pi$

(2) $\cos3\theta+\sin2\theta+\cos\theta=(\cos3\theta+\cos\theta)+\sin2\theta$

$$=2\cos2\theta\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta$$

$$=2\cos\theta(\cos2\theta+\sin\theta)$$

$$=2\cos\theta(1-2\sin^2\theta+\sin\theta)$$

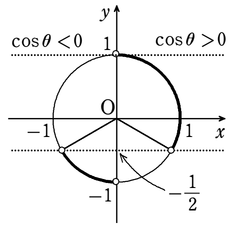
$$=-2\cos\theta(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)$$

したがって，不等式は

$$\cos\theta(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0$$

ゆえに　「$\cos\theta>0$，$-\dfrac{1}{2}<\sin\theta<1$」または

「$\cos\theta<0$，$\sin\theta<-\dfrac{1}{2}$」



よって

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi$$

(3) $\sin x+\sin2x+\sin3x=(\sin3x+\sin x)+\sin2x=2\sin2x\cos x+\sin2x$

$$=\sin2x(2\cos x+1)$$

$\cos x+\cos2x+\cos3x=(\cos3x+\cos x)+\cos2x=2\cos2x\cos x+\cos2x$

$$=\cos2x(2\cos x+1)$$

したがって，方程式は　$\sin2x(2\cos x+1)=\cos2x(2\cos x+1)$

よって　$(2\cos x+1)(\sin2x-\cos2x)=0$

ゆえに　$\cos x=-\dfrac{1}{2}$　……①　または　$\sin2x=\cos2x$　……②

$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で，①を解くと　$x=\dfrac{2}{3}\pi$

また，$\cos2x=0$ のとき　$\sin2x\neq0$ であるから，②は

$\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=1$　すなわち　$\tan 2x=1$

$0\leqq x\leqq \pi$ すなわち $0\leqq 2x\leqq 2\pi$ の範囲で，これを解くと

$2x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$　すなわち　$x=\frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi$

したがって，求める解は　$x=\frac{\pi}{8},\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{2}{3}\pi$

10

解答　(1) $f(x)=\left|t^2+t-\frac{9}{4}\right|$　(2) $-1\leqq t\leqq\sqrt{3}$　(3) $0\leqq f(x)\leqq\frac{5}{2}$，証明略

解説

(1) $t^2=(-\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2=\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$

$=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$

ゆえに　$2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=t^2-1$

よって　$f(x)=\left|t^2-1+t-\frac{5}{4}\right|=\left|t^2+t-\frac{9}{4}\right|$

(2) $t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+120°)$

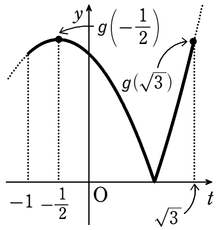
$0°\leqq x\leqq 90°$ から　$120°\leqq x+120°\leqq 210°$

よって　$-\frac{1}{2}\leqq\sin(x+120°)\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$　ゆえに　$-1\leqq t\leqq\sqrt{3}$

(3) $g(t)=\left|t^2+t-\frac{9}{4}\right|$ とすると

$g(t)=\left|\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}\right|$

$-1\leqq t\leqq\sqrt{3}$ における $y=g(t)$ のグラフは，右の図の実線部分である。



$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\left|-\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2}$,

$g(\sqrt{3})=\left|\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right|=\sqrt{3}+\frac{3}{4}$

$\sqrt{3}+\frac{3}{4}<1.74+0.75=2.49<\frac{5}{2}$ から　$g\left(-\frac{1}{2}\right)>g(\sqrt{3})$

したがって，$f(x)$ のとりうる値の範囲は　$0\leqq f(x)\leqq\frac{5}{2}$

$f(x)$ が最大値をとるのは $t=-\frac{1}{2}$ のときである。

このときの x を α とすると　$\sin(\alpha+120°)=-\frac{1}{4}$

また　$\sin(60°+120°)=\sin 180°=0$

$\sin(75°+120°)=\sin(180°+15°)=-\sin 15°$

$=-\sin(45°-30°)=-\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

更に　$\sin(\alpha+120°)-\sin(75°+120°)=-\frac{1}{4}-\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

$=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})-1}{4}$

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-1^2=7-4\sqrt{3}=\sqrt{49}-\sqrt{48}>0$ であるから　$\sqrt{6}-\sqrt{2}>1$

よって　$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<-\frac{1}{4}<0$

すなわち　$\sin(75°+120°)<\sin(\alpha+120°)<\sin(60°+120°)$

$120°\leqq\theta\leqq 210°$ において，$\sin\theta$ は単調に減少するから

$60°+120°<\alpha+120°<75°+120°$　すなわち　$60°<\alpha<75°$

よって，$f(x)$ が最大値をとる x は，$60°<x<75°$ を満たす。

11

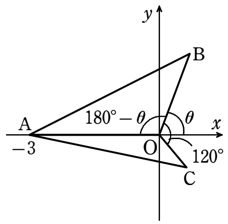
解答　(1) $\theta=30°$　(2) $\sin\theta=\frac{5\sqrt{7}}{14}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{7}}{2}$

解説

(1) △OABと△OACは辺OAを共有するから，

△OABと△OACの面積が等しいとき，それぞれの高さが等しい。

ここで，条件から，動径OBと x 軸の正の向きとのなす角は　$180°-(180°-\theta)=\theta$



△OABの高さは　$2\sin\theta$

△OACの高さは　$\sin(120°-\theta)$

ゆえに　$2\sin\theta=\sin(120°-\theta)$ …… ①

よって　$2\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$

ゆえに　$3\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$ …… ②

$\theta=90°$ は①を満たさないから　$\theta\neq 90°$

②の両辺を $\cos\theta$ で割って　$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0°<\theta<120°$ であるから　$\theta=30°$

(2) △OABと△OACの面積の和を S とすると

$S=\frac{1}{2}\cdot 3\left(2\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=\frac{3}{4}(5\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$

$=\frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)=\frac{3\sqrt{7}}{2}\sin(\theta+\alpha)$

ただし　$\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{14}$，$\cos\alpha=\frac{5\sqrt{7}}{14}$　$(0°<\alpha<90°)$

$0°<\theta<120°$，$0°<\alpha<90°$ より，$0°<\theta+\alpha<210°$ であるから，この範囲において，

S は $\theta+\alpha=90°$ のとき最大となり，その最大値は　$\frac{3\sqrt{7}}{2}\sin 90°=\frac{3\sqrt{7}}{2}\cdot 1=\frac{3\sqrt{7}}{2}$

また，$\theta+\alpha=90°$ のとき　$\sin\theta=\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha=\frac{5\sqrt{7}}{14}$

1

解答　$-\frac{1}{3}<a<0$ のとき4個；$a=-\frac{1}{3}$ のとき3個；

$a<-\frac{1}{3}$，$a=0$，$1<a$ のとき2個；$a=1$ のとき1個；$0<a<1$ のとき0個

解説

$\cos^2 x+2a\sin x-a-1=(1-\sin^2 x)+2a\sin x-a-1$

$=-\sin^2 x+2a\sin x-a$

$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq 1$ …… ①

方程式は　$-t^2+2at-a=0$　すなわち　$t^2-2at+a=0$

この方程式の①の範囲における実数解の個数を調べればよい。

ただし，$\sin x=t$ を満たす x は，$t\neq\pm 1$ であれば2つあり，$t=\pm 1$ であれば1つある。

$f(t)=t^2-2at+a$ とすると　$f(t)=(t-a)^2+a-a^2$

$y=f(t)$ のグラフは下に凸の放物線であり，軸は直線 $t=a$，頂点は点 $(a,\ a-a^2)$ である。

[1] $f(t)=0$ が $t=1$ を解にもつとき

$f(1)=1-a=0$ から　$a=1$

このとき，方程式は　$t^2-2t+1=0$　すなわち　$(t-1)^2=0$

この方程式の解は $t=1$ のただ1つである。

したがって，x の実数解は1個。

[2] $f(t)=0$ が $t=-1$ を解にもつとき

$f(-1)=1+3a=0$ から　$a=-\frac{1}{3}$

このとき，方程式は　$t^2+\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}=0$

ゆえに　$3t^2+2t-1=0$　よって　$(t+1)(3t-1)=0$

したがって　$t=-1,\ \frac{1}{3}$

ゆえに，x の実数解は3個。

[3] $f(t)=0$ が $-1<t<1$ の範囲に実数解を2つもつとき

頂点について　$a-a^2<0$

ゆえに　$a(a-1)>0$　よって　$a<0,\ 1<a$ …… ②

軸について　$-1<a<1$ …… ③

$f(1)=1-a>0$ から　$a<1$ …… ④

$f(-1)=1+3a>0$ から　$a>-\frac{1}{3}$ …… ⑤

②～⑤の共通範囲をとって　$-\frac{1}{3}<a<0$

このとき，x の実数解は4個。

[4] $f(t)=0$ が $-1<t<1$ の範囲に実数解を1つもつとき

このときは，次の(ア)または(イ)の場合が考えられる。

(ア) $f(t)=0$ が $-1<t<1$ の範囲に重解をもつ。

(イ) $f(1)f(-1)<0$

(ア)の場合，$a-a^2=0$ を満たすから　$a=0,\ 1$

$a=0$ のとき，$f(t)=t^2$ であるから，確かに重解 $t=0$ を $-1<t<1$ の範囲にもつ。

このとき，x の実数解は2個。

$a=1$ のときは，[1]より，解は $t=1$ で $-1<t<1$ の範囲にない。

(イ)の場合，$f(1)f(-1)<0$ から　$(1-a)(1+3a)<0$

ゆえに　$(a-1)(3a+1)>0$　　よって　$a<-\frac{1}{3}$，$1<a$

このとき，x の実数解は2個。

以上から　$-\frac{1}{3}<a<0$ のとき4個；$a=-\frac{1}{3}$ のとき3個；

$a<-\frac{1}{3}$，$a=0$，$1<a$ のとき2個；

$a=1$ のとき1個；$0<a<1$ のとき0個

2

解答　(1)　4個　　(2)　5個

解説

(1)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ では　$-1\leqq\cos x\leqq 1$

ゆえに　$-\pi\leqq\pi\cos x\leqq\pi$

よって，$\cos(\pi\cos x)=\frac{1}{2}$ から　$\pi\cos x=\pm\frac{\pi}{3}$

したがって　$\cos x=\pm\frac{1}{3}$

ゆえに，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で x の個数は4個。

(2)　$\pi\cos x=t$ とおくと，(1)と同様にして　$-\pi\leqq t\leqq\pi$

$\pi\cos x=t$ より，$\cos x=\frac{t}{\pi}$　……① であり，$\cos(\pi\cos x)=\cos x$ から

$\cos t=\frac{t}{\pi}$

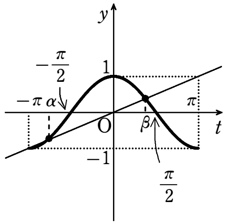
$y=\cos t$ のグラフと直線 $y=\frac{t}{\pi}$ の交点の t 座標は

$t=-\pi$，α，β

ただし　$-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$

ゆえに　$\frac{t}{\pi}=-1$，$\frac{\alpha}{\pi}$，$\frac{\beta}{\pi}$

① から　$\cos x=-1$，$\frac{\alpha}{\pi}$，$\frac{\beta}{\pi}$



よって，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で x の個数は　5個。

3

解答　有理数でない

解説

$\tan 1^\circ$ が有理数であると仮定すると，2倍角の公式

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

を繰り返し用いることにより，

$\tan 2^\circ$，$\tan 4^\circ$，$\tan 8^\circ$，$\tan 16^\circ$，$\tan 32^\circ$，$\tan 64^\circ$

はすべて有理数となる。

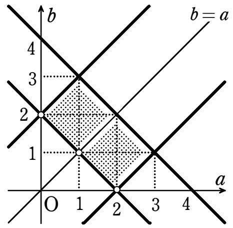
よって，$\tan 60^\circ=\tan(64^\circ-4^\circ)=\dfrac{\tan 64^\circ-\tan 4^\circ}{1+\tan 64^\circ\tan 4^\circ}$ であるから，$\tan 60^\circ$ は有理数となる。

一方，$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ であり，$\sqrt{3}$ は無理数であるから，矛盾が生じる。

したがって，$\tan 1^\circ$ は有理数ではない。

4

解答　右の図の影をつけた部分。ただし，境界線は，直線 $b=-a+2$ $(0<a<1,\ 1<a<2)$ のみ含み，その他および直線 $b=a$ 上の点を含まない。



解説

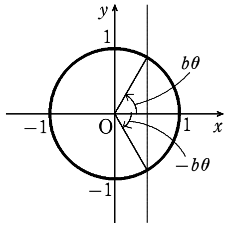
$\cos a\theta=\cos b\theta$ から

$a\theta=b\theta+2n\pi$，$a\theta=-b\theta+2n\pi$　(n は整数)

よって　$(a-b)\theta=2n\pi$，$(a+b)\theta=2n\pi$

$a=b$ のとき，$(a-b)\theta=2n\pi$ を満たす θ $(0<\theta\leqq\pi)$ は無数にあるから，条件(*)を満たさない。

$a\neq b$ のとき　$\theta=\frac{2n\pi}{a-b}$，$\frac{2n\pi}{a+b}$　……①



[1]　$a>b>0$ のとき

① を満たす正の数 θ は，それぞれ小さい順に

$\frac{2\pi}{a-b}$，$\frac{4\pi}{a-b}$，……；　$\frac{2\pi}{a+b}$，$\frac{4\pi}{a+b}$，……

ここで，$0<a-b<a+b$ であるから　$\frac{2\pi}{a+b}<\frac{2\pi}{a-b}$

したがって，① かつ $0<\theta\leqq\pi$ を満たす θ がちょうど1つであるための条件は

$0<\frac{2\pi}{a+b}\leqq\pi<\frac{4\pi}{a+b}$　かつ　$\pi<\frac{2\pi}{a-b}$

よって　$2\leqq a+b<4$　かつ　$a-b<2$

[2]　$b>a>0$ のとき

同様にして，条件は　$2\leqq a+b<4$　かつ　$b-a<2$

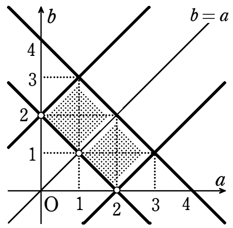
したがって，条件(*)を満たす $(a,\ b)$ の存在する範囲は，右の図の影をつけた部分である。

ただし，境界線は，

直線 $b=-a+2$ $(0<a<1,\ 1<a<2)$

のみ含み，その他は含まない。

また，直線 $b=a$ 上の点も含まない。



5

解答　(1)　$\theta=\frac{2}{9}\pi$，$\frac{4}{9}\pi$，$\frac{8}{9}\pi$，$\frac{10}{9}\pi$，$\frac{14}{9}\pi$，$\frac{16}{9}\pi$

(2)　$x^3-3x+1=0$ (解答は他にもある)

(3)　$\beta=\alpha^2-2$，$\gamma=-\alpha^2-\alpha+2$　　(4)　6

解説

(1)　$\cos 3\theta=-\frac{1}{2}$，$0\leqq 3\theta<6\pi$ から

$3\theta=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$，$\frac{8}{3}\pi$，$\frac{10}{3}\pi$，$\frac{14}{3}\pi$，$\frac{16}{3}\pi$

したがって　$\theta=\frac{2}{9}\pi$，$\frac{4}{9}\pi$，$\frac{8}{9}\pi$，$\frac{10}{9}\pi$，$\frac{14}{9}\pi$，$\frac{16}{9}\pi$

(2)　(1)より　$\theta_1=\frac{2}{9}\pi$

ここで　$\cos 3\theta=\cos(\theta+2\theta)=\cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta$

$=\cos\theta(2\cos^2\theta-1)-\sin\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

(1)より，$\cos 3\theta_1=-\frac{1}{2}$ であるから　$4\cos^3\theta_1-3\cos\theta_1=-\frac{1}{2}$

すなわち　$8\cos^3\theta_1-6\cos\theta_1+1=0$

よって　$(2\cos\theta_1)^3-3\cdot 2\cos\theta_1+1=0$　　したがって　$\alpha^3-3\alpha+1=0$

よって，α を解にもつ整数を係数とする3次方程式の1つは　$x^3-3x+1=0$

(3)　$\theta_2=\frac{4}{9}\pi$，$\theta_3=\frac{8}{9}\pi$ とすると，$\cos 3\theta_2=-\frac{1}{2}$，$\cos 3\theta_3=-\frac{1}{2}$ であるから(2)と同様にして，$2\cos\frac{4}{9}\pi$，$2\cos\frac{8}{9}\pi$ も3次方程式 $x^3-3x+1=0$ の解である。

また，$\alpha\neq 2\cos\frac{4}{9}\pi$，$\alpha\neq 2\cos\frac{8}{9}\pi$，$2\cos\frac{4}{9}\pi>2\cos\frac{8}{9}\pi$ であるから

$\beta=2\cos\frac{4}{9}\pi$，$\gamma=2\cos\frac{8}{9}\pi$

よって　$\beta=2\cos\frac{4}{9}\pi=2\cos 2\theta_1=2(2\cos^2\theta_1-1)=(2\cos\theta_1)^2-2=\alpha^2-2$

$\gamma=2\cos\frac{8}{9}\pi=2\cos\left(2\cdot\frac{4}{9}\pi\right)=2\left(2\cos^2\frac{4}{9}\pi-1\right)=\left(2\cos\frac{4}{9}\pi\right)^2-2$

$=\beta^2-2=(\alpha^2-2)^2-2=\alpha^4-4\alpha^2+2$

ここで，$\alpha^3-3\alpha+1=0$ より，$\alpha^3=3\alpha-1$ であるから

$\gamma=\alpha(3\alpha-1)-4\alpha^2+2=-\alpha^2-\alpha+2$

(4)　(3)より，$\beta=\alpha^2-2$ であるから　$\alpha^2=\beta+2$

また，$\gamma=\beta^2-2$ であるから　$\beta^2=\gamma+2$

更に

$$\gamma^2=4\cos^2\frac{8}{9}\pi=4\cdot\frac{1+\cos\frac{16}{9}\pi}{2}=2\cos\frac{16}{9}\pi+2=2\cos\frac{2}{9}\pi+2=\alpha+2$$

したがって

$\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha=(\beta+2)\beta+(\gamma+2)\gamma+(\alpha+2)\alpha$

$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha+\beta+\gamma)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)$　……①

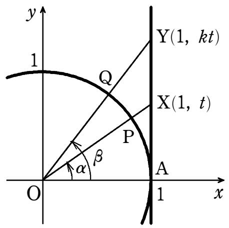
α，β，γ は3次方程式 $x^3-3x+1=0$ の異なる3つの解であるから，解と係数の関係により　$\alpha+\beta+\gamma=0$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$

よって，① から　$\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha=0^2-2\cdot(-3)+2\cdot 0=6$

6

解答　$\frac{k-1}{2(k+1)}$

解説



$\angle\mathrm{AOX}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOY}=\beta$ とすると，$0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であり　$\angle\mathrm{POQ}=\beta-\alpha$

よって　　$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)$

$\beta-\alpha$ は鋭角であるから，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積が最大になるのは，$\beta-\alpha$ が最大になるときである。

X$(1,\ t)$ とすると，$t>0$，Y$(1,\ kt)$ であり

$$\tan\alpha=t,\quad \tan\beta=kt$$

したがって　　$\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\dfrac{kt-t}{1+kt\cdot t}=\dfrac{(k-1)t}{1+kt^2}=\dfrac{k-1}{\dfrac{1}{t}+kt}$

$\dfrac{1}{t}>0$，$kt>0$ より，相加平均・相乗平均の大小関係から

$$\frac{1}{t}+kt\geqq2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot kt}=2\sqrt{k}$$

等号が成り立つのは $\dfrac{1}{t}=kt$ のとき，すなわち $t=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のときである。

このとき，$\dfrac{1}{t}+kt$ が最小になるから，$\tan(\beta-\alpha)$ は最大になり，$\beta-\alpha$ も最大になる。

このとき，$\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{k-1}{2\sqrt{k}}$ であるから

$$\cos^2(\beta-\alpha)=\frac{1}{1+\tan^2(\beta-\alpha)}=\frac{1}{1+\dfrac{(k-1)^2}{4k}}=\frac{4k}{(k+1)^2}$$

$$\sin^2(\beta-\alpha)=1-\cos^2(\beta-\alpha)=1-\frac{4k}{(k+1)^2}=\frac{(k-1)^2}{(k+1)^2}$$

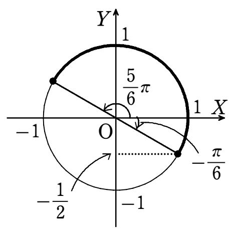
$k>1$ より，$k-1>0$，$k+1>0$ であるから　　$\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{k-1}{k+1}$

よって，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積の最大値は　　$\dfrac{k-1}{2(k+1)}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$-1\leqq t\leqq2$　　(2)　$y=t^2-2at+2$　　(3)　$0\leqq a\leqq\sqrt{2}$　(4)　$\sqrt{2}<a\leqq\dfrac{3}{2}$

解説



(1)　$t=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

　$0\leqq x\leqq\pi$ から　　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

　よって　　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq1$

　ゆえに　　$-1\leqq t\leqq2$

(2)　$t^2=(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2$

$$=3\sin^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2x$$

$$=3\cdot\frac{1-\cos2x}{2}-\sqrt{3}\sin2x+\frac{1+\cos2x}{2}$$

$$=-\sqrt{3}\sin2x-\cos2x+2$$

　よって　　$-\sqrt{3}\sin2x-\cos2x=t^2-2$

　ゆえに　　$y=(t^2-2)-2at+4=t^2-2at+2$

(3)　$f(t)=t^2-2at+2$ とすると

$$f(t)=(t-a)^2-a^2+2$$

区間 $-1\leqq t\leqq2$ における関数 $f(t)$ の最大値が 6 以下，最小値が 0 以上となるように，a の範囲を定めればよい。

[1]　$a<-1$ のとき

　最大値は　$f(2)=6-4a$，　最小値は　$f(-1)=2a+3$

　よって　　$6-4a\leqq6$ かつ $2a+3\geqq0$

　これを解くと　　$a\geqq0$

　これと $a<-1$ を同時に満たす a はない。

[2]　$-1\leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき

　最大値は　$f(2)=6-4a$，　最小値は　$f(a)=-a^2+2$

　よって　　$6-4a\leqq6$ かつ $-a^2+2\geqq0$

　これを解くと　　$0\leqq a\leqq\sqrt{2}$

　これと $-1\leqq a<\dfrac{1}{2}$ の共通範囲は　　$0\leqq a<\dfrac{1}{2}$

[3]　$\dfrac{1}{2}\leqq a<2$ のとき

　最大値は　$f(-1)=2a+3$，　最小値は　$f(a)=-a^2+2$

　よって　　$2a+3\leqq6$ かつ $-a^2+2\geqq0$

　これを解くと　　$-\sqrt{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$

　これと $\dfrac{1}{2}\leqq a<2$ の共通範囲は　　$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\sqrt{2}$

[4]　$2\leqq a$ のとき

　最大値は　$f(-1)=2a+3$，　最小値は　$f(2)=6-4a$

　よって　　$2a+3\leqq6$ かつ $6-4a\geqq0$

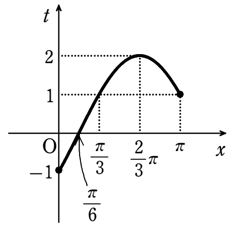
　これを解くと　　$a\leqq\dfrac{3}{2}$

　これと $a\geqq2$ を同時に満たす a はない。

[1]～[4] から，求める a の値の範囲は

$$0\leqq a\leqq\sqrt{2}$$

(4)　方程式を t で表すと　　$t^2-2at+2=0$



$t=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ のグラフは，右の図のようになる。

よって，$-1\leqq t<1$，$t=2$ に対して x の値はただ 1 つ，$1\leqq t<2$ に対して x の値は異なる 2 つとなる。

したがって，与えられた方程式が 3 個以上の異なる実数解をもつのは，(3) と同様に $f(t)=t^2-2at+2$ とすると，次の [1]～[3] の場合が考えられる。

[1]　$f(t)=0$ が $1\leqq t<2$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき

　(与えられた方程式の実数解は 4 個)

　　$f(a)<0$ かつ $1<a<2$ かつ $f(1)\geqq0$ かつ $f(2)>0$

　$f(a)<0$ から　　$-a^2+2<0$　すなわち　$a^2-2>0$

　　よって　　　$a<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<a$

　$f(1)\geqq0$ から　　$-2a+3\geqq0$　　　よって　　$a\leqq\dfrac{3}{2}$

　$f(2)>0$ から　　$-4a+6>0$　　　よって　　$a<\dfrac{3}{2}$

　共通範囲を求めて　　$\sqrt{2}<a<\dfrac{3}{2}$

[2]　$f(t)=0$ が $-1\leqq t<1$ と $1\leqq t<2$ の範囲に 1 つずつ解をもつとき

　(与えられた方程式の実数解は 3 個)

　このとき，「$f(1)\leqq0$ かつ $f(2)>0$」であることが必要であるが，$f(2)=2f(1)$ であるから，$f(1)$ と $f(2)$ は同符号である。

　よって，条件を満たすような a の値は存在しない。

[3]　$f(t)=0$ の 1 つの解が $t=2$ で，他の解が $1\leqq t<2$ の範囲にあるとき

　(与えられた方程式の実数解は 3 個)

　$f(t)=0$ が $t=2$ を解にもつから　　$f(2)=-4a+6=0$

　これを解いて　　$a=\dfrac{3}{2}$

　$f(2)=0$ のとき $f(1)=0$ であるから，$f(t)=0$ の解は $t=1$，2 となり，適する。

[1]～[3] から，求める a の値の範囲は　　$\sqrt{2}<a\leqq\dfrac{3}{2}$