高１数学総合SA＋　４月度第２講演習問題

$\boxed{1}$

次の等式を証明せよ。

(1)　$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

(2)　$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\boxed{2}$

α，β，γ は鋭角とする。$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$，$\tan\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\tan\gamma=2-\sqrt{3}$ のとき，$\alpha+\beta$ と $\alpha+\beta+\gamma$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$

(1)　$\sin\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{5}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$(\tan\alpha+1)(\tan\beta+1)$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$

点 $(0,\ 1)$ を通り，直線 $y=\dfrac{1}{2}x-1$ と $\dfrac{\pi}{3}$ の角をなす直線の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$

次の値を求めよ。

(1)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ のとき　$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$

(2)　$\tan\alpha=5$ のとき　$\tan 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$

(3)　$\pi<\alpha<2\pi$，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$ のとき　$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$

$\boxed{6}$

半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\dfrac{\pi}{12}$　　(2)　$\cos\dfrac{5}{8}\pi$　　(3)　$\tan\dfrac{3}{8}\pi$

$\boxed{7}$

次の等式，不等式を証明せよ。

(1)　$\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{\tan 2\alpha}$　　(2)　$\sin^2\alpha+\cos^2\beta\geqq\cos 2\beta-\cos 2\alpha$

$\boxed{8}$

$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin 2x=\sqrt{2}\sin x$　　(2)　$\cos 2x=3\cos x-2$

(3)　$\cos 2x>\sin x$　　(4)　$\sin 2x>\cos x$

$\boxed{9}$

$\triangle$ABC において，AB$=3$，CA$=4$，$\angle$B$=2\theta$，$\angle$C$=\theta$ とする。このとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta$　　(3)　$\sin 3\theta$　　(4)　BC

$\boxed{10}$

$0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $\cos 2x+2\sin x-a=0$ が次の条件を満たすように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(1)　解をもつ　　(2)　異なる 4 個の解をもつ

解説

$\boxed{1}$

解説

(1)　$(\text{第1辺}) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$$
\begin{aligned}
&= \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta \\
&= \cos^2\alpha\cos^2\beta - (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) \\
&= \cos^2\alpha\cos^2\beta - (1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta) \\
&= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1
\end{aligned}
$$

$(\text{第2辺}) = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\beta) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1$

$(\text{第3辺}) = \cos^2\beta - (1-\cos^2\alpha) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1$

よって　(第1辺)=(第2辺)=(第3辺)

(2)　$(\text{左辺}) = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$= \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = (\text{右辺})$

$\boxed{2}$

解説

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{7}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{7}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{13\sqrt{3}}{39} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \cdots\cdots ①$$

α, β は鋭角であるから　$0<\alpha+\beta<\pi$

よって，① から　$\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{6}$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}+(2-\sqrt{3})}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}} = 1 \quad \cdots\cdots ②$$

$\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{6}$ であり，γ は鋭角であるから　$\dfrac{\pi}{6} < \alpha+\beta+\gamma < \dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}$

すなわち　$\dfrac{\pi}{6} < \alpha+\beta+\gamma < \dfrac{2}{3}\pi$

よって，② から　$\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{3}$

解説

(1)　$\sin\alpha + \cos\beta = \dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha + \sin\beta = \dfrac{1}{5}$ の両辺をそれぞれ2乗すると

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \frac{1}{25}$$

辺々を加えて

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) + (\sin^2\beta+\cos^2\beta) + 2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta) = \frac{29}{100}$$

よって　$2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta) = \dfrac{29}{100}$

ゆえに　$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta = -\dfrac{171}{200}$

すなわち　$\sin(\alpha+\beta) = -\dfrac{171}{200}$

(2)　$\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$ から　$\tan(\alpha+\beta) = 1$

よって　$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = 1$

分母を払って整理すると　$\tan\alpha\tan\beta + \tan\alpha + \tan\beta = 1$

したがって　$(\tan\alpha+1)(\tan\beta+1) = \tan\alpha\tan\beta + \tan\alpha + \tan\beta + 1$

$= 1+1 = 2$

$\boxed{4}$

解説

直線 $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$

求める直線の傾きは　$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$　または　$\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

加法定理を利用して，これを計算すると

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\theta+\tan\dfrac{\pi}{3}}{1-\tan\theta\tan\dfrac{\pi}{3}} = \frac{\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}}{1-\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(1+2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 8+5\sqrt{3}$$

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\theta-\tan\dfrac{\pi}{3}}{1+\tan\theta\tan\dfrac{\pi}{3}} = \frac{\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}}{1+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1-2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(1-2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 8-5\sqrt{3}$$

よって，求める直線の方程式は　$y = (8+5\sqrt{3})x+1$，$y = (8-5\sqrt{3})x+1$

$\boxed{5}$

解説

(1)　$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{7}{9}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\cos\alpha>0$

よって　　$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ゆえに　　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

(2)　$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2\cdot 5}{1-5^2} = -\dfrac{5}{12}$

また　　$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+5^2} = \dfrac{1}{26}$

よって　　$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\dfrac{1}{26} - 1 = -\dfrac{12}{13}$

$\sin 2\alpha = \tan 2\alpha\cos 2\alpha = -\dfrac{5}{12}\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right) = \dfrac{5}{13}$

別解　[$\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$ の求め方]

$\tan\alpha = 5$ から　　$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 5$　　よって　　$\sin\alpha = 5\cos\alpha$

これを $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ に代入して　　$25\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

ゆえに　　$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{26}$

したがって　$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\dfrac{1}{26} - 1 = -\dfrac{12}{13}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot 5\cos\alpha\cdot\cos\alpha = 10\cos^2\alpha = 10\cdot\dfrac{1}{26} = \dfrac{5}{13}$

(3)　$\pi<\alpha<2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha}{2}<\pi$ であるから　　$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}<0$

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} = \dfrac{1-\dfrac{2}{3}}{2} = \dfrac{1}{6}$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$ から　　$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \dfrac{1+\dfrac{2}{3}}{2} = \dfrac{5}{6}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}<0$ から　　$\cos\dfrac{\alpha}{2} = -\sqrt{\dfrac{5}{6}} = -\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

また　　$\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\div\left(-\dfrac{\sqrt{30}}{6}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\boxed{6}$

解説

(1)　$\sin^2\dfrac{\pi}{12} = \sin^2\dfrac{\dfrac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin\dfrac{\pi}{12}>0$ であるから

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3\cdot 1}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

注意　2重根号のはずし方（数学Ⅰで学習）

$a>0$，$b>0$ のとき　　$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

$a>b>0$ のとき　　$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$

(2)　$\cos^2\dfrac{5}{8}\pi = \cos^2\dfrac{\dfrac{5}{4}\pi}{2} = \dfrac{1+\cos\dfrac{5}{4}\pi}{2} = \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\dfrac{5}{8}\pi<0$ であるから　　$\cos\dfrac{5}{8}\pi = -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(3)　$\tan^2\dfrac{3}{8}\pi = \dfrac{1-\cos\dfrac{3}{4}\pi}{1+\cos\dfrac{3}{4}\pi} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = (\sqrt{2}+1)^2$$

$\tan\dfrac{3}{8}\pi>0$ であるから　　$\tan\dfrac{3}{8}\pi = \sqrt{2}+1$

7

解説

(1)　(左辺)$=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1-\tan^2\alpha$

(右辺)$=\dfrac{2\tan\alpha}{\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}=1-\tan^2\alpha$

よって　(左辺)=(右辺)

(2)　(左辺)−(右辺)$=\sin^2\alpha+\cos^2\beta-\cos2\beta+\cos2\alpha$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\beta-(2\cos^2\beta-1)+(1-2\sin^2\alpha)$

$=2-\sin^2\alpha-\cos^2\beta$

$=(1-\sin^2\alpha)+(1-\cos^2\beta)\geqq0$

よって　(左辺)≧(右辺)

別解 1　(左辺)−(右辺)$=\sin^2\alpha+\cos^2\beta-\cos2\beta+\cos2\alpha$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\beta-(1-2\sin^2\beta)+(2\cos^2\alpha-1)$

$=\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha+2\sin^2\beta+\cos^2\beta-2$

$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+\cos^2\alpha+\sin^2\beta-2$

$=\cos^2\alpha+\sin^2\beta\geqq0$

よって　(左辺)≧(右辺)

別解 2　(左辺)−(右辺)$=\sin^2\alpha+\cos^2\beta-\cos2\beta+\cos2\alpha$

$=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}+\dfrac{1+\cos2\beta}{2}-\cos2\beta+\cos2\alpha$

$=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}+\dfrac{1-\cos2\beta}{2}\geqq0$

よって　(左辺)≧(右辺)

8

解説

(1)　$\sin2x=\sqrt{2}\sin x$ から　$2\sin x\cos x=\sqrt{2}\sin x$

よって　$\sin x(2\cos x-\sqrt{2})=0$

ゆえに　$\sin x=0$　または　$\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\sin x=0$ より　$x=0,\ \pi$

$\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi$

したがって，解は　$x=0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

(2)　$\cos2x=3\cos x-2$ から　$2\cos^2x-1=3\cos x-2$

よって　$2\cos^2x-3\cos x+1=0$　　ゆえに　$(\cos x-1)(2\cos x-1)=0$

したがって　$\cos x=1,\ \dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\cos x=1$ より　$x=0$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ より　$x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，解は　$x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

(3)　$\cos2x>\sin x$ から　$1-2\sin^2x>\sin x$

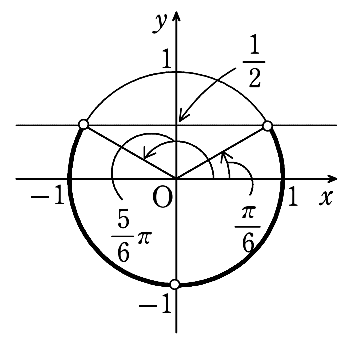
よって　$2\sin^2x+\sin x-1<0$

ゆえに　$(\sin x+1)(2\sin x-1)<0$

したがって　$-1<\sin x<\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，解は

$0\leqq x<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi$



(4)　$\sin2x>\cos x$ から　$2\sin x\cos x>\cos x$

よって　$\cos x(2\sin x-1)>0$

ゆえに　$(\cos x>0$ かつ $2\sin x-1>0)$　または　$(\cos x<0$ かつ $2\sin x-1<0)$

すなわち　$\left(\cos x>0\ \text{かつ}\ \sin x>\dfrac{1}{2}\right)$　……①

または　$\left(\cos x<0\ \text{かつ}\ \sin x<\dfrac{1}{2}\right)$　……②

$0\leqq x<2\pi$ であるから，① より　$\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi<x<2\pi\right)$ かつ $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，② より　$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi$ かつ $\left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi<x<2\pi\right)$

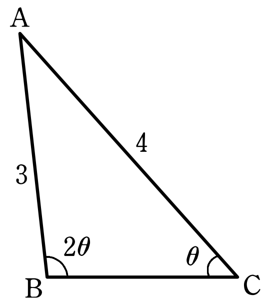
よって　$\dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

ゆえに，解は　$\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi<x<\dfrac{3}{2}\pi$

9

解説

(1)　正弦定理により　$\dfrac{3}{\sin\theta}=\dfrac{4}{\sin 2\theta}$



よって　　$3\sin 2\theta=4\sin\theta$

ゆえに　　$6\sin\theta\cos\theta=4\sin\theta$

すなわち　$2\sin\theta(3\cos\theta-2)=0$

$\sin\theta \fallingdotseq 0$ であるから　$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

(2)　$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

(3)　3 倍角の公式から

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}-4\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^3$$

$$=\sqrt{5}-\frac{20\sqrt{5}}{27}=\frac{7\sqrt{5}}{27}$$

(4)　$\angle A=\pi-(\angle B+\angle C)=\pi-(2\theta+\theta)=\pi-3\theta$

よって，正弦定理により　$\dfrac{BC}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{3}{\sin\theta}$

ゆえに　$BC=\dfrac{3}{\sin\theta}\cdot\sin(\pi-3\theta)=\dfrac{3}{\sin\theta}\cdot\sin 3\theta=3\cdot\dfrac{3}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{7\sqrt{5}}{27}=\dfrac{7}{3}$

10

解説

与えられた方程式を変形すると　$\cos 2x+2\sin x=a$

$y=\cos 2x+2\sin x$，$\sin x=t$ とおくと

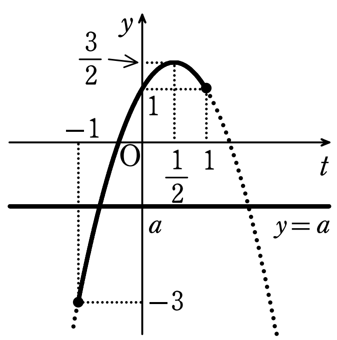
$$y=(1-2\sin^2 x)+2\sin x=-2\sin^2 x+2\sin x+1$$

$$=-2t^2+2t+1=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots①$$

また，$0\leqq x<2\pi$ から　$-1\leqq t\leqq 1$

(1)　方程式が解をもつための必要十分条件は，t についての 2 次関数 ① のグラフが，$-1\leqq t\leqq 1$ において直線 $y=a$ と共有点をもつことである。

したがって，図から　$-3\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$



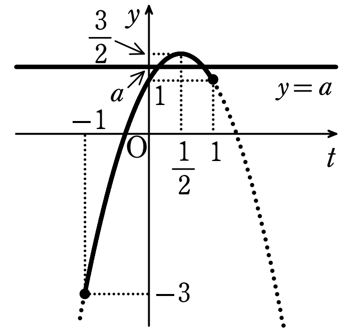
(2)　$0\leqq x<2\pi$ であるから

$t=1$ のとき　$x=\dfrac{\pi}{2}$　(ただ 1 個)

$t=-1$ のとき　$x=\dfrac{3}{2}\pi$　(ただ 1 個)

$-1<t<1$ のとき，x は 2 つの値をとる。

よって，方程式が異なる 4 個の解をもつための必要十分条件は，① のグラフが，$-1<t<1$ において直線 $y=a$ と異なる 2 個の共有点をもつことである。



したがって，図から　$1<a<\dfrac{3}{2}$