1

解答 (1) $a_n=-3n+103$，$a_{35}=-2$

(2) (ア) $2n-48$　(イ) 第 83 項　(ウ) 第 25 項

解説

(1) 初項が 100，公差が $97-100=-3$ であるから，一般項は

$$a_n=100+(n-1)\cdot(-3)=-3n+103$$

また　$a_{35}=-3\cdot 35+103=-2$

(2) (ア) 初項を a，公差を d とすると，$a_{59}=70$，$a_{66}=84$ であるから

$$\begin{cases} a+58d=70 \\ a+65d=84 \end{cases}$$　これを解いて　$a=-46$，$d=2$

よって，一般項は　$a_n=-46+(n-1)\cdot 2=2n-48$

(イ) $a_n=118$ とすると　$2n-48=118$

これを解いて　$n=83$　よって　第 83 項

(ウ) $a_n>0$ とすると　$2n-48>0$　これを解いて　$n>24$

したがって，初めて正になるのは　第 25 項

2

解答 (1) 448　(2) 1920

解説

(1) この等差数列の初項は 85，公差は -7 であるから，末項 43 が第 n 項であるとすると

$$85+(n-1)\cdot(-7)=43$$

すなわち　$-7n+92=43$　ゆえに　$n=7$

よって，初項 85，末項 43，項数 7 の等差数列の和を求めて

$$\frac{1}{2}\cdot 7(85+43)=448$$

(2) 公式 $S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$ において，$n=32$，$a=-2$，$d=4$ であるから，

求める和は　$\frac{1}{2}\cdot 32(-4+31\cdot 4)=1920$

3

解答 (1) 第 37 項　(2) 第 18 項，648

解説

(1) 初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 70+(n-1)\cdot(-4)\}=\frac{1}{2}n(144-4n)$$

$$=2n(36-n)\ \cdots\cdots ①$$

$S_n<0$ とすると　$2n(36-n)<0$

$n>0$ であるから　$36-n<0$　よって　$n>36$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=37$

ゆえに，初項から第 37 項までの和が初めて負となる。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=70+(n-1)\cdot(-4)=-4n+74$

$a_n<0$ とすると　$-4n+74<0$　よって　$n>\frac{74}{4}=18.5$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=19$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は第 19 項以降が負になるから，初項から第 18 項までの和が最大となる。

その最大値は　$S_{18}=2\cdot 18(36-18)=648$

別解 ① から　$S_n=2n(36-n)=-2(n^2-36n)=-2(n-18)^2+2\cdot 18^2$

$$=-2(n-18)^2+648$$

よって，S_n は $n=18$ で最大値 648 をとる。

ゆえに，初項から第 18 項までの和が最大で，その最大値は　648

4

解答 (1) $a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$，$a_8=-4374$　(2) $32\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

解説

(1) 初項が 2，公比が $\frac{-6}{2}=-3$ であるから，一般項は

$$a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$$

また　$a_8=2\cdot(-3)^{8-1}=-4374$

(2) 初項を a，公比を r，一般項を a_n とすると，$a_2=48$，$a_5=162$ であるから

$$\begin{cases} ar=48 & \cdots\cdots ① \\ ar^4=162 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② から　$ar\cdot r^3=162$　これに ① を代入して　$48r^3=162$

ゆえに　$r^3=\frac{27}{8}$　すなわち　$r^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3$　r は実数であるから　$r=\frac{3}{2}$

このとき，① から　$a=48\cdot\frac{2}{3}=32$　したがって　$a_n=32\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

5

解答 (1) 315　(2) 189

解説

(1) $\frac{5(2^6-1)}{2-1}=5(2^6-1)=315$

(2) 末項 96 が第 n 項とすると　$96=3\cdot 2^{n-1}$

よって　$2^{n-1}=32$　すなわち　$2^{n-1}=2^5$

ゆえに　$n-1=5$　よって　$n=6$

したがって，求める和は　$\frac{3(2^6-1)}{2-1}=189$

別解 初項 a，公比 r の等比数列の第 n 項を l とすると，初項から第 n 項までの和は

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a-r\cdot ar^{n-1}}{1-r}=\frac{a-rl}{1-r}$$

よって，求める和は次のように計算できる。

$$\frac{3-2\cdot 96}{1-2}=189$$

6

解答 $x=4$，$y=36$

解説

数列 x，12，y が等比数列であるから

$12^2=xy$　よって　$xy=144$ ……①

数列 68，y，x が等差数列であるから

$2y=68+x$　よって　$x=2y-68$ ……②

② を ① に代入して　$(2y-68)y=144$　整理して　$y^2-34y-72=0$

ゆえに　$(y+2)(y-36)=0$　よって　$y=-2,\ 36$

条件より，$y>0$ であるから　$y=36$

これを ② に代入して　$x=4$　これは条件 $0<x<y$ を満たす。

したがって　$x=4$，$y=36$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$a_n=-5n+18$，$a_{15}=-57$

(2)　(ア)　$-2n+59$　　(イ)　第 85 項　　(ウ)　第 30 項

解説

(1)　初項が 13，公差が $8-13=-5$ であるから，一般項は

$$a_n=13+(n-1)\cdot(-5)=-5n+18$$

また　$a_{15}=-5\cdot15+18=-57$

(2)　(ア)　初項をa，公差を d とすると，$a_{53}=-47$，$a_{77}=-95$ であるから

$a+52d=-47$，$a+76d=-95$　　これを解いて　　$a=57$，$d=-2$

ゆえに　$a_n=57+(n-1)\cdot(-2)=-2n+59$

(イ)　$a_n=-111$ とすると　$-2n+59=-111$

これを解いて　$n=85$　　よって　第 85 項

(ウ)　$a_n<0$ とすると　$2n>59$　　よって　$n>\dfrac{59}{2}=29.5$

したがって，初めて負になるのは　第 30 項

$\boxed{2}$

解答　(1)　$S=1617$　　(2)　$S=-4750$

解説

(1)　初項が 1，公差が 3 であるから，末項 97 が第 n 項であるとすると

$1+(n-1)\cdot3=97$　　よって　$n=33$

ゆえに，初項 1，末項 97，項数 33 の等差数列の和を求めて

$$S=\frac{1}{2}\cdot33(1+97)=1617$$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot100\{2\cdot200+(100-1)\cdot(-5)\}=-4750$

$\boxed{3}$

解答　(1)　なりえない　　(2)　$n=76$　　(3)　$n=38$

解説

初項を a，公差を d，第 n 項を a_n とすると　　$a_5=a+4d$，$a_{10}=a+9d$

$a_5=100$，$a_{10}=85$ であるから　　$a+4d=100$，$a+9d=85$

これを解いて　　$a=112$，$d=-3$

よって　　$a_n=112+(n-1)\cdot(-3)=-3n+115$

(1)　$a_n=50$ とすると　　$-3n+115=50$

ゆえに　$3n=65$　　これを満たす自然数 n は存在しない。

よって，50 はこの数列の項となりえない。

(2)　$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot112+(n-1)\cdot(-3)\}=\frac{1}{2}n(227-3n)$$

$S_n<0$ とすると　$n(227-3n)<0$　　すなわち　$n(3n-227)>0$

$n>0$ であるから　$3n-227>0$　　ゆえに　$n>\dfrac{227}{3}=75.6\cdots\cdots$

n は自然数であるから　$n\geqq76$　　よって，求める n の値は　$n=76$

(3)　$a_n>0$となる最大の n に対して S_n は最大となるから

$a_n=-3n+115>0$　　よって　$n<\dfrac{115}{3}=38.3\cdots\cdots$

よって，$n=38$ のとき，和 S_n は最大となる。

別解　(2) から

$$S_n=\frac{1}{2}n(-3n+227)$$

$$=-\frac{3}{2}\left(n-\frac{227}{6}\right)^2+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{227}{6}\right)^2$$

$\dfrac{227}{6}=37.8\cdots\cdots$ であるから　37 と 38 では 38 に近い。

したがって，$n=38$ のとき，和 S_n は最大となる。

$\boxed{4}$

解答　(1)　$a_n=45\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2)　$a_n=3\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

解説

(1)　初項が 45，公比が $\dfrac{15}{45}=\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから，一般項は

$$a_n=45\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(2)　初項を a，公比を r とすると　$a_n=ar^{n-1}$

$a_3=12$，$a_7=192$ であるから

$ar^2=12$　……①，$ar^6=192$　……②

$ar^6=ar^2\cdot r^4$ であるから，① を ② に代入して　$12r^4=192$

ゆえに　$r^4=16$　　よって　$r=\pm2$

① から，$r=2$ のとき $a=3$，$r=-2$ のとき $a=3$

したがって，一般項は　$a_n=3\cdot2^{n-1}$　または　$a_n=3\cdot(-2)^{n-1}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　122　　(2)　122

解説

(1)　$\dfrac{2\{1-(-3)^5\}}{1-(-3)}=\dfrac{2\{1-(-243)\}}{4}=\dfrac{2\cdot244}{4}=122$

(2)　項数を n とする。

$162\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=2$ から　　$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{81}$　　すなわち　　$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4$

ゆえに　$n-1=4$　　よって　$n=5$

したがって，求める和は　$$\frac{162\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=122$$

別解　初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和 S は　$S=\dfrac{a-rl}{1-r}=\dfrac{rl-a}{r-1}$

よって　$$\frac{162-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot2}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=122$$

$\boxed{6}$

解答　$a=5$，$b=15$ または $a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{15}{2}$

解説

数列 -5，a，b が等差数列であるから

$2a=-5+b$　……①

数列 a，b，45 が等比数列であるから

$b^2=45a$　　……②

① から　$b=2a+5$　……③　　② に代入して　$(2a+5)^2=45a$

整理して　$4a^2-25a+25=0$　　これを解いて　$a=5$，$\dfrac{5}{4}$

③ から　　$a=5$，$b=15$ または $a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{15}{2}$

1

解答　7，9，11

解説

3つの数を $a-d$，a，$a+d$ とおく。条件から

$(a-d)+a+(a+d)=27$ ……①，　$(a-d)\cdot a\cdot(a+d)=693$ ……②

①から　$3a=27$　　よって　$a=9$

これを②に代入すると　$(9-d)\cdot 9\cdot(9+d)=693$　　ゆえに　$81-d^2=77$

よって　$d^2=4$　　これを解いて　$d=\pm 2$

$d=2$ のとき　$a-d=7$，$a+d=11$

$d=-2$ のとき　$a-d=11$，$a+d=7$

したがって，求める3つの数は　7，9，11

別解　3つの数を a，b，c とする。

これらが等差数列をなすから　$2b=a+c$ ……①

また，条件から　$a+b+c=27$ ……②，　$abc=693$ ……③

①，②から　$b=9$，$c=18-a$ ……④

④を③に代入すると　$a\cdot 9\cdot(18-a)=693$

整理すると　$(a-11)(a-7)=0$　　ゆえに　$a=7$，11

$a=7$ のとき　④から　$c=11$　　よって　$(a,\ b,\ c)=(7,\ 9,\ 11)$

$a=11$ のとき　④から　$c=7$　　よって　$(a,\ b,\ c)=(11,\ 9,\ 7)$

よって，求める3つの数は　7，9，11

2

解答　(1)　6570　(2)　2821　(3)　3942　(4)　17089　(5)　8446

解説

20 から 200 までの自然数のうち，自然数 n の倍数の和を $S(n)$ とする。

(1)　20 から 200 までの自然数のうち，3の倍数を順に並べると

$3\cdot 7$，$3\cdot 8$，$3\cdot 9$，……，$3\cdot 66$

これは初項 21，末項 198，項数 $66-7+1=60$ の等差数列であるから

$$S(3)=\frac{1}{2}\cdot 60(21+198)=6570$$

(2)　20 から 200 までの自然数のうち，7の倍数を順に並べると

$7\cdot 3$，$7\cdot 4$，$7\cdot 5$，……，$7\cdot 28$

これは初項 21，末項 196，項数 $28-3+1=26$ の等差数列であるから

$$S(7)=\frac{1}{2}\cdot 26(21+196)=2821$$

(3)　20 から 200 までの自然数のうち，5で割って2余る数を順に並べると

$5\cdot 4+2$，$5\cdot 5+2$，$5\cdot 6+2$，……，$5\cdot 39+2$

これは初項 22，末項 197，項数 $39-4+1=36$ の等差数列であるから，求める和は

$$\frac{1}{2}\cdot 36(22+197)=3942$$

(4)　20 から 200 までの自然数の和は

(1 から 200 までの自然数の和)－(1 から 19 までの自然数の和)

$$=\frac{1}{2}\cdot 200(200+1)-\frac{1}{2}\cdot 19(19+1)=20100-190=19910$$

(2)から，求める和は　$19910-2821=17089$

(5)　3かつ7の倍数は，21 の倍数である。

20 から 200 までの自然数のうち，21 の倍数を順に並べると

$21\cdot 1$，$21\cdot 2$，$21\cdot 3$，……，$21\cdot 9$

これは初項 21，末項 189，項数9の等差数列であるから

$$S(21)=\frac{1}{2}\cdot 9(21+189)=945$$

よって，求める和は　$S(3)+S(7)-S(21)=6570+2821-945=8446$

3

解答　295

解説

初項を a，公差を d，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_5=\frac{1}{2}\cdot 5(2a+4d)=5(a+2d),\quad S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10(2a+9d)=5(2a+9d)$$

$S_5=-5$，$S_{10}=-5+145=140$ であるから　$5(a+2d)=-5$，$5(2a+9d)=140$

ゆえに　$a+2d=-1$，$2a+9d=28$　　これを解いて　$a=-13$，$d=6$

よって，求める和は　$S_{15}-S_{10}=\dfrac{1}{2}\cdot 15\{2\cdot(-13)+14\cdot 6\}-140$

$$=435-140=295$$

4

解答　(1)　証明略，初項 -3，公差 2　(2)　証明略，初項 1，公差 6

解説

(1)　$a_n=2n-5$ であるから

$$a_{n+1}-a_n=\{2(n+1)-5\}-(2n-5)=2\quad(一定)$$

よって，数列 $\{a_n\}$ は等差数列である。

公差は 2，初項は　$a_1=2\cdot 1-5=-3$

(2)　$b_n=a_{3n}=2\cdot(3n)-5=6n-5$

ゆえに　$b_{n+1}-b_n=\{6(n+1)-5\}-(6n-5)=6$　(一定)

よって，数列 $\{b_n\}$ は等差数列である。

公差は 6，初項は　$b_1=6\cdot 1-5=1$

5

解答　$x=\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{2}{5}$；　$a_n=\dfrac{2}{n+1}$

解説

数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$：　1，$\dfrac{1}{x}$，2，$\dfrac{1}{y}$，…… が等差数列になる。

よって　$2\cdot\dfrac{1}{x}=1+2$，$2\cdot 2=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$　　ゆえに　$x=\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{2}{5}$

この数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ の一般項は　$1+(n-1)\cdot\left(\dfrac{3}{2}-1\right)=\dfrac{n+1}{2}$

したがって　$a_n=\dfrac{2}{n+1}$

6

解答　5，-10，20

解説

(解1)　等比数列をなす3つの実数を a，ar，ar^2 とおく。

条件から　$a+ar+ar^2=15$ ……①

$a\cdot ar\cdot ar^2=-1000$ ……②

②から　$a^3r^3=-1000$　　すなわち　$(ar)^3=(-10)^3$

ar は実数であるから　$ar=-10$ ……③

①の両辺に r を掛けて　$ar+ar^2+ar^3=15r$　　すなわち　$ar(1+r+r^2)=15r$

③を代入して　$-10(1+r+r^2)=15r$　　整理すると　$2r^2+5r+2=0$

よって　$(r+2)(2r+1)=0$　　ゆえに　$r=-2$，$-\dfrac{1}{2}$

③から　$r=-2$ のとき　$a=5$，　$r=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$a=20$

$a=5$，$r=-2$ のとき　$ar=-10$，$ar^2=20$

$a=20$，$r=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$ar=-10$，$ar^2=5$

よって，求める3つの実数は　5，-10，20

(解2)　等比数列をなす3つの実数を a，b，c とおくと

$b^2=ac$ ……①

条件から　$a+b+c=15$ ……②，　$abc=-1000$ ……③

①，③から　$b\cdot b^2=-1000$　　すなわち　$b^3=(-10)^3$

b は実数であるから　$b=-10$

これを①，②に代入すると　$ac=100$ ……④，　$a+c=25$ ……⑤

⑤から　$c=25-a$ ……⑥

これを④に代入して　$a(25-a)=100$

よって　$a^2-25a+100=0$　　すなわち　$(a-5)(a-20)=0$

ゆえに　$a=5$，20

⑥から　$a=5$ のとき　$c=20$，　$a=20$ のとき　$c=5$

したがって，求める3つの実数は　5，-10，20

7

解答　19608 円

解説

各年初めの元金は，1年ごとに利息がついて 1.02 倍となる。

1年目初めの x 円は，5年後末には　$x(1.02)^5$ 円

2年目初めの x 円は，5年後末には　$x(1.02)^4$ 円

⋮

5年目初めの x 円は，5年後末には　$x\cdot 1.02$ 円　になる。

よって，5年間での貯金の総額は

$$x\cdot 1.02+x(1.02)^2+\cdots\cdots+x(1.02)^5=\frac{1.02x\{(1.02)^5-1\}}{1.02-1}$$

$$=\frac{1.02x\times 0.1}{0.02}$$

これが 10 万円になるとすると　$\dfrac{1.02x\times 0.1}{0.02}=100000$

これを解いて　$x=19607.8$……

円未満を切り上げて，求める金額は　19608 円

$\boxed{1}$

解答　$2(m+n)(n-m)$

解説

m 以上 n 以下の分数で，5 を分母とするもの（整数も含む）を書き出すと

$$\frac{5m}{5},\ \frac{5m+1}{5},\ \frac{5m+2}{5},\ \dots\dots,\ \frac{5n-1}{5},\ \frac{5n}{5}$$

これは初項 m，末項 n，公差 $\frac{1}{5}$，項数 $5(n-m)+1$ の等差数列である。

よって，その和を S_1 とすると　$S_1=\frac{1}{2}\{5(n-m)+1\}(m+n)$

また，m 以上 n 以下の整数の和を S_2 とすると　$S_2=\frac{1}{2}(n-m+1)(m+n)$

求める和は S_1-S_2 であるから

$$\frac{1}{2}\{5(n-m)+1\}(m+n)-\frac{1}{2}(n-m+1)(m+n)$$
$$=\frac{1}{2}(m+n)\{5(n-m)+1-(n-m+1)\}$$
$$=\frac{1}{2}(m+n)\cdot 4(n-m)=2(m+n)(n-m)$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　78　　(2)　162

解説

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$r=1$ とすると，$S_{10}=10a$ となり　　$10a=6$

このとき，$S_{20}=20a=12\neq 24$ であるから，条件を満たさない。

よって　　$r\neq 1$

ゆえに　　$S_{10}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=6$ ……①，$S_{20}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=24$ ……②

②÷① から　　$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}\cdot\frac{r-1}{a(r^{10}-1)}=\frac{24}{6}$

よって　　$r^{10}+1=4$　すなわち　$r^{10}=3$　……③

(1)　$S_{30}=\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}\{(r^{10})^2+r^{10}+1\}$

①，③ を代入して　　$S_{30}=6\cdot(3^2+3+1)=78$

(2)　$S_{40}=\frac{a(r^{40}-1)}{r-1}=\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}\{(r^{10})^2+1\}$

②，③ を代入して　　$S_{40}=24\cdot(3^2+1)=240$

求める第 31 項から第 40 項までの和は $S_{40}-S_{30}$ であるから

$S_{40}-S_{30}=240-78=162$

$\boxed{3}$

解答　$c_n=2^{2n-1}$

解説

$a_1=2$，$b_1=2$ であるから　　$c_1=2$

数列 $\{a_n\}$ の第 l 項が数列 $\{b_n\}$ の第 m 項に等しいとすると

$3l-1=2^m$

ゆえに　　$b_{m+1}=2^{m+1}=2^m\cdot 2=(3l-1)\cdot 2=3\cdot 2l-2$　……①

よって，b_{m+1} は数列 $\{a_n\}$ の項ではない。

① から　　$b_{m+2}=2b_{m+1}=3\cdot 4l-4=3(4l-1)-1$

ゆえに，b_{m+2} は数列 $\{a_n\}$ の項である。

よって，数列 $\{c_n\}$ は公比 2^2 の等比数列である。

$c_1=2$ であるから　　$c_n=2\cdot(2^2)^{n-1}=2^{2n-1}$

$\boxed{4}$

解答　3，9，15，21，27 または 27，21，15，9，3 または 23，25，27
　　または 27，25，23

解説

項の最小値を a，項数を n とすると　$\frac{n(a+27)}{2}=75$

ゆえに　$n(a+27)=150$

また，$0<a\leqq 27$ であるから　$27<a+27\leqq 54$

したがって　$(n,\ a+27)=(5,\ 30),\ (3,\ 50)$

ゆえに　　$(n,\ a)=(5,\ 3),\ (3,\ 23)$

$n=5$，$a=3$ のとき，次の場合がある。

[1]　初項が 3，末項が 27，項数が 5 の等差数列。

[2]　初項が 27，末項が 3，項数が 5 の等差数列。

[1] のとき，公差を d_1 とすると　$3+(5-1)d_1=27$

ゆえに　$d_1=6$

よって，求める数列は　3，9，15，21，27

[2] のとき，公差を d_2 とすると　$27+(5-1)d_2=3$

ゆえに　$d_2=-6$

よって，求める数列は　27，21，15，9，3

$n=3$，$a=23$ のとき，上と同様に考えると，求める数列は

23，25，27　または　27，25，23

$\boxed{1}$

解答　(1)　$2+5+8+\cdots\cdots+(3n-1)$　　(2)　$5^2+5^3+5^4+\cdots\cdots+5^9$

(3)　$2\cdot 1^2+2\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+2(n-1)^2$

解説

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=2+5+8+\cdots\cdots+(3n-1)$

(2)　$\sum_{m=2}^{9}5^m=5^2+5^3+5^4+\cdots\cdots+5^9$

(3)　$\sum_{k=1}^{n-1}2k^2=2\cdot 1^2+2\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots\cdots+2(n-1)^2$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\sum_{k=1}^{5}(k+2)$　　(2)　$\sum_{k=1}^{6}(3k-2)^2$

解説

(1)　数列 3，4，5，6の第 k 項は　　$k+2$

よって　　(与式)$=\sum_{k=1}^{n}(k+2)$

(2)　数列 1^2，4^2，7^2，10^2 の第 k 項は　　$(3k-2)^2$

よって　　(与式)$=\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$n(n+4)$　　(2)　$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$　　(3)　$\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-8)$

(4)　$\frac{1}{3}n(n-1)(n-8)$　　(5)　$\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)$

解説

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n$

$=n^2+4n=n(n+4)$

(2)　$\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}5$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+5n$

$=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$

$=\frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

(3)　$\sum_{k=1}^{n}(k^3-4k)=\sum_{k=1}^{n}k^3-4\sum_{k=1}^{n}k=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-2n(n+1)=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-8\}$

$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-8)$

(4)　$\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-5k)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2-5\sum_{k=1}^{n-1}k$

$=\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}-5\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$

$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)-\frac{5}{2}n(n-1)=\frac{1}{6}n(n-1)\{(2n-1)-15\}$

$$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-16)=\frac{1}{3}n(n-1)(n-8)$$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3^k=\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)$

$\boxed{4}$

解答　(1) $n^2(2n^2-1)$　(2) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$

解説

(1) 第 k 項は $(2k-1)^3$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=8\sum_{k=1}^{n}k^3-12\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=8\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-12\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n$$
$$=n(n+1)(2n^2-2n+1)-n=n^2(2n^2-1)$$

(2) 第 k 項は $k(2k-1)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

$\boxed{5}$

解答　第 k 項，和 S_n の順に　(1) $k(k+1)$，$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(2) 3^k-1，$\frac{3^{n+1}}{2}-n-\frac{3}{2}$　(3) $\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$，$\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1) 第 k 項は初項 2，公差 2，項数 k の等差数列の和であるから

$$a_k=\frac{1}{2}k\{2\cdot2+(k-1)\cdot2\}=k(k+1)$$

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(2) この数列の第 k 項は　$2+2\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+2\cdot3^{k-1}$

これは，初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 k 項までの和であるから

$$a_k=\frac{2(3^k-1)}{3-1}=3^k-1$$

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(3^k-1)=\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n=\frac{3^{n+1}}{2}-n-\frac{3}{2}$$

(3) 第 k 項は　$\displaystyle\sum_{m=1}^{k}m^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

よって，求める和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{n(n+1)+(2n+1)+1\}$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n^2+3n+2)=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

$\boxed{6}$

解答　$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

解説

この数列の第 k 項は　$k\{n+(k-1)\cdot(-1)\}=-k^2+(n+1)k$

したがって，求める和を S とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

別解　求める和を S とすると

$$S=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+\cdots\cdots+n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(1+2+\cdots\cdots+k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$\boxed{1}$

解答　(1) $3+6+9+12+15+18+21+24+27+30$

(2) $2^3+2^4+2^5+2^6$　(3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}3k=3+6+9+12+15+18+21+24+27+30$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5}2^{k+1}=2^3+2^4+2^5+2^6$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}$

$\boxed{2}$

解答　(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$

解説

(1) 第 k 項は $3k-2$ であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$

(2) 第 k 項は 3^{k-1} であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}3^{k-1}$

$\boxed{3}$

解答　(1) $n(n-6)$　(2) $\frac{1}{6}n(10n^2+3n+5)$　(3) $n(n^3+2n^2+n-1)$

(4) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$　(5) $\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$　(6) $\frac{1}{2}(3^{n+1}+4n-3)$

(7) $(n-1)(2n+7)$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-7)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}7=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-7n$

$$=n\{(n+1)-7\}=n(n-6)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k^2-4k+2)=5\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2$

$$=5\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n$$
$$=\frac{1}{6}n\{5(n+1)(2n+1)-12(n+1)+12\}=\frac{1}{6}n(10n^2+3n+5)$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k^3-1)=4\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}1=4\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-n$

$$=n\{n(n+1)^2-1\}=n(n^3+2n^2+n-1)$$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(5) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i-1)^2=\sum_{i=1}^{n}(9i^2-6i+1)=9\sum_{i=1}^{n}i^2-6\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}1$

$$=9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{2}n\{3(n+1)(2n+1)-6(n+1)+2\}=\frac{1}{2}n(6n^2+3n-1)$$

(6) $\sum_{k=1}^{n}(3^k+2)=\sum_{k=1}^{n}3^k+\sum_{k=1}^{n}2=\frac{3(3^n-1)}{3-1}+2n=\frac{1}{2}(3^{n+1}+4n-3)$

(7) $\sum_{k=1}^{n-1}(4k+7)=4\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}7=4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+7(n-1)$

$=(n-1)(2n+7)$

$\boxed{4}$

解答　(1) $\frac{1}{3}n(4n^2+12n+11)$　(2) $\frac{1}{3}n(n+1)(5n-2)$　(3) $\frac{1}{3}n(8n^2+3n-2)$

解説

数列の第 k 項を a_k とする。

(1) 各項は 3 から始まる奇数の平方であるから　$a_k=(2k+1)^2$

よって，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2+4k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)+6(n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(4n^2+12n+11)$$

(2) 数列 2，7，12，17，…… は，初項 2，公差 5 の等差数列であるから，その第 k 項は

$2+(k-1)\cdot5=5k-3$

ゆえに　$a_k=k(5k-3)$

よって，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(5k-3)=\sum_{k=1}^{n}(5k^2-3k)=5\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=5\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)\{5(2n+1)-9\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(10n-4)=\frac{1}{3}n(n+1)(5n-2)$$

(3) 数列 3，7，11，15，…… は，初項 3，公差 4 の等差数列であるから，その第 k 項は

$3+(k-1)\cdot4=4k-1$

ゆえに　$a_k=(2k-1)(4k-1)$

よって，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(4k-1)=\sum_{k=1}^{n}(8k^2-6k+1)=8\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=8\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$
$$=\frac{1}{3}n\{4(n+1)(2n+1)-9(n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(8n^2+3n-2)$$

$\boxed{5}$

解答　(1) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$　(2) $\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$　(3) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n^2+2n-1)$

解説

(1) この数列の第 k 項 a_k は，初項 1，公差 4，項数 k の等差数列の和で表されるから

$$a_k=\frac{1}{2}k\{2\cdot1+(k-1)\cdot4\}=k(2k-1)$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

(2) この数列の第 k 項 a_k は，初項 1，公比 3，項数 k の等比数列の和で表されるから

$$a_k=\frac{1(3^k-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^k-1)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n-1)}{3-1}-n\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$$

(3) 第 k 項は，一般項 $(2m-1)^2$ の第 k 項までの和であるから

$$\sum_{m=1}^{k}(4m^2-4m+1)=4\sum_{m=1}^{k}m^2-4\sum_{m=1}^{k}m+\sum_{m=1}^{k}1$$
$$=4\cdot\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)-4\cdot\frac{1}{2}k(k+1)+k$$
$$=\frac{1}{3}k(4k^2-1)=\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)$$

よって　求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}k(4k^2-1)=\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n^2+2n-1)$$

$\boxed{6}$

解答　(1) $\frac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$　(2) $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

解説

(1) この数列の第 k 項 a_k $(k\leqq n)$ は　$a_k=k(n+k)=k^2+nk$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2+nk)=\sum_{k=1}^{n}k^2+n\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3n\}=\frac{1}{6}n(n+1)(5n+1)$$

(2) この数列の第 k 項 a_k $(k\leqq n)$ は　$a_k=k^2\{n-(k-1)\}=-k^3+(n+1)k^2$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-k^3+(n+1)k^2\}=-\sum_{k=1}^{n}k^3+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=-\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)^2\{-3n+2(2n+1)\}=\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$

$\boxed{1}$

解答　7

解説

$$\sum_{k=m+1}^{2m}(2k+1)=\sum_{k=1}^{2m}(2k+1)-\sum_{k=1}^{m}(2k+1)$$
$$=2m(2m+1)+2m-\{m(m+1)+m\}$$
$$=3m^2+2m$$

ゆえに，与式は　$3m^2+2m>133$　すなわち　$3m^2+2m-133>0$

よって　$(m+7)(3m-19)>0$

m は自然数であるから　$m+7>0$　ゆえに　$3m-19>0$　すなわち　$m>\frac{19}{3}$

よって，求める最小の自然数 m は　7

$\boxed{2}$

解答　(1) $n(n+1)$　(2) $3\cdot2^{n+1}-3n-6$

解説

(1) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}2\right)=\sum_{k=1}^{n}2k=2\sum_{k=1}^{n}k=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=n(n+1)$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}3\cdot2^{i-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{3(2^k-1)}{2-1}=\sum_{k=1}^{n}(3\cdot2^k-3)=\sum_{k=1}^{n}3\cdot2^k-\sum_{k=1}^{n}3$

$$=\sum_{k=1}^{n}6\cdot2^{k-1}-3\sum_{k=1}^{n}1=\frac{6(2^n-1)}{2-1}-3n=3\cdot2^{n+1}-3n-6$$

$\boxed{3}$

解答　$\frac{10^{n+1}}{27}-\frac{1}{3}n-\frac{10}{27}$

解説

第 k 項は 3 が k 個並ぶから，その値は

$$3+3\cdot10+3\cdot10^2+\cdots\cdots+3\cdot10^{k-2}+3\cdot10^{k-1}=\frac{3(10^k-1)}{10-1}=\frac{10^k-1}{3}$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{10^k-1}{3}=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k-\sum_{k=1}^{n}1\right)=\frac{1}{3}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{10^{n+1}}{27}-\frac{1}{3}n-\frac{10}{27}$$

第２講　レベルＢ

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$　　(2)　$\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$

解説

(1)　求める和を S とすると

$$S=\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

(2)　求める和を T とすると

$$(1+2+\cdots\cdots+n)^2=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2+2(S+T)$$

すなわち　$\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2(S+T)$

したがって，(1) より

$$T=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　$\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^3+3n-1)$

解説

(1)　$S=\sum_{k=1}^{n}k$ とおくと

$$S=1+2+3+\cdots\cdots+n$$

$$S=n+(n-1)+\cdots\cdots+1$$

辺々を加えると　$2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots\cdots+(n+1)}_{n\text{ 個}}$

よって　$2S=n(n+1)$　すなわち　$S=\frac{1}{2}n(n+1)$

したがって　$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2)　$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}$$

$$=(\cancel{2^3}-1^3)+(\cancel{3^3}-\cancel{2^3})+(\cancel{4^3}-\cancel{3^3})+\cdots\cdots+\{\cancel{n^3}-\cancel{(n-1)^3}\}+\{(n+1)^3-\cancel{n^3}\}$$

$$=(n+1)^3-1$$

よって　$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=(n+1)^3-1$

$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$ であるから，(1) の結果より

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}\left\{\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)-3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-1-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3)　$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}=\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)$$

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4-k^4\}$$

$$=(\cancel{2^4}-1^4)+(\cancel{3^4}-\cancel{2^4})+(\cancel{4^4}-\cancel{3^4})+\cdots\cdots+\{\cancel{n^4}-\cancel{(n-1)^4}\}+\{(n+1)^4-\cancel{n^4}\}$$

$$=(n+1)^4-1$$

よって　$\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)=(n+1)^4-1$

(2) と同様にして，(1)，(2) の結果より

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}\left\{\sum_{k=1}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1)-6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{(n+1)^4-1-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

(4)　$(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^5-k^5\}$$

$$=(\cancel{2^5}-1^5)+(\cancel{3^5}-\cancel{2^5})+(\cancel{4^5}-\cancel{3^5})+\cdots\cdots+\{\cancel{n^5}-\cancel{(n-1)^5}\}+\{(n+1)^5-\cancel{n^5}\}$$

$$=(n+1)^5-1$$

よって　$\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)=(n+1)^5-1$

(2) と同様にして，(1) ～ (3) の結果より

$$\sum_{k=1}^{n}k^4$$

$$=\frac{1}{5}\left\{\sum_{k=1}^{n}(5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)-10\sum_{k=1}^{n}k^3-10\sum_{k=1}^{n}k^2-5\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{(n+1)^5-1-10\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-10\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}$$

$$=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n)$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^3+3n-1)$$

第３講　例題

$\boxed{1}$

解答　(1)　$a_n=n^2+4n+3$　　(2)　$a_n=2^n+3$

解説

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1)　数列 $\{b_n\}$ は，7，9，11，13，…… であるから，初項 7，公差 2 の等差数列である。

ゆえに　$b_n=7+(n-1)\cdot 2=2n+5$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+5)=8+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}5$$

$$=8+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+5(n-1)=n^2+4n+3$$

また，初項は $a_1=8$ であるから，上の式は $n=1$ のときにも成り立つ。

以上により，一般項 a_n は　$a_n=n^2+4n+3$

(2)　数列 $\{b_n\}$ は，2，4，8，16，…… であるから，初項 2，公比 2 の等比数列である。

ゆえに　$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3$$

また，初項は $a_1=5$ であるから，上の式は $n=1$ のときにも成り立つ。

以上により，一般項 a_n は　$a_n=2^n+3$

$\boxed{2}$

解答　$S=\frac{n}{3(4n+3)}$

解説

第 k 項は　$\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$

よって，求める和 S は

$$S=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(4n+3)-3}{3(4n+3)}=\frac{n}{3(4n+3)}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$a_1=0$，$n\geqq 2$ のとき $a_n=3n^2-3n+1$　　(2)　$a_n=2^{n-1}$

解説

(1)　初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^3-1=0$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^3-1)-\{(n-1)^3-1\}$

$$=(n^3-1)-(n^3-3n^2+3n-2)$$

$$=3n^2-3n+1\quad\cdots\cdots①$$

① で $n=1$ とすると $a_1=1$ となり，① は $n=1$ のときには成り立たない。

したがって　$a_1=0$，　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=3n^2-3n+1$

(2)　初項 a_1 は　$a_1=S_1=2^1-1=1$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}(2-1)$　……①

① で $n=1$ とすると $a_1=1$ が得られるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2^{n-1}$

4

解答　$S_n=(2n-1)2^n+1$

解説

$$S_n=3+5\cdot2+7\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n+1)2^{n-1}$$
$$2S_n=\qquad 3\cdot2+5\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n-1)2^{n-1}+(2n+1)2^n$$

辺々引くと　$-S_n=3+2\cdot2+2\cdot2^2+\cdots\cdots+2\cdot2^{n-1}-(2n+1)2^n$

$$=1+\frac{2(2^n-1)}{2-1}-(2n+1)2^n$$
$$=-1-(2n-1)2^n$$

ゆえに　$S_n=(2n-1)2^n+1$

5

解答　(1)　n^2-n+1　(2)　n^3　(3)　第 17 群の 15 番目

解説

(1)　$n\geqq2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある奇数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって，第 n 群の最初の奇数は $\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}$ 番目の奇数で

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(2)　(1) より，第 n 群は初項 n^2-n+1，公差 2，項数 n の等差数列をなす。

よって，その総和は

$$\frac{1}{2}n\{2\cdot(n^2-n+1)+(n-1)\cdot2\}=n^3$$

(3)　301 が第 n 群に含まれるとすると

$$n^2-n+1\leqq301<(n+1)^2-(n+1)+1$$

よって　$n(n-1)\leqq300<(n+1)n$　……①

$n(n-1)$，$(n+1)n$ は単調に増加し，$17\cdot16=272$，$18\cdot17=306$ であるから，

① を満たす自然数 n は　$n=17$

301 が第 17 群の m 番目であるとすると

$(17^2-17+1)+(m-1)\cdot2=301$　　これを解いて　$m=15$

したがって，301 は第 17 群の 15 番目に並ぶ数である。

別解　(前半)　$2k-1=301$ から　$k=151$

よって，301 はもとの数列において，151 番目の奇数である。

301 が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1)<151\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

ゆえに　$n(n-1)<302\leqq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は，上の解答と同様にして　$n=17$

6

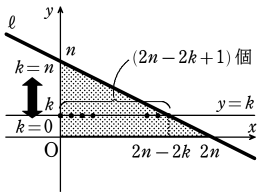
解答　$(n+1)^2$

解説

2 点 $(2n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$x+2y=2n$$

直線 $y=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$ と直線 ℓ の交点の座標は $(2n-2k,\ k)$ であるから，題意に適する格子点のうち，直線 $y=k$ 上にある点の個数は $2n-2k+1$ である。



よって，求める格子点の個数は

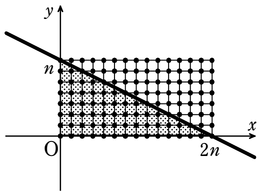
$$\sum_{k=0}^{n}(2n-2k+1)=\sum_{k=0}^{0}(2n-2k+1)+\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)$$
$$=(2n+1)+(2n+1)\sum_{k=1}^{n}1-2\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=(2n+1)+(2n+1)n-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=(n+1)^2$$

別解　直線 $x+2y=2n$ $(0\leqq y\leqq n)$ 上の格子点 $(0,\ n)$，$(2,\ n-1)$，……，$(2n,\ 0)$ の個数は

$n+1$

4 点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(2n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形上の格子点の個数は

$(n+1)(2n+1)$



よって，求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(n+1)(2n+1)-(n+1)\}+(n+1)=(n+1)^2$$

1

解答　(1)　$3n^2-n$　(2)　$\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1)　$\{a_n\}$：2，10，24，44，70，102，140，……

$\{b_n\}$：8，14，20，26，32，38，……

数列 $\{b_n\}$ は，初項 8，公差 6 の等差数列であるから　$b_n=8+(n-1)\cdot6=6n+2$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+2)=2+6\sum_{k=1}^{n-1}k+2\sum_{k=1}^{n-1}1$

$$=2+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=3n^2-n\quad\cdots\cdots①$$

$n=1$ のとき　$3n^2-n=3\cdot1^2-1=2$

初項は $a_1=2$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=3n^2-n$

(2)　$\{a_n\}$：3，4，7，16，43，124，……

$\{b_n\}$：1，3，9，27，81，……

数列 $\{b_n\}$ は，初項 1，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=3^{n-1}$

$n\geqq2$ のとき　$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=3+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)$　……①

$n=1$ のとき　$\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)=\frac{1}{2}(1+5)=3$

初項は $a_1=3$ であるから，① は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+5)$

2

解答　(1)　$S=\frac{n}{3n+1}$　(2)　$S=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

解説

(1)　$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

であるから

$$S=\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{n}{3n+1}$$

(2)　$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

であるから，$n\geqq2$ のとき

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$S=\dfrac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

3

解答　求める数列の一般項を a_n とする。

(1) $a_n=-2n+6$　(2) $a_1=3$，$n\geqq 2$ のとき $a_n=3n^2-3n+1$

(3) $a_1=5$，$n\geqq 2$ のとき $a_n=2^{n-1}$

解説

求める数列の一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) $n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(5n-n^2)-\{5(n-1)-(n-1)^2\}$$
$$=(-n^2+5n)-(-n^2+7n-6)=-2n+6 \quad \cdots\cdots ①$$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=4$

① で $n=1$ とおくと $a_1=4$ となるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_n=-2n+6$

(2) $n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^3+2)-\{(n-1)^3+2\}=(n^3+2)-(n^3-3n^2+3n+1)$$
$$=3n^2-3n+1 \quad \cdots\cdots ①$$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=3$

① で $n=1$ とおくと $a_1=1$ となるから，① は $n=1$ のときは成り立たない。

よって　$a_1=3$，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=3n^2-3n+1$

(3) $n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n+3)-(2^{n-1}+3)=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=5$

① で $n=1$ とおくと $a_1=1$ となるから，① は $n=1$ のときは成り立たない。

よって　$a_1=5$，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=2^{n-1}$

4

解答　$S=(n-1)\cdot 3^n+1$

解説

$$S=1\cdot 1+3\cdot 3+5\cdot 3^2+7\cdot 3^3+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$$
$$3S=\quad 1\cdot 3+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-1}+(2n-1)\cdot 3^n$$

辺々を引くと

$$S-3S=1\cdot 1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots\cdots+2\cdot 3^{n-1}-(2n-1)\cdot 3^n$$

よって　$-2S=1+2(3+3^2+3^3+\cdots\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n$

$$=1+2\cdot\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot 3^n=-2(n-1)\cdot 3^n-2$$

したがって　$S=(n-1)\cdot 3^n+1$

5

解答　(1) $\dfrac{1}{2}(3n^2-3n+2)$　(2) $\dfrac{1}{2}n(3n^2-1)$　(3) 第 10 群の 5 番目の数

解説

(1) もとの等差数列の第 n 項は　$1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

$n\geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる数の総数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

よって，第 n 群 $(n\geqq 2)$ の最初の数は，もとの等差数列の第 $\left\{\dfrac{1}{2}n(n-1)+1\right\}$ 項であるから

$$3\left\{\frac{1}{2}n(n-1)+1\right\}-2=\frac{1}{2}(3n^2-3n+2)$$

この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，求める数は　$\dfrac{1}{2}(3n^2-3n+2)$

(2) 求める和は，初項 $\dfrac{1}{2}(3n^2-3n+2)$，公差 3，項数 n の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}n\left\{2\cdot\frac{1}{2}(3n^2-3n+2)+(n-1)\cdot 3\right\}=\frac{1}{2}n(3n^2-1)$$

(3) (1) で求めた数を a_n とする。

148 が第 n 群に含まれるとすると　$a_n\leqq 148<a_{n+1}$　$\cdots\cdots$ ①

ここで　$a_{10}=\dfrac{1}{2}(3\cdot 10^2-3\cdot 10+2)=136$

$a_{11}=\dfrac{1}{2}(3\cdot 11^2-3\cdot 11+2)=166$

であるから，① を満たす自然数 n は　$n=10$

よって，148 は第 10 群に含まれる。

第 10 群に含まれる数を，小さい方から順に書き出すと

136，139，142，145，148，……

したがって，148 は第 10 群の 5 番目の数である。

6

解答　$\dfrac{1}{2}(n+1)(3n+2)$

解説

2 点 $(3n,\ 0)$，$(0,\ n)$ を通る直線 ℓ の方程式は　$x+3y=3n$

直線 $y=k$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$ と直線 ℓ の交点の座標は $(3n-3k,\ k)$ であるから，

題意に適する格子点のうち，直線 $y=k$ 上にある点の個数は $3n-3k+1$ である。

よって，求める格子点の個数は

$$\sum_{k=0}^{n}(3n-3k+1)=\sum_{k=0}^{0}(3n-3k+1)+\sum_{k=1}^{n}(3n-3k+1)$$
$$=(3n+1)+(3n+1)\sum_{k=1}^{n}1-3\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=(3n+1)+(3n+1)n-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$$

別解　直線 $x+3y=3n$ $(0\leqq y\leqq n)$ 上の格子点 $(0,\ n)$，$(3,\ n-1)$，……，$(3n,\ 0)$ の個数は　$n+1$

4 点 $(0,\ 0)$，$(3n,\ 0)$，$(3n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形上の格子点の個数は

$(n+1)(3n+1)$

よって，求める格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(n+1)(3n+1)-(n+1)\}+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$$

1

解答　(ア) $-4n+17$　(イ) 28　(ウ) 106

解説

$n=1$ のとき　$a_1=S_1=13$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=-2n^2+15n-\{-2(n-1)^2+15(n-1)\}$

$$=-4n+17 \quad \cdots\cdots ①$$

① で $n=1$ とすると $-4\cdot 1+17=13$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　$a_n={}^{ア}-4n+17$

$a_n>0$ とすると　$-4n+17>0$　ゆえに　$n<\dfrac{17}{4}$

n は自然数であるから　$n\leqq 4$

よって，S_n は $n=4$ のとき最大値をとる。

その最大値は　$S_4={}^{イ}28$

また　$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}|a_n|=\sum_{n=1}^{4}a_n-\sum_{n=5}^{10}a_n=2\sum_{n=1}^{4}a_n-\sum_{n=1}^{10}a_n$

$$=2\times 28-(-50)={}^{ウ}106$$

2

解答　$n(n+1)(n+2)$

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

また，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると

$\{a_n\}$：6，24，60，120，210，336，504，……

$\{b_n\}$：18，36，60，90，126，168，……

$\{c_n\}$：18，24，30，36，42，……

数列 $\{c_n\}$ は，初項 18，公差 6 の等差数列であるから

$$c_n=18+(n-1)\cdot 6=6n+12$$

$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=18+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+12)$

$$=18+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+12(n-1)=3n^2+9n+6$$

この式に $n=1$ を代入すると，$b_1=3+9+6=18$ となるから

$$b_n=3n^2+9n+6 \quad (n\geqq 1)$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=6+\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2+9k+6)$$
$$=6+3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+9\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)$$
$$=\frac{n}{2}\cdot 2(n^2+3n+2)=n(n+1)(n+2)$$

この式に $n=1$ を代入すると，$a_1=1\cdot 2\cdot 3=6$ となるから，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=n(n+1)(n+2)$

3

解答　(1) $\dfrac{2n}{n+1}$　(2) $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$　(3) $\dfrac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2})$

解説

(1)　この数列の第 k 項 a_k は

$$a_k=\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+k}=\frac{1}{\frac{1}{2}k(k+1)}=\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

よって，求める和を S とすると

$$S=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$$

(2)　第 k 項は　$\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{1\cdot2}-\dfrac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\dfrac{1}{2\cdot3}-\dfrac{1}{3\cdot4}\right)+\left(\dfrac{1}{3\cdot4}-\dfrac{1}{4\cdot5}\right)\right.$

$$\left.+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

(3)　第 k 項は　$\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}=\dfrac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$$+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-1-\sqrt{2})$$

$\boxed{4}$

解答　(ア)　1　　(イ)　1　　(ウ)　1

解説

$\log_5\dfrac{n+2}{n}=\log_5(n+2)-\log_5 n$　であるから

$$\sum_{n=1}^{10}\log_5\frac{n+2}{n}=(\cancel{\log_5 3}-\log_5 1)+(\cancel{\log_5 4}-\log_5 2)+(\cancel{\log_5 5}-\cancel{\log_5 3})+\cdots\cdots$$

$$+(\log_5 11-\cancel{\log_5 9})+(\log_5 12-\cancel{\log_5 10})$$

$$=-\log_5 2+\log_5 11+\log_5 12$$

$$=-\log_5 2+\log_5 11+2\log_5 2+\log_5 3$$

$$={}^{ア}1\cdot\log_5 2+{}^{イ}1\cdot\log_5 3+{}^{ウ}1\cdot\log_5 11$$

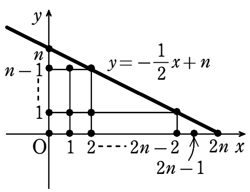
$\boxed{5}$

解答　(1)　$(n+1)^2$ 個　　(2)　$\dfrac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)$ 個

解説

(1)　領域は，右図のように，x 軸，y 軸，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+n$ で囲まれた三角形の周および内部である。

直線 $y=k$ ($k=n$，$n-1$，……，0) 上には，それぞれ 1，3，5，……，$2n+1$ 個の格子点が並ぶ。



よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(2\cdot0+1)+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=1+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=(n+1)^2\ (個)$$

別解　線分 $x+2y=2n$ $(0\leqq y\leqq n)$ 上の格子点 $(0,\ n)$，$(2,\ n-1)$，……，$(2n,\ 0)$ の個数は　$n+1$

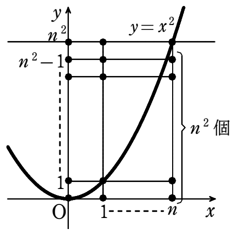
4 点 $(0,\ 0)$，$(2n,\ 0)$，$(2n,\ n)$，$(0,\ n)$ を頂点とする長方形の周および内部にある格子点の個数は　$(2n+1)(n+1)$

ゆえに，求める格子点の個数を N とすると　$2N-(n+1)=(2n+1)(n+1)$

よって　$N=\dfrac{1}{2}\{(2n+1)(n+1)+(n+1)\}=\dfrac{1}{2}(n+1)(2n+2)=(n+1)^2$ (個)

(2)　領域は，右図のように，y 軸，直線 $y=n^2$，放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分である (境界線を含む)。

直線 $x=k$ ($k=0$，1，2，……，$n-1$，n) 上には，それぞれ n^2+1，$(n^2+1)-1$，$(n^2+1)-4$，$(n^2+1)-9$，……，$(n^2+1)-n^2$ 個の格子点が並ぶ。



よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2+1-k^2)$$

$$=(n^2+1-0^2)+\sum_{k=1}^{n}(n^2+1-k^2)$$

$$=(n^2+1)+(n^2+1)\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=(n^2+1)+(n^2+1)n-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)\ (個)$$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$b_n=n$　　(2)　略　　(3)　略

解説

(1)　$a_n=1+2(n-1)=2n-1$

よって　$b_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$$=\frac{1}{n}\left\{2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}=n$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ が等差数列であるとき，その初項を a，公差を d とする。

このとき　$a_n=a+(n-1)d=dn+a-d$

よって　$b_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(dk+a-d)$

$$=\frac{1}{n}\left\{d\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(a-d)n\right\}$$

$$=\frac{d(n+1)}{2}+a-d$$

ゆえに　$b_{n+1}-b_n=\left\{\dfrac{d(n+2)}{2}+a-d\right\}-\left\{\dfrac{d(n+1)}{2}+a-d\right\}=\dfrac{d}{2}$

$\dfrac{d}{2}$ は定数であるから，数列 $\{b_n\}$ は等差数列である。

(3)　数列 $\{b_n\}$ が等差数列であるとき，その初項を b，公差を d' とする。

このとき　$b_n=b+(n-1)d'=d'n+b-d'$

$b_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=nb_n=d'n^2+(b-d')n$　……①

$n\geqq2$ のとき，① から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_k=d'(n-1)^2+(b-d')(n-1)$　……②

①−② から　$a_n=d'(2n-1)+b-d'$　……③

ここで　$a_1=1\cdot b_1=b$

また，③ において，$n=1$ とすると

$a_1=d'(2\cdot1-1)+b-d'=b$

ゆえに，$n=1$ のときにも ③ は成り立つ。

よって　$a_{n+1}-a_n=\{d'(2n+1)+b-d'\}-\{d'(2n-1)+b-d'\}=2d'$

$2d'$ は定数であるから，数列 $\{a_n\}$ は等差数列である。

$\boxed{2}$

解答　$\dfrac{16200}{41}$

解説

分母が等しいものを群として，次のように区切って考える。

$$\frac{1}{2}\ \Big|\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\ \Big|\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\ \Big|\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\ \Big|\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \cdots\cdots$$

第 1 群から第 n 群までの項数は　$1+2+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

第 800 項が第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<800\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

$\dfrac{1}{2}(n-1)n$，$\dfrac{1}{2}n(n+1)$ は単調に増加し，$\dfrac{39\cdot40}{2}=780$，$\dfrac{40\cdot41}{2}=820$ であるから

$n=40$

よって，第 800 項は第 40 群の　$800-780=20$（番目）の数である。

第 n 群に属するすべての数の和は

$$\frac{1}{n+1}(1+2+\cdots\cdots+n)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n}{2}$$

したがって，初項から第 800 項までの和は

$$\frac{1}{2}\{1+2+\cdots\cdots+(40-1)\}+\frac{1}{41}(1+2+\cdots\cdots+20)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot39\cdot40+\frac{1}{41}\cdot\frac{1}{2}\cdot20\cdot21=\frac{10(39\cdot41+21)}{41}=\frac{16200}{41}$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　初めの数　8，終わりの数　15　　(2)　376　　(3)　7

解説

(1)　第 4 群の初めの数は　$1+2+2^2+1=8$

終わりの数は　$1+2+2^2+2^3=15$

(2)　第 5 群の初めの数は　$1+2+2^2+2^3+1=16$

よって，第 5 群は初項 16，公差 1，項数 $2^{5-1}=16$ の等差数列である。ゆえに，総和は

$$\frac{1}{2}\cdot16(2\cdot16+16-1)=376$$

(3)　第 n 群の初めの数は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}+1=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+1=2^{n-1}$

よって，第 n 群は初項 2^{n-1}，公差 1，項数 2^{n-1} の等差数列である。ゆえに，総和は

$$\frac{1}{2}\cdot2^{n-1}(2\cdot2^{n-1}+2^{n-1}-1)=2^{n-2}(3\cdot2^{n-1}-1)\quad\cdots\cdots①$$

ここで，① は $n=7$ のとき 6112，$n=8$ のとき 24512

したがって，$2^{n-2}(3\cdot2^{n-1}-1)<10000$ を満たす最大の n は　$n=7$

$\boxed{4}$

解答　$(n-1)\cdot2^{n+1}+2$

解説

$\log_2\dfrac{y}{x}\leqq x$ から　$y\leqq x\cdot2^x$

よって，$x=k$（$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）のとき，適する y の値は $y=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k\cdot2^k$ の $k\cdot2^k$ 個.

$x\leqq n$ であるから，求める格子点の個数を S_n とすると　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^k$

一方　$2S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^{k+1}=n\cdot2^{n+1}+\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot2^{k+1}=n\cdot2^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(k-1)\cdot2^k$

ゆえに　$S_n=2S_n-S_n=n\cdot2^{n+1}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$a_n=4n-2$　　(2)　$a_n=-3(-2)^{n-1}$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公差 4 の等差数列であるから，一般項は

$$a_n=2+(n-1)\cdot4=4n-2$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項 -3，公比 -2 の等比数列であるから，一般項は

$$a_n=-3(-2)^{n-1}$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a_n=\dfrac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)$　　(2)　$a_n=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項が 4，階差数列の第 n 項が $3n^2$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=4+\sum_{k=1}^{n-1}3k^2=4+3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

$$=\frac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=4$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{1}{2}(2n^3-3n^2+n+8)$

(2)　漸化式から　$a_{n+1}-a_n=4^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項が 1，階差数列の第 n 項が 4^n であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

$$=\frac{1}{3}(4^n-1)\quad\cdots\cdots①$$

初項は $a_1=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{1}{3}(4^n-1)$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$a_n=3^{n-1}+1$　　(2)　$a_n=5\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-3$

解説

(1)　$a_{n+1}=3a_n-2$ を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

$b_n=a_n-1$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$，$b_1=a_1-1=2-1=1$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列で　$b_n=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$

$a_n=b_n+1$ であるから　$a_n=3^{n-1}+1$

(2)　$3a_{n+1}+2a_n+15=0$ から　$a_{n+1}=-\dfrac{2}{3}a_n-5$

これを変形すると　$a_{n+1}+3=-\dfrac{2}{3}(a_n+3)$

$b_n=a_n+3$ とおくと　$b_{n+1}=-\dfrac{2}{3}b_n$，$b_1=a_1+3=2+3=5$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列で　$b_n=5\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$a_n=b_n-3$ であるから　$a_n=5\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-3$

$\boxed{4}$

解答　$a_n=\dfrac{2}{5\cdot3^{n-1}-4}$

解説

$a_1=2>0$，および漸化式の形から，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ となる。

両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{4a_n+3}{a_n}$　すなわち　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=4+\dfrac{3}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+4$

$b_{n+1}=3b_n+4$ を変形して　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 $b_1+2=\dfrac{1}{a_1}+2=\dfrac{5}{2}$，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n+2=\frac{5}{2}\cdot3^{n-1}$$

ゆえに，$b_n=\dfrac{5\cdot3^{n-1}-4}{2}$ となり　$a_n=\dfrac{2}{5\cdot3^{n-1}-4}$

$\boxed{5}$

解答　$a_n=3^{n+1}-3\cdot2^n$

解説

$a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+1$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+1$　　これを変形すると　$b_{n+1}-3=\dfrac{2}{3}(b_n-3)$

また　$b_1-3=\dfrac{a_1}{3}-3=\dfrac{3}{3}-3=-2$

よって，数列 $\{b_n-3\}$ は初項 -2，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列で

$$b_n-3=-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\qquad ゆえに\quad \frac{a_n}{3^n}=3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

したがって　$a_n=3^n\left\{3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=3^{n+1}-3\cdot2^n$

$\boxed{6}$

解答　$a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

解説

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\{3a_{n+1}+4(n+1)\}-(3a_n+4n)=3(a_{n+1}-a_n)+4$$

よって　$a_{n+1}-a_n=b_n$　とおくと　$b_{n+1}=3b_n+4$

変形すると　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

$$b_1+2=a_2-a_1+2=3a_1+4-a_1+2=2a_1+6=8$$

よって，数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 8，公比 3 の等比数列である。

ゆえに　$b_n+2=8\cdot3^{n-1}$　　したがって　$b_n=8\cdot3^{n-1}-2$

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot3^{k-1}-2)=1+\frac{8(3^{n-1}-1)}{3-1}-2(n-1)$$

$$=1+4\cdot3^{n-1}-4-2n+2=4\cdot3^{n-1}-2n-1$$

この式で $n=1$ とすると，$a_1=1$ となり，$n=1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

1

解答　(1)　$a_n=6n-5$　　(2)　$a_n=3(-5)^{n-1}$

解説

(1)　初項 1，公差 6 の等差数列であるから

$$a_n=1+(n-1)\cdot 6=6n-5$$

(2)　初項 3，公比 -5 の等比数列であるから

$$a_n=3(-5)^{n-1}$$

2

解答　(1)　$a_n=\frac{1}{3}\{7-(-2)^n\}$　　(2)　$a_n=2n^2+n-1$

解説

(1)　漸化式から　$a_{n+1}-a_n=(-2)^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $(-2)^n$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^k=3+\frac{-2\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}$$

$$=\frac{9-2-(-2)^n}{3}=\frac{1}{3}\{7-(-2)^n\}$$

初項は $a_1=3$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\frac{1}{3}\{7-(-2)^n\}$

(2)　漸化式から　$a_{n+1}-a_n=4n+3$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $4n+3$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+3)=2+4\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+3(n-1)$$

$$=2n^2+n-1$$

初項は $a_1=2$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2n^2+n-1$

3

解答　(1)　$a_n=3^{n-1}+2$　　(2)　$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{3}{4}$

解説

(1)　$\alpha=3\alpha-4$ を解いて　$\alpha=2$

ゆえに，$a_{n+1}=3a_n-4$ は $a_{n+1}-2=3(a_n-2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n-2\}$ は，初項 $a_1-2=1$，公比 3 の等比数列であるから

$a_n-2=1\cdot 3^{n-1}$　　よって　$a_n=3^{n-1}+2$

(2)　$12a_{n+1}-8a_n+3=0$ から　$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{1}{4}$

$\alpha=\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{4}$ を解いて　$\alpha=-\frac{3}{4}$

ゆえに，$12a_{n+1}-8a_n+3=0$ は $a_{n+1}+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{3}{4}\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{a_n+\frac{3}{4}\right\}$ は，初項 $a_1+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$a_n+\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$　　よって　$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{3}{4}$

4

解答　$a_n=\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}-1}$

解説

$a_1=1>0$ より，漸化式の形からすべての自然数 n について $a_n>0$ である。

漸化式の両辺の逆数をとると　$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+4}{a_n}$　　よって　$\frac{1}{a_{n+1}}=3+\frac{4}{a_n}$

$\frac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3+4b_n$

変形すると　$b_{n+1}+1=4(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 4 の等比数列で，初項は

$$b_1+1=\frac{1}{a_1}+1=\frac{1}{1}+1=2$$

ゆえに　$b_n+1=2\cdot 4^{n-1}$　　よって　$b_n=2\cdot 4^{n-1}-1$

したがって　$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2\cdot 4^{n-1}-1}$

注意　$2\cdot 4^{n-1}=2\cdot(2^2)^{n-1}=2^{1+2(n-1)}=2^{2n-1}$ であるから，$a_n=\frac{1}{2^{2n-1}-1}$　と答えてもよい。

5

解答　$a_n=2^{2n-1}+2^n$

解説

$a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=2\cdot\frac{a_n}{2^n}-1$

$\frac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n-1$

これを変形すると　$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

また　$b_1-1=\frac{a_1}{2}-1=\frac{4}{2}-1=1$

よって，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列であるから

$b_n-1=1\cdot 2^{n-1}$　　ゆえに　$\frac{a_n}{2^n}=2^{n-1}+1$

したがって　$a_n=2^{2n-1}+2^n$

6

解答　$a_n=2^n-n$

解説

$a_{n+1}=2a_n+n-1$　……①

において，n の代わりに $n+1$ とおくと

$a_{n+2}=2a_{n+1}+(n+1)-1$　……②

②−① から　$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+1$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n+1$　……③

また，$a_2=2a_1+1-1=2$ であるから　$b_1=a_2-a_1=2-1=1$

③ を変形すると　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は　$b_1+1=1+1=2$

ゆえに　$b_n+1=2\cdot 2^{n-1}$　　したがって　$b_n=2^n-1$

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-1)=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)$$

$$=2^n-n$$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=2^n-n$

別解　$b_n=2^n-1$ を求めた後は，次のようにして a_n を求めてもよい。

$b_n=a_{n+1}-a_n$ から　$a_{n+1}-a_n=2^n-1$

$a_{n+1}=2a_n+n-1$ を代入して　$(2a_n+n-1)-a_n=2^n-1$

よって　$a_n=2^n-n$

参考　漸化式は　$a_{n+1}+(n+1)=2(a_n+n)$　と変形できる。

よって，数列 $\{a_n+n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は　$a_1+1=1+1=2$

ゆえに　$a_n+n=2\cdot 2^{n-1}$　　したがって　$a_n=2^n-n$

□1

解答　(1)　$a_n=3^n-2^n$　　(2)　$a_n=\dfrac{an}{2^{n-1}}$

解説

(1)　$a_{n+1}=2a_n+3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{1}{3}$

よって　$b_{n+1}-1=\dfrac{2}{3}(b_n-1)$

ここで　$b_1-1=\dfrac{a_1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$

ゆえに，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $-\dfrac{2}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列となり

$b_n-1=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　すなわち　$b_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1$

したがって　$a_n=3^nb_n=3^n\left\{-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right\}=3^n-2^n$

(2)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{a}{2^n}$ の両辺に 2^{n+1} を掛けると　$2^{n+1}a_{n+1}=2^na_n+2a$

$2^na_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+2a$，$b_1=2a_1=2a$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $2a$，公差 $2a$ の等差数列となり

$b_n=2a+(n-1)\cdot 2a=2an$

したがって　$a_n=\dfrac{b_n}{2^n}=\dfrac{2an}{2^n}=\dfrac{an}{2^{n-1}}$

□2

解答　(1)　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，$a_2=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

(3)　$a_n=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$

解説

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{AA_1H_1}$ から　$\mathrm{AC}:\mathrm{AH_1}=\mathrm{BC}:\mathrm{A_1H_1}$

よって　$1:(1-a_1)=\sqrt{3}:a_1$　　よって　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

同様に，$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{A_1A_2H_2}$ から　$1:(a_1-a_2)=\sqrt{3}:a_2$

$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ から　$a_2=\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{A_nA_{n+1}H_{n+1}}$ から　$1:(a_n-a_{n+1})=\sqrt{3}:a_{n+1}$

よって　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

(3)　(1)，(2) から $\{a_n\}$ は初項 $a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，公比 $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ の等比数列であるから

$a_n=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^n$

□1

解答　n^2-n（個）

解説

n 個の円で交点が a_n 個できるとき，条件を満たす円を 1 個追加すると，n 個の円とおのおの 2 点で交わるから，交点が $2n$ 個増える。

ゆえに　$a_{n+1}=a_n+2n$　　すなわち　$a_{n+1}-a_n=2n$ $(n\geqq 2)$

よって，$n\geqq 3$ のとき

$$a_n=a_2+\sum_{k=2}^{n-1}2k=2+\sum_{k=1}^{n-1}2k-2\cdot 1$$
$$=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2=n^2-n$$

$a_2=2$ であるから，この式は $n=2$ のときにも成り立つ。

したがって，n 個の円によって，交点は (n^2-n) 個できる。

□2

解答　(1)　$a_n=5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　(2)　$b_n=10\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-3$　　(3)　$b_n=27-5(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

解説

(1)　$\displaystyle\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)dt=\left[\frac{a_n}{2}t^2+b_nt\right]_{c_n}^{x+c_n}$

$$=\frac{a_n}{2}(x^2+2c_nx)+b_nx$$
$$=\frac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$$

よって　$a_{n+1}x^2+b_{n+1}x=\dfrac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$

これが x についての恒等式であるから

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$，　$b_{n+1}=b_n+a_nc_n$　……①

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=5$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$a_n=5\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(2)　$c_n=3^{n-1}$ のとき，① から

$$b_{n+1}=b_n+a_nc_n$$
$$=b_n+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 3^{n-1}$$
$$=b_n+5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

よって，数列 $\{b_n\}$ の階差数列の第 n 項は $5\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$ であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$$
$$=7+5\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}$$
$$=10\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3\quad\cdots\cdots②$$

$n=1$ のとき　$10\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^0-3=7$

$b_1=7$ であるから，② は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$b_n=10\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-3$

(3)　$c_n=n$ のとき，① から

$$b_{n+1}=b_n+5\cdot n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+5\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
$$=7+5\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdots\cdots③$$

ここで，$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ $(n\geqq 2)$ とおくと

$$S=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

両辺に $\dfrac{1}{2}$ を掛けると

$$\frac{1}{2}S=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+(n-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

辺々を引くと

$$\frac{1}{2}S=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=S=4-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

③ に代入して

$$b_n=7+5\left\{4-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=27-5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\quad\cdots\cdots④$$

$n=1$ のとき　$27-5\cdot 2\cdot 2=7$

$b_1=7$ であるから，④ は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$b_n=27-5(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$