$\boxed{1}$

解答　(1)　7　　(2)　9　　(3)　49　　(4)　$3a^2+a+5$

解説

(1)　$f(0)=3\cdot0^2-5\cdot0+7=7$

(2)　$f(2)=3\cdot2^2-5\cdot2+7=12-10+7=9$

(3)　$f(-3)=3\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)+7=27+15+7=49$

(4)　$f(a+1)=3(a+1)^2-5(a+1)+7=3(a^2+2a+1)-5a-5+7$

$=3a^2+a+5$

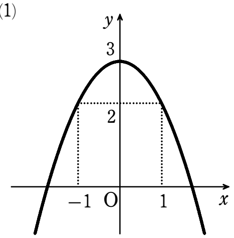
$\boxed{2}$

解答　グラフ，軸，頂点の順に

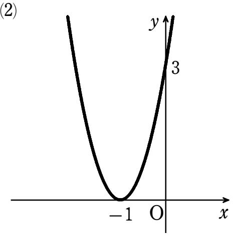
(1)　[図]，y 軸，点 $(0,\ 3)$　　(2)　[図]，直線 $x=-1$，点 $(-1,\ 0)$

(3)　[図]，直線 $x=1$，点 $(1,\ -4)$

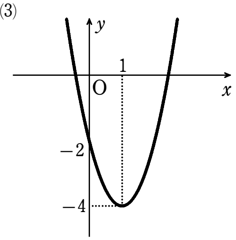
(1)



(2)



(3)

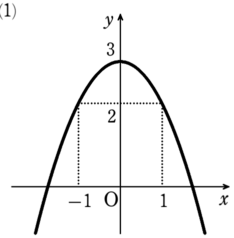


解説

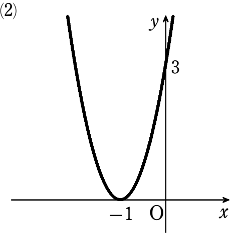
(1)　グラフは [図]。軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ 3)$

(2)　グラフは [図]。軸は直線 $x=-1$，頂点は点 $(-1,\ 0)$

(1)



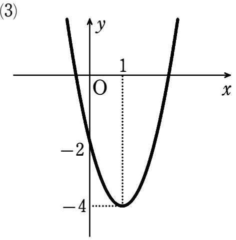
(2)



(3)　グラフは [図]。

軸は直線 $x=1$，頂点は点 $(1,\ -4)$

(3)



$\boxed{3}$

解答　(1)　$y=(x-4)^2-4$　　(2)　$y=2(x-1)^2-3$　　(3)　$y=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

解説

(1)　$y=x^2-8x+12=\{(x-4)^2-4^2\}+12=(x-4)^2-4^2+12=(x-4)^2-4$

(2)　$y=2x^2-4x-1=2(x^2-2x)-1=2\{(x-1)^2-1^2\}-1=2(x-1)^2-2\cdot1^2-1$

$=2(x-1)^2-3$

(3)　$y=-3x^2+3x+1=-3(x^2-x)+1=-3\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+1$

$=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$

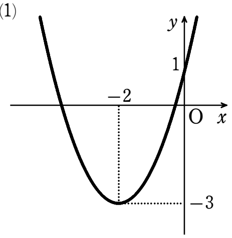
$\boxed{4}$

解答　グラフ，軸，頂点の順に

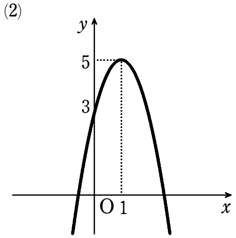
(1)　[図]，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ -3)$　　(2)　[図]，直線 $x=1$，点 $(1,\ 5)$

(3)　[図]，直線 $x=-3$，点 $(-3,\ -3)$　　(4)　[図]，直線 $x=\frac{3}{4}$，点 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{25}{8}\right)$

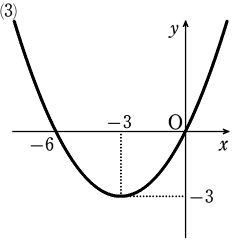
(1)



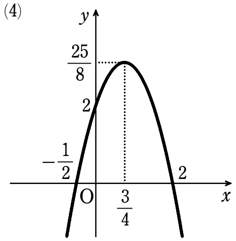
(2)



(3)



(4)



解説

(1)　$y=x^2+4x+1$

$=(x^2+4x+2^2-2^2)+1$

$=\{(x+2)^2-2^2\}+1$

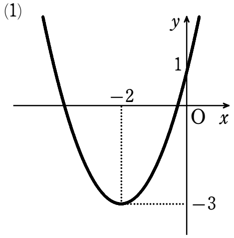
$=(x+2)^2-3$

グラフは [図]。

軸は直線 $x=-2$

頂点は点 $(-2,\ -3)$

(1)



(2)　$y=-2x^2+4x+3=-2(x^2-2x)+3$

$=-2(x^2-2x+1^2-1^2)+3$

$=-2\{(x-1)^2-1^2\}+3$

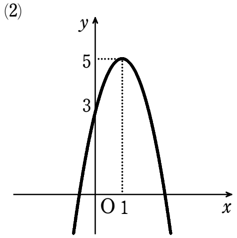
$=-2(x-1)^2+5$

よって，グラフは [図]。

軸は直線 $x=1$

頂点は点 $(1,\ 5)$

(2)



(3)　$y=\frac{1}{3}x^2+2x=\frac{1}{3}(x^2+6x)$

$=\frac{1}{3}(x^2+6x+3^2-3^2)$

$=\frac{1}{3}\{(x+3)^2-3^2\}$

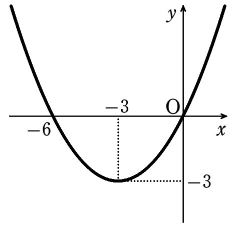
$=\frac{1}{3}(x+3)^2-3$

よって，グラフは [図]。

軸は直線 $x=-3$

頂点は点 $(-3,\ -3)$

(3)



(4)　$y=-(x-2)(2x+1)=-(2x^2-3x-2)$

$=-2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+2$

$=-2\left\{x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}+2$

$=-2\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}+2$

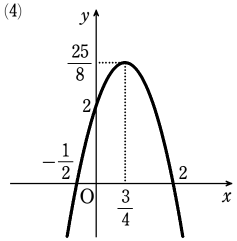
$=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+2\cdot\frac{9}{16}+2$

$=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$

よって，グラフは [図]。

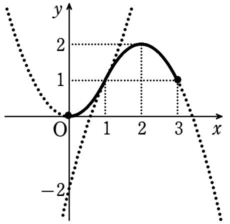
軸は直線 $x=\frac{3}{4}$，頂点は点 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{25}{8}\right)$

(4)



5

解答



解説

$y=x^2$ のグラフは原点を頂点とする放物線で

$x=1$ のとき $y=1$

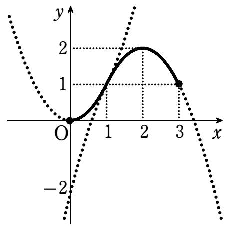
$y=-x^2+4x-2$ を変形すると

$y=-(x-2)^2+2$

このグラフは点 $(2,\ 2)$ を頂点とする放物線で

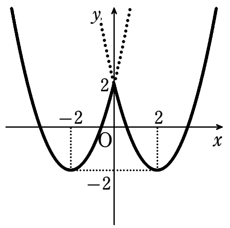
$x=1$ のとき $y=1$，　$x=3$ のとき $y=1$

よって，求めるグラフは [図] の実線部分である。

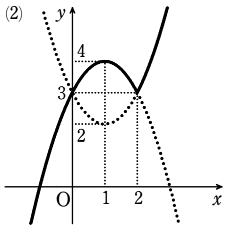


6

解答 (1)



(2)



解説

(1) [1]　$x \geqq 0$ のとき

$y=x^2-4x+2$

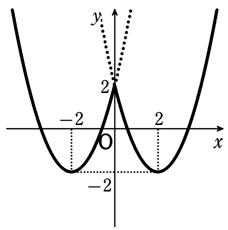
$=(x-2)^2-2$

[2]　$x<0$ のとき

$y=x^2+4x+2$

$=(x+2)^2-2$

よって，グラフは右の図の実線部分のようになる。



(2)　$x \geqq 2$ のとき

$y=x(x-2)+3=x^2-2x+3$

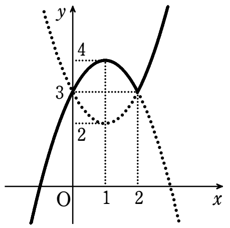
$=(x-1)^2+2$

$x<2$ のとき

$y=x\{-(x-2)\}+3=-x^2+2x+3$

$=-(x-1)^2+4$

グラフは右の図の実線部分。



1

解答　(1)　$f(0)=-1$，$f(1)=3$，$f(-1)=-5$

(2)　$f(-2)=\dfrac{13}{3}$，$f\left(\dfrac{1}{6}\right)=0$，$f\left(\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{1}{12}$

(3)　$g(1)=3$，$g(-3)=27$，$g(a+1)=2a^2+2a+3$

解説

(1)　$f(0)=4\cdot0-1=-1$

$f(1)=4\cdot1-1=3$

$f(-1)=4\cdot(-1)-1=-4-1=-5$

(2)　$f(-2)=-2\cdot(-2)+\dfrac{1}{3}=4+\dfrac{1}{3}=\dfrac{13}{3}$

$f\left(\dfrac{1}{6}\right)=-2\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=0$

$f\left(\dfrac{1}{8}\right)=-2\cdot\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

(3)　$g(1)=2\cdot1^2-2\cdot1+3=2-2+3=3$

$g(-3)=2\cdot(-3)^2-2\cdot(-3)+3=18+6+3=27$

$g(a+1)=2(a+1)^2-2(a+1)+3$

$=2(a^2+2a+1)-2a-2+3=2a^2+2a+3$

2

解答　グラフ，軸，頂点の順に

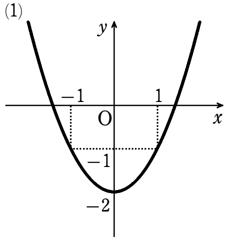
(1)　[図]，y 軸，点 $(0,\ -2)$　　(2)　[図]，y 軸，点 $(0,\ -1)$

(3)　[図]，直線 $x=-3$，点 $(-3,\ 0)$　　(4)　[図]，直線 $x=1$，点 $(1,\ 0)$

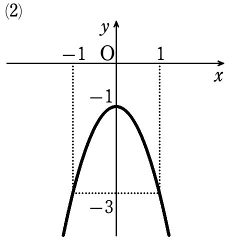
(5)　[図]，直線 $x=2$，点 $(2,\ 1)$　　(6)　[図]，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ 5)$

(7)　[図]，直線 $x=-3$，点 $(-3,\ -1)$

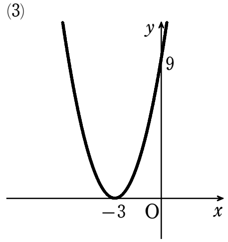
(1)



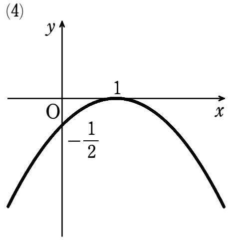
(2)



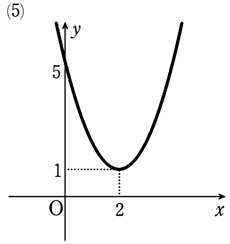
(3)



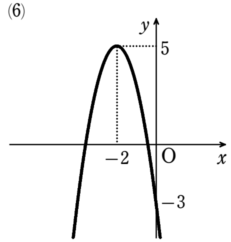
(4)



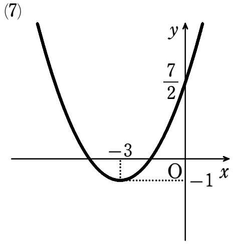
(5)



(6)



(7)

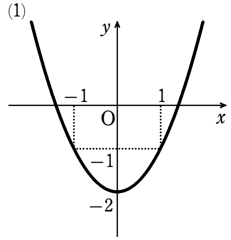


解説

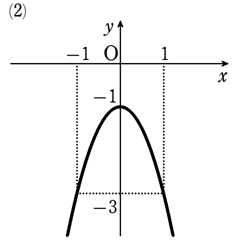
(1)　グラフは [図]。軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ -2)$

(2)　グラフは [図]。軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ -1)$

(1)



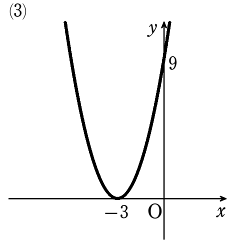
(2)



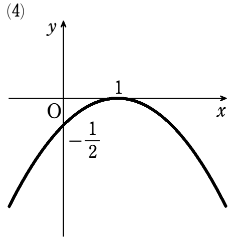
(3)　グラフは [図]。軸は直線 $x=-3$，頂点は点 $(-3,\ 0)$

(4)　グラフは [図]。軸は直線 $x=1$，頂点は点 $(1,\ 0)$

(3)



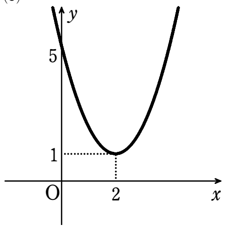
(4)



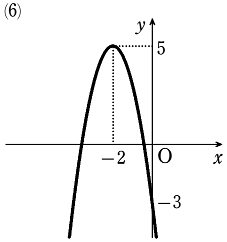
(5)　グラフは [図]。軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ 1)$

(6)　グラフは [図]。軸は直線 $x=-2$，頂点は点 $(-2,\ 5)$

(5)

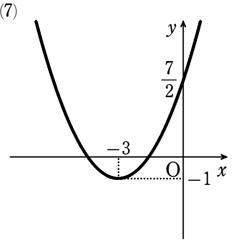


(6)



(7)　グラフは［図］。
軸は直線 $x=-3$
頂点は点 $(-3,\ -1)$

(7)



3

解答　(1)　$(x+5)^2-25$　　(2)　$(x-2)^2+5$　　(3)　$(x+4)^2-22$　　(4)　$-(x-2)^2$

(5)　$3(x-2)^2-8$　　(6)　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$　　(7)　$-\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

(8)　$3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{45}{4}$　　(9)　$-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$

解説

(1)　$x^2+10x=(x+5)^2-5^2=(x+5)^2-25$

(2)　$x^2-4x+9=(x-2)^2-2^2+9=(x-2)^2+5$

(3)　$x^2+8x-6=(x+4)^2-4^2-6=(x+4)^2-22$

(4)　$-x^2+4x-4=-(x^2-4x)-4=-\{(x-2)^2-2^2\}-4$
$=-(x-2)^2$

(5)　$3x^2-12x+4=3(x^2-4x)+4=3\{(x-2)^2-2^2\}+4$
$=3(x-2)^2-8$

(6)　$x^2-x+3=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$

(7)　$-x^2-7x-12=-(x^2+7x)-12=-\left\{\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2\right\}-12$

$=-\left(x+\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

(8)　$3x^2+9x+18=3(x^2+3x)+18=3\left\{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}+18$

$=3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{45}{4}$

(9)　$-2x^2+5x-1=-2\left(x^2-\dfrac{5}{2}x\right)-1=-2\left\{\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2-\left(\dfrac{5}{4}\right)^2\right\}-1$

$=-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}$

4

解答　グラフ，軸，頂点の順に

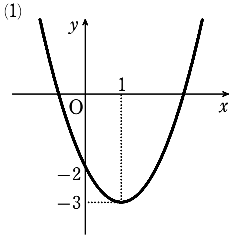
(1)　［図］，直線 $x=1$，点 $(1,\ -3)$　　(2)　［図］，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ -9)$

(3)　［図］，直線 $x=-3$，点 $(-3,\ 4)$　　(4)　［図］，直線 $x=1$，点 $(1,\ -1)$

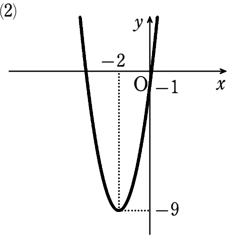
(5)　［図］，直線 $x=\dfrac{3}{2}$，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$　　(6)　［図］，直線 $x=-\dfrac{5}{4}$，点 $\left(-\dfrac{5}{4},\ \dfrac{17}{8}\right)$

(7)　［図］，直線 $x=-2$，点 $(-2,\ 2)$　　(8)　［図］，直線 $x=-\dfrac{1}{2}$，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{9}{4}\right)$

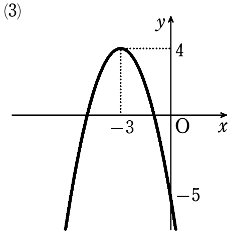
(1)



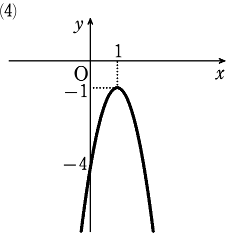
(2)



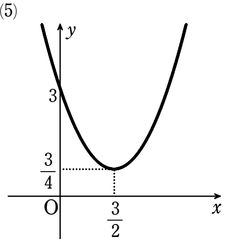
(3)



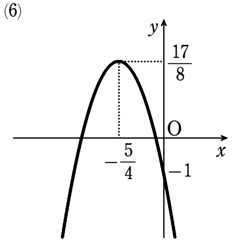
(4)



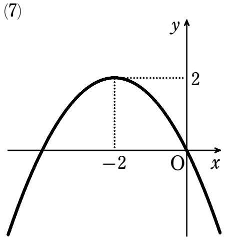
(5)



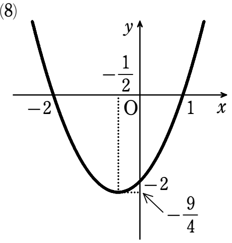
(6)



(7)



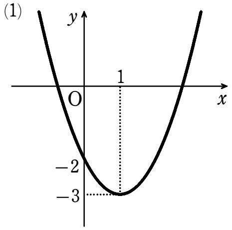
(8)



解説

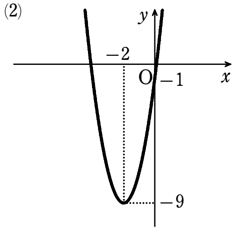
(1)　$y=x^2-2x-2$
$=(x^2-2x+1^2-1^2)-2$
$=\{(x-1)^2-1^2\}-2$
$=(x-1)^2-3$
よって，グラフは［図］。
軸は直線 $x=1$
頂点は点 $(1,\ -3)$

(1)



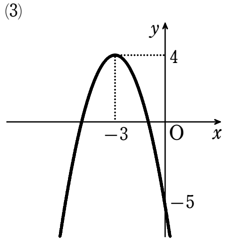
(2)　$y=2x^2+8x-1=2(x^2+4x)-1$
$=2(x^2+4x+2^2-2^2)-1$
$=2\{(x+2)^2-2^2\}-1$
$=2(x+2)^2-9$
よって，グラフは［図］。
軸は直線 $x=-2$
頂点は点 $(-2,\ -9)$

(2)



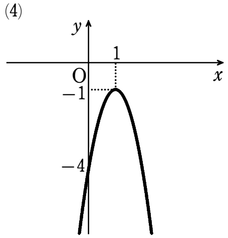
(3)　$y=-x^2-6x-5=-(x^2+6x)-5$
$=-(x^2+6x+3^2-3^2)-5$
$=-\{(x+3)^2-3^2\}-5$
$=-(x+3)^2+4$
よって，グラフは［図］。
軸は直線 $x=-3$
頂点は点 $(-3,\ 4)$

(3)



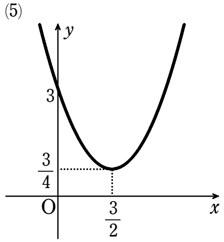
(4)　$y=-3x^2+6x-4=-3(x^2-2x)-4$
$=-3(x^2-2x+1^2-1^2)-4$
$=-3\{(x-1)^2-1^2\}-4$
$=-3(x-1)^2-1$
よって，グラフは［図］。
軸は直線 $x=1$
頂点は点 $(1,\ -1)$

(4)



(5)　$y=x^2-3x+3$
$=\left\{x^2-3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}+3$
$=\left\{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}+3$
$=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$
よって，グラフは［図］。
軸は直線 $x=\dfrac{3}{2}$

(5)



頂点は点$\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{4}\right)$

(6)　$y=-2x^2-5x-1=-2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)-1$

$=-2\left\{x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}-1$

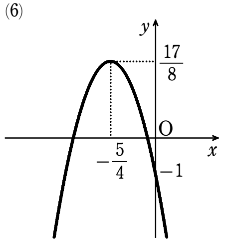
$=-2\left\{\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}-1$

$=-2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$

よって，グラフは[図]。

軸は直線 $x=-\frac{5}{4}$，頂点は点$\left(-\frac{5}{4},\ \frac{17}{8}\right)$

(6)



(7)　$y=-\frac{1}{2}x^2-2x=-\frac{1}{2}(x^2+4x)$

$=-\frac{1}{2}(x^2+4x+2^2-2^2)$

$=-\frac{1}{2}\{(x+2)^2-2^2\}$

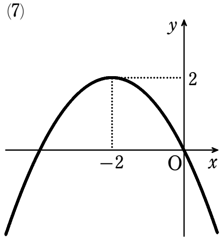
$=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2$

よって，グラフは[図]。

軸は直線 $x=-2$

頂点は点$(-2,\ 2)$

(7)



(8)　$y=(x+2)(x-1)=x^2+x-2$

$=\left\{x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}-2$

$=\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}-2$

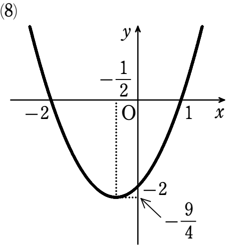
$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

よって，グラフは[図]。

軸は直線 $x=-\frac{1}{2}$

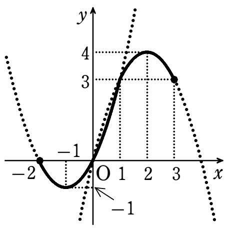
頂点は点$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$

(8)



5

解答



解説

$y=x^2+2x$ を変形すると

$y=(x+1)^2-1$

このグラフは頂点が点$(-1,\ -1)$の放物線で

$x=-2$ のとき $y=0$，　$x=1$ のとき $y=3$

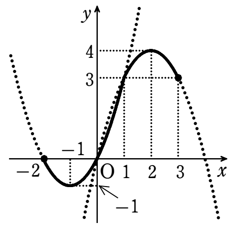
$y=-x^2+4x$ を変形すると

$y=-(x-2)^2+4$

このグラフは頂点が点$(2,\ 4)$の放物線で

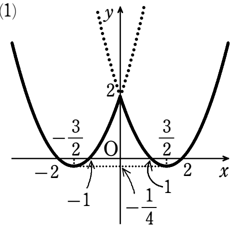
$x=1$ のとき $y=3$，　$x=3$ のとき $y=3$

よって，求めるグラフは右の図の実線部分である。

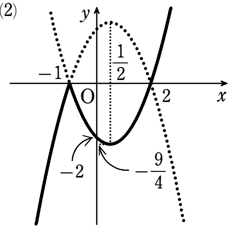


6

解答　(1)



(2)



解説

(1)　$x\geqq 0$ のとき

$y=x^2-3x+2$

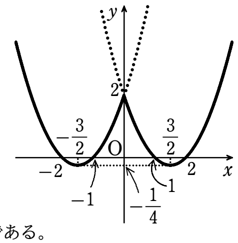
$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$x<0$ のとき

$y=x^2+3x+2$

$=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

よって，$y=x^2-3|x|+2$ のグラフは，図の実線部分である。



(2)　$x+1\geqq 0$ すなわち $x\geqq -1$ のとき

$y=(x+1)(x-2)=x^2-x-2$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

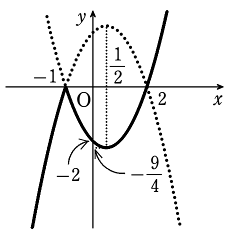
$x+1<0$ すなわち $x<-1$ のとき

$y=-(x+1)(x-2)$

$=-x^2+x+2$

$=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

よって，$y=|x+1|(x-2)$ のグラフは，図の実線部分である。



1

解答　$a<-\frac{3}{2}$

解説

$y=x^2-2(a+1)x+a^2-2=\{x-(a+1)\}^2-2a-3$

よって，頂点の座標は　　$(a+1,\ -2a-3)$

これが第２象限にあるから　　$a+1<0$，$-2a-3>0$

これを解くと　　$a<-\frac{3}{2}$

2

解答　(1)　順に$\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}-2\right)$，$a=2$　　(2)　$a=-1$，$b=-10$

解説

(1)　$y=x^2+ax-2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-2$

よって，頂点の座標は　$\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}-2\right)$

また，頂点が直線 $y=2x-1$ 上にあるとき　$-\frac{a^2}{4}-2=2\left(-\frac{a}{2}\right)-1$

整理して　$a^2-4a+4=0$　　よって　$(a-2)^2=0$　　ゆえに　$a=2$

(2)　$y=2x^2-12x+17=2(x^2-6x)+17=2(x-3)^2-1$

$y=ax^2+6x+b=a\left(x^2+\frac{6}{a}x\right)+b=a\left(x+\frac{3}{a}\right)^2-a\left(\frac{3}{a}\right)^2+b$

$=a\left(x+\frac{3}{a}\right)^2-\frac{9}{a}+b$

よって，２つの放物線の頂点の座標は，順に　$(3,\ -1)$，$\left(-\frac{3}{a},\ -\frac{9}{a}+b\right)$

題意を満たすための条件は　$3=-\frac{3}{a}$ ……①，$-1=-\frac{9}{a}+b$ ……②

①の両辺に $\frac{a}{3}$ を掛けて　$a=-1$

$a=-1$ を②に代入して　$-1=9+b$　　ゆえに　$b=-10$

別解　放物線 $y=2x^2-12x+17$ の頂点は，点$(3,\ -1)$であるから，２つの放物線の頂点が一致するための条件は，$y=ax^2+6x+b$ が，$y=a(x-3)^2-1$ ……③ と表されることである。

③の右辺を展開して整理すると　$y=ax^2-6ax+9a-1$

$y=ax^2+6x+b$ と係数を比較して　$6=-6a$，$b=9a-1$

これを解いて　$a=-1$，$b=-10$

3

解答　(1)　$a<0$　(2)　$b<0$　(3)　$c>0$　(4)　$b^2-4ac>0$

(5)　$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c<0$　(6)　$a-b<0$

解説

(1)　グラフは上に凸であるから　$a<0$

(2)　軸は $x<0$ の部分にあるから　$-\frac{b}{2a}<0$

(1)から　$a<0$　　よって　$b<0$

(3)　グラフは y 軸と $y>0$ の部分で交わるから　　$c>0$

(4)　頂点の y 座標は正であるから　　$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$

(1) から　　$a<0$　　　　よって　　$b^2-4ac>0$

(5)　$x=\dfrac{1}{2}$ で $y<0$ であるから　　$\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+c<0$

(6)　頂点の x 座標について，$-\dfrac{1}{2}<x<0$ であるから　　$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{b}{2a}<0$

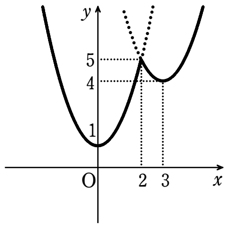
よって　　$0<\dfrac{b}{a}<1$

(1) より $a<0$ であるから　　$b>a$

したがって　　$a-b<0$

$\boxed{4}$

解答　［図］



解説

[1]　$x-2\geqq 0$ すなわち $x\geqq 2$ のとき

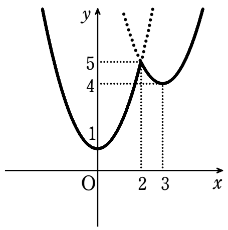
$y=x^2-3x+7-3(x-2)$

$=x^2-6x+13=(x-3)^2+4$

[2]　$x-2\leqq 0$ すなわち $x\leqq 2$ のとき

$y=x^2-3x+7+3(x-2)=x^2+1$

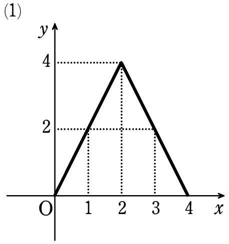
[1]，[2] から，y のグラフは右の図のようになる。



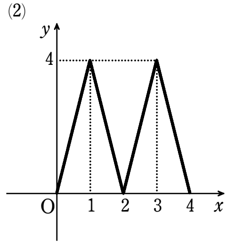
$\boxed{1}$

解答　(1)［図］　(2)［図］

(1)



(2)



解説

(1)　グラフは図 (1)。

(2)　$f(f(x))=\begin{cases}2f(x) & (0\leqq f(x)<2)\\ 8-2f(x) & (2\leqq f(x)\leqq 4)\end{cases}$

よって，(1) のグラフから

$0\leqq x<1$ のとき　　$f(f(x))=2\cdot 2x=4x$

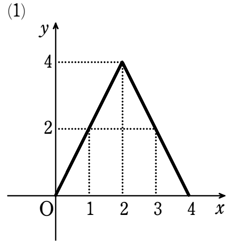
$1\leqq x<2$ のとき　　$f(f(x))=8-2\cdot 2x=8-4x$

$2\leqq x\leqq 3$ のとき　　$f(f(x))=8-2(8-2x)=4x-8$

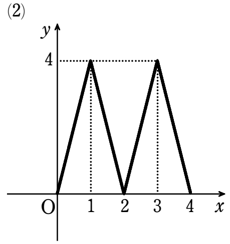
$3<x\leqq 4$ のとき　　$f(f(x))=2(8-2x)=16-4x$

よって，グラフは図 (2)。

(1)



(2)

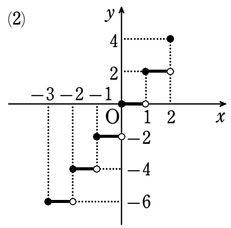


$\boxed{2}$

解答　(1)　$[2.3]=2$，$[1]=1$，$[-\sqrt{3}]=-2$

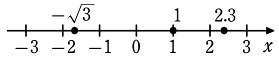
(2)［図］

(2)



解説

(1)　2.3，1，$-\sqrt{3}$ を数直線上に表すと，右図のようになる。



よって　　$[2.3]=2$，$[1]=1$，$[-\sqrt{3}]=-2$

(2)　$-3\leqq x<-2$ のとき　　$y=2(-3)=-6$

$-2\leqq x<-1$ のとき　　$y=2(-2)=-4$

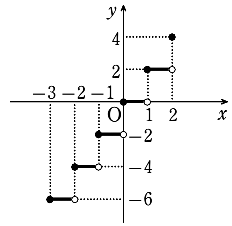
$-1\leqq x<0$　のとき　　$y=2(-1)=-2$

$0\leqq x<1$　のとき　　$y=2\cdot 0=0$

$1\leqq x<2$　のとき　　$y=2\cdot 1=2$

$x=2$　　　のとき　　$y=2\cdot 2=4$

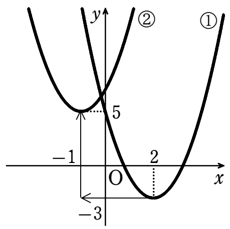
よって，グラフは右図のようになる。



$\boxed{1}$

解答　x 軸方向に -3，y 軸方向に 8 だけ平行移動

解説



$y=2x^2-8x+5$ ……①，$y=2x^2+4x+7$ ……②
とする。
放物線 ① を平行移動して放物線 ② に重ねると，① の頂点は ② の頂点に移る。
① を変形すると　$y=2(x-2)^2-3$
② を変形すると　$y=2(x+1)^2+5$
よって，① の頂点は点 $(2,\ -3)$
　　② の頂点は点 $(-1,\ 5)$
放物線 ① を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すれば，放物線 ①，② が重なるとすると
$$2+p=-1,\ -3+q=5 \qquad よって \qquad p=-3,\ q=8$$
したがって，x 軸方向に -3，y 軸方向に 8 だけ平行移動すればよい。

$\boxed{2}$

解答　$y=3x^2-18x+27$

解説

求める方程式は，$y=3x^2-6x+4$ の x，y をそれぞれ $x-2$，$y-(-1)$ でおき換えて
$$y-(-1)=3(x-2)^2-6(x-2)+4 \quad すなわち \quad y=3x^2-18x+27$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$y=2x^2-3x+1$　　(2)　$y=-2x^2-3x-1$　　(3)　$y=2x^2+3x+1$

解説

(1)　求める方程式は，x，y をそれぞれ x，$-y$ でおき換えて
$$-y=-2x^2+3x-1 \qquad すなわち \qquad y=2x^2-3x+1$$
(2)　求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，y でおき換えて
$$y=-2(-x)^2+3(-x)-1 \qquad すなわち \qquad y=-2x^2-3x-1$$
(3)　求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，$-y$ でおき換えて
$$-y=-2(-x)^2+3(-x)-1 \qquad すなわち \qquad y=2x^2+3x+1$$

$\boxed{4}$

解答　$y=-2x^2-4x+3$

解説

求める放物線は，放物線 $y=-2x^2+16x-29$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動し，更に y 軸に関して対称移動したものである。
まず，x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると
$$y-2=-2\{x-(-3)\}^2+16\{x-(-3)\}-29$$
よって　$y=-2(x+3)^2+16(x+3)-27$
すなわち　$y=-2x^2+4x+3$
次に，y 軸に関して対称移動すると
$$y=-2(-x)^2+4(-x)+3$$
したがって，求める放物線の方程式は　$y=-2x^2-4x+3$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$y=2(x-1)^2+3$ $(y=2x^2-4x+5)$
　(2)　$y=-2(x+1)^2+11$ $(y=-2x^2-4x+9)$
　(3)　$y=2x^2-5x+2$

解説

(1)　頂点が点 $(1,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数は
$$y=a(x-1)^2+3$$
と表される。そのグラフが点 $(0,\ 5)$ を通るから
$$5=a(0-1)^2+3 \qquad これを解くと \qquad a=2$$
よって　$y=2(x-1)^2+3$ $(y=2x^2-4x+5$ でもよい$)$
(2)　軸が直線 $x=-1$ であるから，求める 2 次関数は
$$y=a(x+1)^2+q$$
と表される。そのグラフが 2 点 $(-2,\ 9)$，$(1,\ 3)$ を通るから
$$9=a(-2+1)^2+q,\quad 3=a(1+1)^2+q$$
これを解くと　$a=-2$，$q=11$
よって　$y=-2(x+1)^2+11$ $(y=-2x^2-4x+9$ でもよい$)$
(3)　求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。
このグラフが 3 点 $(-1,\ 9)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$ を通るから
$$\begin{cases} a-b+c=9 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=-1 & \cdots\cdots ② \\ 4a+2b+c=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$
②−① から　$2b=-10$　　よって　$b=-5$
③−② から　$3a+b=1$ ……④
$b=-5$ を ④ に代入して　$3a-5=1$　　ゆえに　$a=2$
$a=2$，$b=-5$ を ① に代入して　$2+5+c=9$　　ゆえに　$c=2$
よって，求める 2 次関数は　$y=2x^2-5x+2$

$\boxed{6}$

解答　$y=2x^2-8x+6$

解説

放物線 $y=2x^2+3x-5$ を平行移動したものであるから，求める 2 次関数は
$y=2x^2+bx+c$ と表される。
このグラフが 2 点 $(2,\ -2)$，$(3,\ 0)$ を通るから
$$-2=8+2b+c,\quad 0=18+3b+c$$
整理して　$2b+c=-10$，$3b+c=-18$　　　これを解いて　$b=-8$，$c=6$
よって，求める 2 次関数は　$y=2x^2-8x+6$

$\boxed{1}$

解答　x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動

解説

$y=x^2-3x+2$ ……①，$y=x^2+x+1$ ……②　とする。
放物線 ① を平行移動して放物線 ② に重ねると，① の頂点は ② の頂点に移る。
① を変形すると　$y=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$
② を変形すると　$y=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$
よって，① の頂点の座標は　$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{4}\right)$
　　② の頂点の座標は　$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$
放物線 ① を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すれば，放物線 ①，② が重なるとすると
$$\frac{3}{2}+p=-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}+q=\frac{3}{4} \qquad よって \qquad p=-2,\ q=1$$
したがって，x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動すればよい。

$\boxed{2}$

解答　(1)　$y=2x^2-11x+12$　　(2)　$y=2x^2-7x$　　(3)　$y=2x^2+5x+1$
　(4)　$y=2x^2-15x+24$

解説

$y=2x^2-7x+3$ ……①　とする。
(1)　求める方程式は，① の x を $x-1$ でおき換えて
$$y=2(x-1)^2-7(x-1)+3 \qquad すなわち \qquad y=2x^2-11x+12$$
(2)　求める方程式は，① の y を $y-(-3)$ でおき換えて
$$y-(-3)=2x^2-7x+3 \qquad すなわち \qquad y=2x^2-7x$$
(3)　求める方程式は，① の x，y をそれぞれ $x-(-3)$，$y-1$ でおき換えて
$$y-1=2\{x-(-3)\}^2-7\{x-(-3)\}+3$$
よって　$y=2(x+3)^2-7(x+3)+4$
すなわち　$y=2x^2+5x+1$
(4)　求める方程式は，① の x，y をそれぞれ $x-2$，$y-(-1)$ でおき換えて
$$y-(-1)=2(x-2)^2-7(x-2)+3$$
すなわち　$y=2x^2-15x+24$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$y=-x^2+5x-2$　　(2)　$y=x^2+5x+2$　　(3)　$y=-x^2-5x-2$

解説

(1)　求める方程式は，x，y をそれぞれ x，$-y$ でおき換えて
$$-y=x^2-5x+2 \qquad すなわち \qquad y=-x^2+5x-2$$
(2)　求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，y でおき換えて
$$y=(-x)^2-5(-x)+2 \qquad すなわち \qquad y=x^2+5x+2$$
(3)　求める方程式は，x，y をそれぞれ $-x$，$-y$ でおき換えて
$$-y=(-x)^2-5(-x)+2 \qquad すなわち \qquad y=-x^2-5x-2$$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$y=3x^2-8x-1$　　(2)　$y=-x^2+8x-11$

解説

(1) 求める放物線は，放物線 $y=3x^2+4x$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -5 だけ平行移動したものである。

よって，その方程式は

$$y-(-5)=3(x-2)^2+4(x-2) \qquad \text{すなわち} \qquad y=3x^2-8x-1$$

(2) 求める放物線は，放物線 $y=x^2-6x+7$ を x 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

まず，x 軸に関して対称移動すると

$$-y=x^2-6x+7 \qquad \text{すなわち} \qquad y=-x^2+6x-7$$

次に，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると

$$y-3=-(x-1)^2+6(x-1)-7$$

よって　$y=-x^2+8x-11$

5

解答　(1) $y=\dfrac{1}{4}(x-1)^2+3$ $\left(y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{4}\right)$

(2) $y=(x-4)^2-3$ $(y=x^2-8x+13)$

(3) $y=3x^2-2x$

解説

(1) 頂点が点 $(1,\ 3)$ であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x-1)^2+3$$

と表される。そのグラフが点 $(-1,\ 4)$ を通るから

$$4=4a+3 \qquad \text{ゆえに} \qquad a=\frac{1}{4}$$

よって　$y=\dfrac{1}{4}(x-1)^2+3$ $\left(y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{13}{4}\ \text{でもよい}\right)$

(2) 軸が直線 $x=4$ であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x-4)^2+q$$

と表される。そのグラフが 2 点 $(2,\ 1)$，$(5,\ -2)$ を通るから

$1=4a+q$ ……①

$-2=a+q$ ……②

①－② から　$3=3a$　ゆえに　$a=1$

② から　$q=-3$

よって　$y=(x-4)^2-3$ $(y=x^2-8x+13$ でもよい$)$

(3) 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフが 3 点 $(-2,\ 16)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 21)$ を通るから

$$\begin{cases} 4a-2b+c=16 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=1 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=21 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①－② から　$3a-3b=15$　よって　$a-b=5$ ……④

③－② から　$8a+2b=20$　よって　$4a+b=10$ ……⑤

④＋⑤ から　$5a=15$　よって　$a=3$

$a=3$ を ④ に代入して　$3-b=5$　ゆえに　$b=-2$

$a=3$，$b=-2$ を ② に代入して　$3-2+c=1$　ゆえに　$c=0$

よって，求める 2 次関数は　$y=3x^2-2x$

6

解答　(1) $y=-3x^2+4$　(2) $y=x^2-4x+1$

解説

(1) 放物線 $y=-3x^2+4x+7$ を平行移動したものであるから，求める 2 次関数は $y=-3x^2+bx+c$ と表される。

このグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(2,\ -8)$ を通るから

$$1=-3+b+c,\quad -8=-12+2b+c$$

整理して　$b+c=4$，$2b+c=4$　これを解いて　$b=0$，$c=4$

よって，求める 2 次関数は　$y=-3x^2+4$

(2) 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフは，3 点 $(0,\ 3)$，$(1,\ -2)$，$(-1,\ 10)$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動した点 $(-1,\ 6)$，$(0,\ 1)$，$(-2,\ 13)$ を通るから

$$\begin{cases} a-b+c=6 & \cdots\cdots ① \\ c=1 & \cdots\cdots ② \\ 4a-2b+c=13 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② を ① に代入して　$a-b+1=6$　よって　$a-b=5$ ……④

② を ③ に代入して　$4a-2b+1=13$　よって　$2a-b=6$ ……⑤

④，⑤ を連立して解くと　$a=1$，$b=-4$

よって，求める 2 次関数は　$y=x^2-4x+1$

1

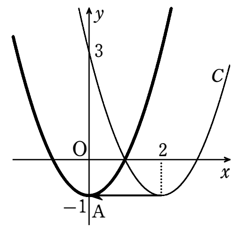
解答　(1) $y=x^2-1$　(2) $y=x^2-4x-1$

解説

$$x^2-4x+3=(x-2)^2-2^2+3=(x-2)^2-1$$

であるから，グラフ C は，頂点が点 $(2,\ -1)$，y 軸との交点の座標が $(0,\ 3)$ の放物線である。

(1) グラフ C が，点 A $(0,\ -1)$ を通るためには，右の図から，x 軸方向に -2 だけ平行移動すればよい。



よって，求める 2 次関数は

$$y=\{x-(-2)-2\}^2-1$$

すなわち　$y=x^2-1$

別解　C を x 軸方向に p だけ平行移動したグラフが表す 2 次関数は

$$y=(x-p)^2-4(x-p)+3 \quad \cdots\cdots ①$$

① のグラフが点 A $(0,\ -1)$ を通るとき

$$-1=(0-p)^2-4(0-p)+3$$

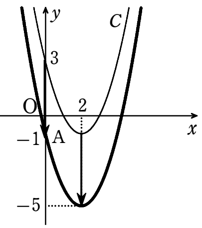
よって　$p^2+4p+4=0$

これを解いて　$(p+2)^2=0$　ゆえに　$p=-2$

このとき ① は　$y=(x+2)^2-4(x+2)+3$

すなわち　$y=x^2-1$

(2) グラフ C が点 A $(0,\ -1)$ を通るためには，右の図から，y 軸方向に -4 だけ平行移動すればよい。



よって，求める 2 次関数は

$$y-(-4)=x^2-4x+3$$

すなわち　$y=x^2-4x-1$

別解　C を y 軸方向に q だけ平行移動したグラフが表す 2 次関数は

$$y=x^2-4x+3+q \quad \cdots\cdots ②$$

② のグラフが点 A $(0,\ -1)$ を通るとき

$$-1=0^2-4\cdot 0+3+q \qquad \text{よって} \qquad q=-4$$

このとき ② は　$y=x^2-4x+3-4$

すなわち　$y=x^2-4x-1$

2

解答　(ア) $-x^2-2x-2$　(イ) y 軸

解説

$f(x)=-x^2+2x-2$ とおくと，① は

$$y=f(x)$$

① を原点に関して対称に移動して得られる放物線 ③ の方程式は

$$-y=f(-x)$$

すなわち　$y=-f(-x)$

③ を x 軸に関して対称に移動して得られる放物線 ② の方程式は

$$-y=-f(-x)$$

すなわち　$y=f(-x)$

ゆえに　$y=-(-x)^2+2(-x)-2=-x^2-2x-2$

ところで，放物線 ② の方程式は $y=f(-x)$ であるから，② は ① を y 軸に関して対称に

移動したものである。

（ア）　$-x^2-2x-2$　　（イ）　y 軸

$\boxed{3}$

解答　（ア）　-2　　（イ）　$-\dfrac{3}{5}$　　（ウ）　$\dfrac{7}{5}$　　（エ）　-7

解説

$$G：y=x^2-2(a+2)x+a^2-a+1$$
$$=\{x-(a+2)\}^2-(a+2)^2+a^2-a+1$$
$$=\{x-(a+2)\}^2-5a-3 \quad \cdots\cdots ①$$

よって，G の軸は 直線 $x=a+2$，頂点は 点 $(a+2,\ -5a-3)$ である。

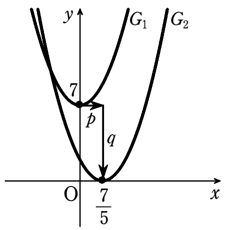
G が y 軸に関して対称になるのは，G の軸が y 軸に一致するときである。

よって　　$a+2=0$　　　ゆえに　　$a={}^{ア}-2$

また，G の頂点が x 軸上にあるのは $-5a-3=0$ すなわち $a={}^{イ}-\dfrac{3}{5}$ のとき。

$a=-2$，$a=-\dfrac{3}{5}$ をそれぞれ ① に代入することにより，G_1，G_2 をグラフにもつ 2 次関数はそれぞれ

$$G_1：y=x^2+7,\quad G_2：y=\left(x-\frac{7}{5}\right)^2$$



よって，G_1 の頂点は　　点 $(0,\ 7)$，

G_2 の頂点は　　点 $\left(\dfrac{7}{5},\ 0\right)$

G_1 を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動し，G_2 に重なるとすると　　$0+p=\dfrac{7}{5}$，$7+q=0$

よって　　　　$p={}^{ウ}\dfrac{7}{5}$，$q={}^{エ}-7$

$\boxed{4}$

解答　$a=-4$，$b=8$ または $a=1$，$b=-2$

解説

放物線 $y=x^2+2ax+b$ が点 $(1,\ 1)$ を通るから

$1=1+2a+b$　　すなわち　　$b=-2a$　$\cdots\cdots ①$

よって，放物線の方程式は

$$y=x^2+2ax-2a=(x+a)^2-a^2-2a$$

と変形できるから，頂点は

点 $(-a,\ -a^2-2a)$

頂点が直線 $y=-x-4$ 上にあるとき

$-a^2-2a=-(-a)-4$　　　よって　　$a^2+3a-4=0$

ゆえに　　$(a+4)(a-1)=0$　　　したがって　　$a=-4,\ 1$

① から　　$a=-4$ のとき　$b=8$，　$a=1$ のとき　$b=-2$

以上から　　$a=-4$，$b=8$　または　$a=1$，$b=-2$

$\boxed{1}$

解答　$y=2(x+1)^2-5$，$y=2(x-2)^2+1$　（$y=2x^2+4x-3$，$y=2x^2-8x+9$）

解説

求める放物線は，放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で，その頂点が直線 $y=2x-3$ 上にあるから，その方程式は

$$y=2(x-p)^2+2p-3 \quad \cdots\cdots ①$$

と表される。これが点 $(1,\ 3)$ を通るから

$$3=2(1-p)^2+2p-3$$

整理して　　$p^2-p-2=0$

よって　　$(p+1)(p-2)=0$　　　ゆえに　　$p=-1,\ 2$

① に代入して　　$y=2(x+1)^2-5$，$y=2(x-2)^2+1$

（$y=2x^2+4x-3$，$y=2x^2-8x+9$　でもよい）

$\boxed{2}$

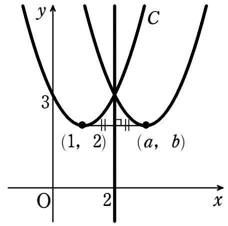
解答　順に $y=x^2-6x+11$，$y=-x^2-6x-9$

解説

C の方程式を変形すると　$y=(x-1)^2+2$

よって，C の頂点の座標は　$(1,\ 2)$

(前半)　直線 $x=2$ に関して，点 $(1,\ 2)$ と対称な点の座標を $(a,\ b)$ とすると　$\dfrac{1+a}{2}=2$，$b=2$

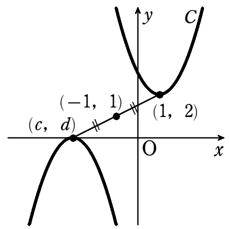


よって　$a=3$，$b=2$

したがって，直線 $x=2$ に関して，C と対称な曲線は，2 次の係数が 1，頂点が点 $(3,\ 2)$ の放物線であるから，その方程式は　$y=(x-3)^2+2$

すなわち　$y=x^2-6x+11$

(後半)　点 $(-1,\ 1)$ に関して，点 $(1,\ 2)$ と対称な点の座標を $(c,\ d)$ とすると　$\dfrac{1+c}{2}=-1$，$\dfrac{2+d}{2}=1$



よって　$c=-3$，$d=0$

したがって，点 $(-1,\ 1)$ に関して，C と対称な曲線は，2 次の係数が -1，頂点が点 $(-3,\ 0)$ の放物線であるから，その方程式は　$y=-(x+3)^2$

すなわち　$y=-x^2-6x-9$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x=-2$ で最小値 -4，最大値はない

(2)　$x=-1$ で最大値 4，最小値はない

解説

(1)　関数の式を変形すると　　$y=(x+2)^2-4$

したがって，$x=-2$ で最小値 -4 をとる。

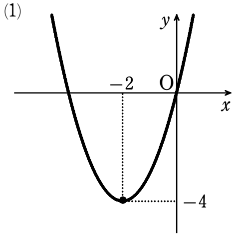
また，y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。

(2)　関数の式を変形すると　　$y=-3(x+1)^2+4$

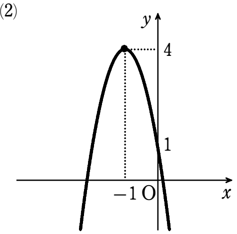
したがって，$x=-1$ で最大値 4 をとる。

また，y の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない。

(1)



(2)



$\boxed{2}$

解答　(1)　$x=0$ で最大値 5，$x=2$ で最小値 -3

(2)　$x=1$ で最大値 3，$x=-1$ で最小値 -9

解説

(1)　関数の式を変形すると

$$y=2(x-2)^2-3 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$$

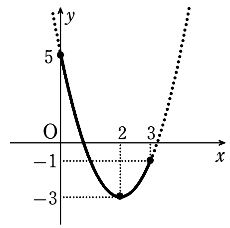
よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

したがって

$x=0$ で最大値 5

$x=2$ で最小値 -3

をとる。



(2)　関数の式を変形すると

$$y=-(x-3)^2+7 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

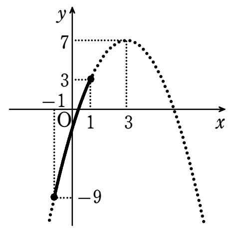
よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

したがって

$x=1$ で最大値 3

$x=-1$ で最小値 -9

をとる。



$\boxed{3}$

解答　$a=6$，最小値 2

解説

関数の式を変形すると

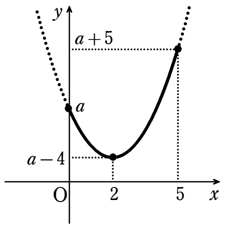
$y=(x-2)^2+a-4 \quad (0 \leqq x \leqq 5)$

よって，この関数は

$x=5$ で最大値 $a+5$

$x=2$ で最小値 $a-4$

をとる。



最大値が 11 であるとき　　$a+5=11$

ゆえに　　$a=6$

したがって，最小値は　　$6-4=2$

4

解答　(1)　$x=-6$，$y=-3$ で最大値 18

(2)　$0 \leqq x \leqq 4$；$x=0$，$y=4$ または $x=4$，$y=0$ で最大値 16，

$x=y=2$ で最小値 8

解説

(1)　$x+2y+12=0$ から　　$x=-2y-12$　……①

よって　　$xy=(-2y-12)y=-2(y^2+6y)$

$=-2(y+3)^2+18$

ゆえに，xy は $y=-3$ で最大値 18 をとる。

① から，$y=-3$ のとき　　$x=-2\cdot(-3)-12=-6$

したがって　　$x=-6$，$y=-3$ で最大値 18

(2)　$x+y=4$ から　　$y=4-x$　……①

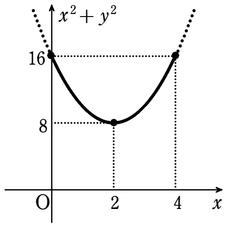
$y \geqq 0$ から　　$4-x \geqq 0$　　よって　　$x \leqq 4$

$x \geqq 0$ と合わせて　　$0 \leqq x \leqq 4$　……②

また　　$x^2+y^2=x^2+(4-x)^2$

$=2x^2-8x+16$

$=2(x-2)^2+8$



よって，② の範囲の x について x^2+y^2 は

$x=0$ または $x=4$ で最大値 16 をとり，$x=2$ で

最小値 8 をとる。

① から　　$x=0$ のとき $y=4$

$x=4$ のとき $y=0$

$x=2$ のとき $y=2$

以上から，x のとりうる値の範囲は $0 \leqq x \leqq 4$ であり，x^2+y^2 は

$x=0$，$y=4$ または $x=4$，$y=0$ で最大値 16 をとり，

$x=y=2$ で最小値 8 をとる。

5

解答　(1)　$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -5　　(2)　$x=7$，$y=2$ のとき最小値 -3

解説

(1)　$P=x^2+4x+3y^2-6y+2=(x+2)^2-2^2+3y^2-6y+2$

$=(x+2)^2+3(y-1)^2-3\cdot1^2-2=(x+2)^2+3(y-1)^2-5$

x，y は実数であるから　　$(x+2)^2 \geqq 0$，$(y-1)^2 \geqq 0$

よって，P は $x+2=0$，$y-1=0$ のとき最小となる。

ゆえに　　$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -5

(2)　$Q=x^2-2(3y+1)x+10y^2+2y+2$

$=\{x-(3y+1)\}^2-(3y+1)^2+10y^2+2y+2$

$=\{x-(3y+1)\}^2+y^2-4y+1$

$=\{x-(3y+1)\}^2+(y-2)^2-2^2+1$

$=\{x-(3y+1)\}^2+(y-2)^2-3$

x，y は実数であるから　　$\{x-(3y+1)\}^2 \geqq 0$，$(y-2)^2 \geqq 0$

よって，Q は $x-(3y+1)=0$，$y-2=0$ のとき最小となる。

$x-(3y+1)=0$，$y-2=0$ を解くと　　$x=7$，$y=2$

ゆえに　　$x=7$，$y=2$ のとき最小値 -3

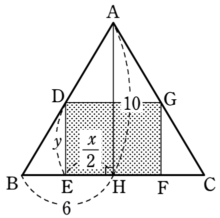
6

解答　$S=-\dfrac{5}{6}x^2+10x$ $(0<x<12)$，S は $x=6$ で最大値 30 をとる

解説

A から辺 BC に垂線 AH を引き，EF$=x$，DE$=y$ とすると

$\text{EH}=\dfrac{x}{2}$



$0<\dfrac{x}{2}<6$ であるから　　$0<x<12$

△ABH∽△DBE であるから

AH：HB＝DE：EB

すなわち　　$10:6=y:\left(6-\dfrac{x}{2}\right)$

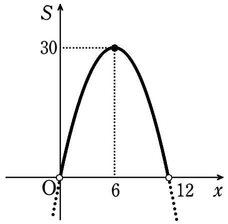
よって　　$6y=10\left(6-\dfrac{x}{2}\right)$　　ゆえに　$y=10-\dfrac{5}{6}x$

したがって，長方形の面積 S は

$S=xy=x\left(10-\dfrac{5}{6}x\right)=-\dfrac{5}{6}x^2+10x$

$=-\dfrac{5}{6}(x^2-12x)=-\dfrac{5}{6}\{(x-6)^2-6^2\}$

$=-\dfrac{5}{6}(x-6)^2+30 \quad (0<x<12)$



よって，S は $x=6$ で最大値 30 をとる。

1

解答　(1)　$x=1$ で最小値 -4，最大値はない

(2)　$x=\dfrac{1}{4}$ で最大値 $\dfrac{1}{8}$，最小値はない

(3)　$x=-\dfrac{2}{3}$ で最小値 $-\dfrac{7}{3}$，最大値はない

(4)　$x=\dfrac{3}{4}$ で最大値 $-\dfrac{31}{8}$，最小値はない

解説

(1)　$x^2-2x-3=\{(x-1)^2-1^2\}-3$

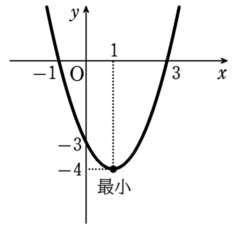
$=(x-1)^2-1-3$

ゆえに，この 2 次関数は

$y=(x-1)^2-4$

と表される。

グラフは下に凸の放物線で，頂点は点 $(1,\ -4)$ である。



よって，$x=1$ で最小値 -4 をとる。

また，y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。

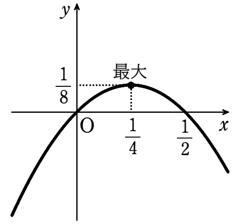
(2)　$-2x^2+x=-2\left\{\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right\}=-2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

ゆえに，この 2 次関数は

$y=-2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}$

と表される。

グラフは上に凸の放物線で，頂点は点 $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8}\right)$ である。



よって，$x=\dfrac{1}{4}$ で最大値 $\dfrac{1}{8}$ をとる。

また，y の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない。

(3)　$3x^2+4x-1=3\left\{\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right\}-1$

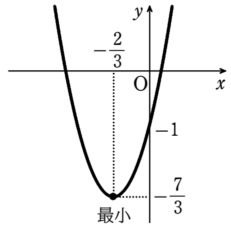
$=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-1$

ゆえに，この 2 次関数は

$y=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{3}$

と表される。

グラフは下に凸の放物線で，頂点は点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{7}{3}\right)$ である。



よって，$x=-\dfrac{2}{3}$ で最小値 $-\dfrac{7}{3}$ をとる。

また，y の値はいくらでも大きくなるから，最大値はない。

(4)　$-2x^2+3x-5=-2\left\{\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}-5$

$=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-5$

ゆえに，この２次関数は

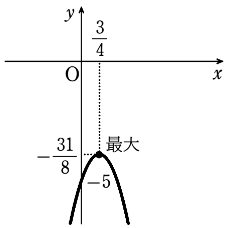
$$y=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{31}{8}$$

と表される。

グラフは上に凸の放物線で，頂点は点 $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{31}{8}\right)$ である。

よって，$x=\frac{3}{4}$ で最大値 $-\frac{31}{8}$ をとる。

また，y の値はいくらでも小さくなるから，最小値はない。



$\boxed{2}$

解答　(1)　$x=1$ のとき最大値 0，$x=-2$ のとき最小値 -9

(2)　$x=-1$ のとき最大値 4，$x=1$ のとき最小値 0

(3)　$x=0$ のとき最大値 8，$x=\frac{3}{2}$ のとき最小値 -1

(4)　$x=0$ のとき最大値 4，$x=-2$ のとき最小値 -2

(5)　$x=1$ のとき最大値 0；$x=-1$，3 のとき最小値 -4

解説

(1)　$y=x^2+4x-5=(x^2+4x)-5$

$=(x^2+4x+2^2-2^2)-5$

$=(x^2+4x+2^2)-2^2-5$

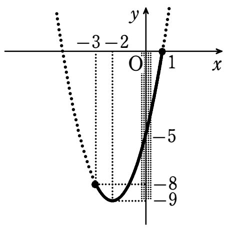
$=(x+2)^2-9$

この関数のグラフは，右の図の実線部分である。

よって，値域は　　$-9\leqq y\leqq 0$

したがって　　$x=1$　のとき最大値 0，

$x=-2$ のとき最小値 -9



(2)　$y=-x^2-2x+3=-(x^2+2x)+3$

$=-(x^2+2x+1^2-1^2)+3$

$=-(x^2+2x+1^2)+1^2+3$

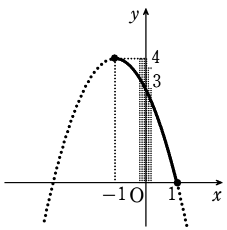
$=-(x+1)^2+4$

この関数のグラフは，右の図の実線部分である。

よって，値域は　　$0\leqq y\leqq 4$

したがって　　$x=-1$ のとき最大値 4，

$x=1$　のとき最小値 0



(3)　$y=4x^2-12x+8$

$=4(x^2-3x)+8$

$=4\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+8$

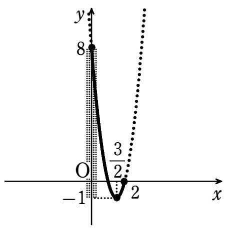
$=4\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+8$

$=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-1$

この関数のグラフは，右図の実線部分である。

よって，値域は　　$-1\leqq y\leqq 8$

したがって　　$x=0$　のとき最大値 8，



$x=\frac{3}{2}$ のとき最小値 -1

(4)　$y=x^2+5x+4$

$=(x^2+5x)+4$

$=\left\{x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}+4$

$=\left\{x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{5}{2}\right)^2+4$

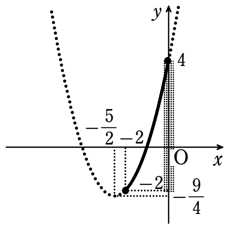
$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

この関数のグラフは，右図の実線部分である。

よって，値域は　　$-2\leqq y\leqq 4$

したがって　　$x=0$　のとき最大値 4，

$x=-2$ のとき最小値 -2



(5)　$y=-x^2+2x-1$

$=-(x^2-2x)-1$

$=-(x^2-2x+1^2-1^2)-1$

$=-(x^2-2x+1^2)+1^2-1$

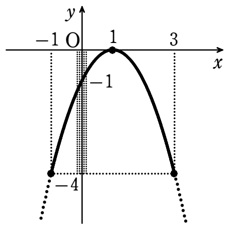
$=-(x-1)^2$

この関数のグラフは，右図の実線部分である。

よって，値域は　　$-4\leqq y\leqq 0$

したがって　　$x=1$　　のとき最大値 0，

$x=-1$，3 のとき最小値 -4



$\boxed{3}$

解答　$c=-7$，$x=3$ で最大値 2

解説

$y=-x^2+6x+c=-(x-3)^2+9+c$

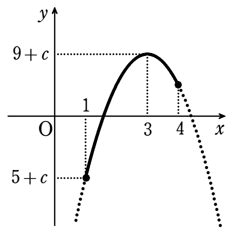
よって，この関数は $x=1$ で最小値をとる。

$x=1$ のとき　　$y=-1^2+6\cdot1+c=5+c$

最小値が -2 であるとき　　$5+c=-2$

したがって　　$c=-7$

このとき，$x=3$ で最大値 $9+c=2$ をとる。



$\boxed{4}$

解答　(1)　$x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$

(2)　$x=3$，$y=0$ で最大値 9；$x=\frac{3}{5}$，$y=-\frac{6}{5}$ で最小値 $\frac{9}{5}$

解説

(1)　$x+2y+3=0$ から　　$x=-2y-3$

よって　　$xy=(-2y-3)y=-2y^2-3y=-2\left(y+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$

ゆえに，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$ をとる。このとき　　$x=-2\times\left(-\frac{3}{4}\right)-3=-\frac{3}{2}$

したがって　$x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{9}{8}$

(2)　$x-2y=3$ から　　$x=2y+3$　……①

よって　　$x^2+y^2=(2y+3)^2+y^2=5y^2+12y+9$

$=5\left\{\left(y+\frac{6}{5}\right)^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2\right\}+9$

$=5\left(y+\frac{6}{5}\right)^2+\frac{9}{5}$　……②

$x\geqq0$ と①から　　$2y+3\geqq0$

$y\leqq0$ と合わせて　　$-\frac{3}{2}\leqq y\leqq 0$

この範囲において，②は

$y=0$ で最大値 9，$y=-\frac{6}{5}$ で最小値 $\frac{9}{5}$

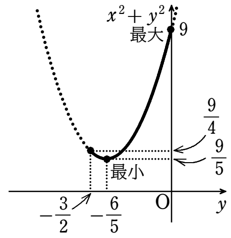
をとる。①から

$y=0$ のとき　　$x=3$

$y=-\frac{6}{5}$ のとき　$x=2\left(-\frac{6}{5}\right)+3=\frac{3}{5}$

したがって，$x=3$，$y=0$　　で最大値 9，

$x=\frac{3}{5}$，$y=-\frac{6}{5}$ で最小値 $\frac{9}{5}$ をとる。



$\boxed{5}$

解答　(1)　$x=1$，$y=-5$ のとき最小値 -29　　(2)　$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -8

解説

(1)　$P=2x^2-4x+y^2+10y-2=2(x-1)^2-2\cdot1^2+y^2+10y-2$

$=2(x-1)^2+(y+5)^2-5^2-4=2(x-1)^2+(y+5)^2-29$

x，y は実数であるから　　$(x-1)^2\geqq0$，$(y+5)^2\geqq0$

よって，P は $x-1=0$，$y+5=0$ のとき最小となる。

ゆえに　　$x=1$，$y=-5$ のとき最小値 -29

(2)　$Q=x^2-2(y-3)x+5y^2-14y+5=\{x-(y-3)\}^2-(y-3)^2+5y^2-14y+5$

$=\{x-(y-3)\}^2+4y^2-8y-4=\{x-(y-3)\}^2+4(y-1)^2-4\cdot1^2-4$

$=\{x-(y-3)\}^2+4(y-1)^2-8$

x，y は実数であるから　　$\{x-(y-3)\}^2\geqq0$，$(y-1)^2\geqq0$

よって，Q は $x-(y-3)=0$，$y-1=0$ のとき最小となる。

$x-(y-3)=0$，$y-1=0$ を解くと　　$x=-2$，$y=1$

ゆえに　　$x=-2$，$y=1$ のとき最小値 -8

$\boxed{6}$

解答　縦の長さが 2 のとき最大値 12

解説

右の図のように点 D ～ H をとり，長方形の縦の長さを x とする。

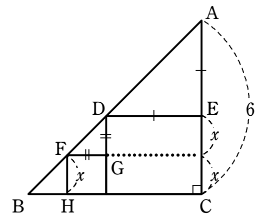
$0<\mathrm{EC}<6$ であるから　　$0<2x<6$

よって　　$0<x<3$　……①

$\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{GDF}$，

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{DFG}$

であるから，△ABC，△ADE，△DFG は相似で，すべて直角二等辺三角形である。



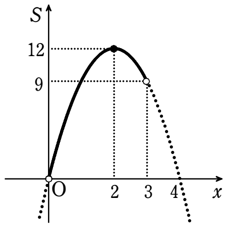
ゆえに　　DE＝AE＝$6-2x$，　FG＝DG＝x

長方形の面積の和を S とすると

$$S=\mathrm{DE}\cdot\mathrm{EC}+\mathrm{FG}\cdot\mathrm{FH}$$
$$=(6-2x)\cdot 2x+x\cdot x$$
$$=-3x^2+12x$$
$$=-3(x-2)^2+12$$

① の範囲で，S は $x=2$ で最大値 12 をとる。

よって，2 つの長方形の面積の和は，長方形の縦の長さが 2 のとき最大値 12 をとる。



1

解答　(1)　$x=3$ で最大値 10，$x=0$ で最小値 1

(2)　$x=2$ で最大値 2，$x=0$，4 で最小値 -2

(3)　$x=1$ で最大値 5，$x=0$ で最小値 -1

(4)　$x=1$ で最大値 -2，$x=-1$ で最小値 -14

(5)　$x=3$ で最大値 1，$x=\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{5}{4}$

(6)　$x=\frac{9}{4}$ で最大値 $\frac{81}{8}$，最小値はない

解説

(1)　$y=x^2+1$ $(-1\leqq x\leqq 3)$ のグラフは右の図の実線部分である。

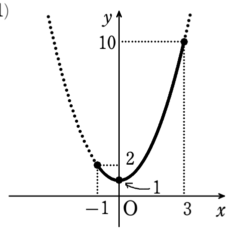
したがって

$x=3$ で最大値 10

$x=0$ で最小値 1

をとる。

(1)



(2)　関数の式を変形すると

$$y=-(x-2)^2+2 \quad (0\leqq x\leqq 4)$$

よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

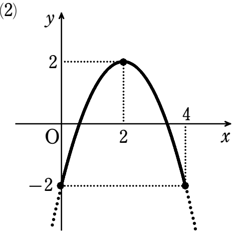
したがって

$x=2$ で最大値 2

$x=0$，4 で最小値 -2

をとる。

(2)



(3)　関数の式を変形すると

$$y=2(x+1)^2-3 \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

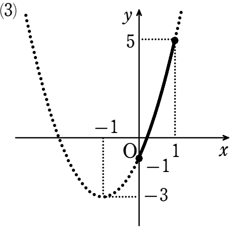
したがって

$x=1$ で最大値 5

$x=0$ で最小値 -1

をとる。

(3)



(4)　関数の式を変形すると

$$y=-3(x-1)^2-2 \quad (-1\leqq x\leqq 2)$$

よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

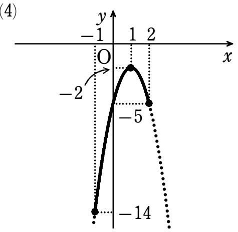
したがって

$x=1$ で最大値 -2

$x=-1$ で最小値 -14

をとる。

(4)



(5)　関数の式を変形すると

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \quad (1<x\leqq 3)$$

よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

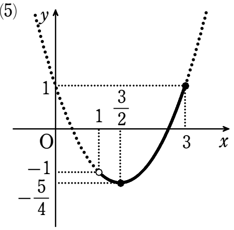
したがって

$x=3$ で最大値 1

$x=\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{5}{4}$

をとる。

(5)



(6)　関数の式を変形すると

$$y=-2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{81}{8} \quad (0<x<3)$$

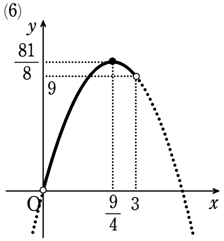
よって，そのグラフは右の図の実線部分である。

したがって

$x=\frac{9}{4}$ で最大値 $\frac{81}{8}$ をとる。

最小値はない。

(6)



2

解答　$a=4$，$b=1$

解説

関数の式を変形すると　　$y=3\left(x-\frac{a-2}{2}\right)^2-\frac{3}{4}(a-2)^2+b$

この関数のグラフは下に凸の放物線であるから，y は $x=\frac{a-2}{2}$ のとき最小値

$-\frac{3}{4}(a-2)^2+b$ をとる。

よって　　$\frac{a-2}{2}=1$ ……①，$-\frac{3}{4}(a-2)^2+b=-2$ ……②

① を解くと　　$a=4$　　　よって，② から　　$b=-2+\frac{3}{4}(4-2)^2=-2+3=1$

別解　$x=1$ で最小値 -2 をとるから，求める 2 次関数は　$y=3(x-1)^2-2$

と表される。右辺を展開して　　$y=3x^2-6x+1$

$y=3x^2-(3a-6)x+b$ と係数を比較して　　$3a-6=6$，$b=1$

よって　　$a=4$，$b=1$

3

解答　$a=\frac{7}{2}$，$b=4$ または $a=-\frac{7}{2}$，$b=-10$

解説

関数の式を変形して　　$f(x)=a(x-2)^2-4a+b$

[1]　$a=0$ のとき，$f(x)=b$ となり，条件を満たさない。

[2]　$a>0$ のとき，グラフは下に凸の放物線となるから，$1\leqq x\leqq 4$ の範囲で $f(x)$ は

$x=4$ で最大値 $f(4)=b$，$x=2$ で最小値 $f(2)=-4a+b$　　をとる。

したがって　　$b=4$，$-4a+b=-10$　　　これを解いて　　$a=\frac{7}{2}$，$b=4$

これは $a>0$ を満たす。

[3]　$a<0$ のとき，グラフは上に凸の放物線となるから，$1\leqq x\leqq 4$ の範囲で $f(x)$ は

$x=2$ で最大値 $f(2)=-4a+b$，$x=4$ で最小値 $f(4)=b$ 　をとる。

したがって　$-4a+b=4$，$b=-10$　　これを解いて　$a=-\dfrac{7}{2}$，$b=-10$

これは $a<0$ を満たす。

以上から　$a=\dfrac{7}{2}$，$b=4$ または $a=-\dfrac{7}{2}$，$b=-10$

4

解答　$n=-2$ のとき最大値 22

解説

$$f(n)=-3\left\{n^2+2\cdot\frac{7}{3}n+\left(\frac{7}{3}\right)^2-\left(\frac{7}{3}\right)^2\right\}+6=-3\left(n+\frac{7}{3}\right)^2+\frac{67}{3}$$

よって　$n=-\dfrac{7}{3}$ で最大値をとる。

n は整数で $-\dfrac{7}{3}=-2.3\cdots$ であるから　$-\dfrac{7}{3}$ に最も近い整数は -2

すなわち $n=-2$ で最大値をとる。$f(-2)=-3\cdot(-2)^2-14\cdot(-2)+6=22$

したがって，最大値は 22，　そのとき $n=-2$

5

解答　(1)　$m(k)=-4k^2+24k$　　(2)　$k=3$，最大値 36

解説

(1)　$y=x^2+4kx+24k$ を変形すると

$y=(x+2k)^2-4k^2+24k$

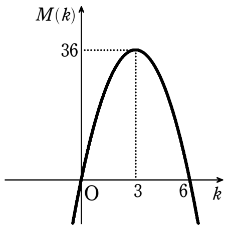
ゆえに　$m(k)=-4k^2+24k$

(2)　$m(k)=-4(k-3)^2+36$

よって，$m(k)$ を最大にする k の値は

$k=3$

$m(k)$ の最大値は　36



6

解答　(1)　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$　　(2)　$x=2$，$y=1$ のとき最小値 12

解説

(1)　$a+b=1$ から　$b=1-a$　……①

$b>0$ であるから　$1-a>0$　　ゆえに　$a<1$

$a>0$ と合わせて　$0<a<1$　……②

$a^3+b^3=t$ とおくと

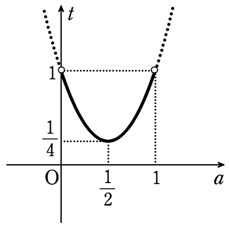
$$t=a^3+(1-a)^3=3a^2-3a+1=3\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

② の範囲において，t は

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$　をとる。

① から，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき　$b=\dfrac{1}{2}$

したがって　$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$



(2)　$x+2y+3z=6$ から　$3z=6-x-2y$

ゆえに　$x^2+4y^2+9z^2=x^2+4y^2+(6-x-2y)^2$

$=2x^2+4xy+8y^2-12x-24y+36$

$=2x^2+4(y-3)x+8y^2-24y+36$

$=2\{x+(y-3)\}^2+6y^2-12y+18$

$=2(x+y-3)^2+6(y-1)^2+12$

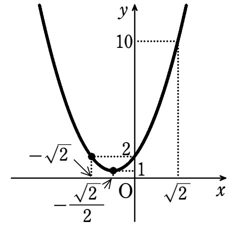
x，y は実数であるから　$(x+y-3)^2\geqq 0$，$(y-1)^2\geqq 0$

よって，$x^2+4y^2+9z^2$ は，$x+y-3=0$，$y-1=0$ すなわち $x=2$，$y=1$ のときに最小となる。

したがって　$x=2$，$y=1$ のとき最小値 12

1

解答　$a=2\sqrt{2}$，$b=2$，［図］



解説

関数の式を変形すると

$$f(x)=2\left(x+\frac{a}{4}\right)^2+b-\frac{a^2}{8}$$

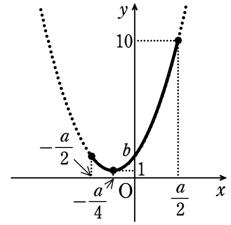
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線

$x=-\dfrac{a}{4}$，　頂点は点 $\left(-\dfrac{a}{4},\ b-\dfrac{a^2}{8}\right)$ である。

$a>0$ より $-\dfrac{a}{2}<-\dfrac{a}{4}<\dfrac{a}{2}$ であるから，

$-\dfrac{a}{2}\leqq x\leqq\dfrac{a}{2}$ の範囲において，$f(x)$ は $x=\dfrac{a}{2}$ で最大と

なり，$x=-\dfrac{a}{4}$ で最小となる。



ゆえに　$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=10$，$f\left(-\dfrac{a}{4}\right)=1$

よって　$a^2+b=10$ ……①，$b-\dfrac{a^2}{8}=1$ ……②

①，② から b を消去して　$\dfrac{9}{8}a^2+1=10$

これを解くと　$a=\pm 2\sqrt{2}$

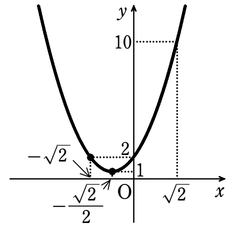
$a>0$ であるから　$a=2\sqrt{2}$

① に代入して　$b=2$

このとき　$f(x)=2x^2+2\sqrt{2}\,x+2$

$$=2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1$$

よって，グラフは右の図のようになる。



2

解答　$x=4$，$y=3$ のとき最大値 -3

解説

$P=4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7$ とする。

x，y が隣り合う整数のとき　$y=x+1$　または　$y=x-1$

[1]　$y=x+1$ のとき

$P=4x^2+12(x+1)^2-12x(x+1)+4x-18(x+1)+7$

$=4x^2-2x+1=4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

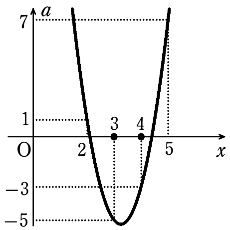
よって，$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7=a$ を満たす負の実数 a は存在しない。

[2]　$y=x-1$ のとき

$P=4x^2+12(x-1)^2-12x(x-1)+4x-18(x-1)+7$

$=4x^2-26x+37=4\left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\frac{21}{4}$

よって，$a=4\left(x-\frac{13}{4}\right)^2-\frac{21}{4}$ のグラフは右の図のようになる。



a は負の実数，x は整数であるから，グラフより a は $x=4$ のとき最大値 -3 をとる。

したがって，a は $x=4$，$y=3$ のとき最大値 -3 をとる。

[1]，[2] から，a は $x=4$，$y=3$ のとき最大値 -3 をとる。

$\boxed{1}$

解答　(1)　$a<0$ のとき $x=0$ で最小値 0，$0\leqq a\leqq 2$ のとき $x=a$ で最小値 $-2a^2$，$2<a$ のとき $x=2$ で最小値 $8-8a$

(2)　$a<1$ のとき $x=2$ で最大値 $8-8a$，$a=1$ のとき $x=0$，2 で最大値 0，$1<a$ のとき $x=0$ で最大値 0

解説

$y=2x^2-4ax=2(x-a)^2-2a^2$

$x=0$ のとき $y=0$，　$x=2$ のとき $y=8-8a$，　$x=a$ のとき $y=-2a^2$

(1)　[1]　$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 0

[2]　$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^2$

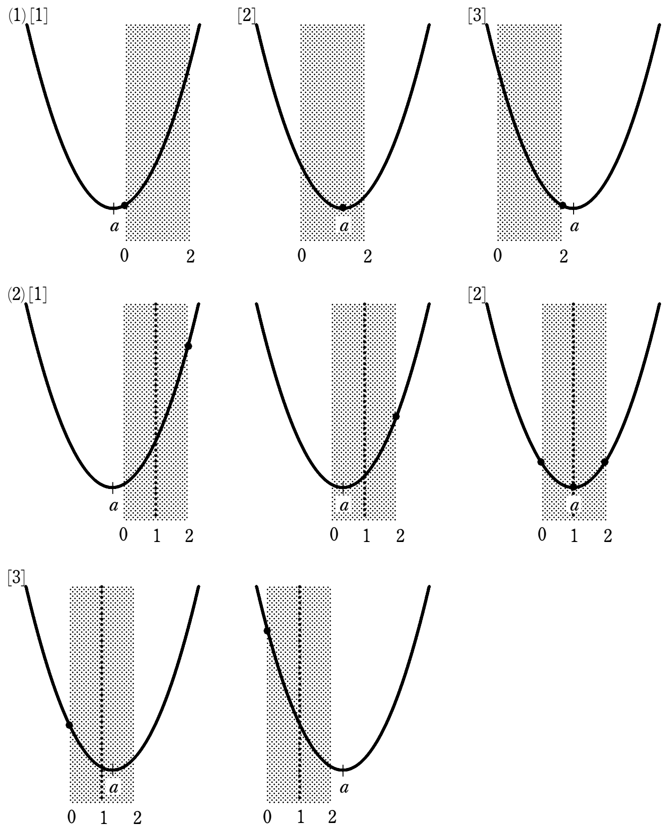
[3]　$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $8-8a$

(2)　定義域の中央の値は 1

[1]　$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $8-8a$

[2]　$a=1$ のとき　$x=0$，2 で最大値 0

[3]　$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 0



$\boxed{2}$

解答　(1)　$a<0$ のとき　$x=a+1$ で最小値 a^2

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$x=1$ で最小値 0

$1<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-2a+1

(2)　$a<\frac{1}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-2a+1

$a=\frac{1}{2}$ のとき　$x=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2

解説

$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$　$(a\leqq x\leqq a+1)$

$x=a$ のとき　$y=a^2-2a+1$，$x=a+1$ のとき　$y=a^2$，$x=1$ のとき　$y=0$

(1)　[1]　$a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a+1$ で最小値 a^2　をとる。

[2]　$a\leqq 1\leqq a+1$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

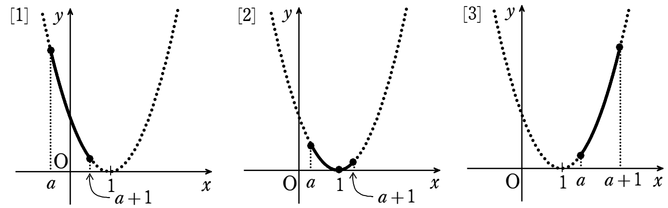
グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=1$ で最小値 0　をとる。

[3]　$1<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 a^2-2a+1　をとる。



(2)　定義域の中央の値は　$a+\frac{1}{2}$

[1]　$a+\frac{1}{2}<1$ すなわち $a<\frac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最大値 a^2-2a+1　をとる。

[2]　$a+\frac{1}{2}=1$ すなわち $a=\frac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

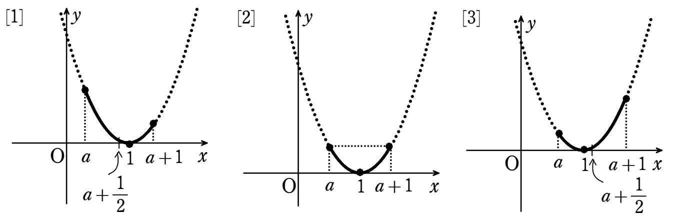
このとき，軸は定義域の中央にあり，$x=a$，$x=a+1$ における y の値が一致する。

よって，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$　をとる。

[3]　$1<a+\frac{1}{2}$ すなわち $\frac{1}{2}<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a+1$ で最大値 a^2　をとる。



$\boxed{3}$

解答　(1)　$a<1$ のとき　$g(a)=a^2-a-3$，　$1\leqq a\leqq 2$ のとき　$g(a)=a-4$，
$a>2$ のとき　$g(a)=a^2-3a$

(2)　$a=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{13}{4}$

解説

(1)　$f(x)=(x-2)^2+a-4$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$ である。

また　$f(a)=a^2-4a+a=a^2-3a$，

$f(a+1)=(a+1)^2-4(a+1)+a=a^2-a-3$

[1]　$a+1<2$ すなわち $a<1$ のとき

$g(a)=f(a+1)=a^2-a-3$

[2]　$a\leqq 2\leqq a+1$ すなわち $1\leqq a\leqq 2$ のとき

$g(a)=f(2)=a-4$

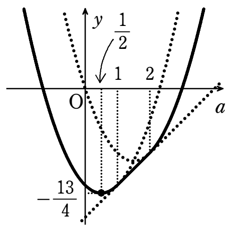
[3]　$a>2$ のとき

$g(a)=f(a)=a^2-3a$

(2)　$g(a)=\begin{cases}\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{13}{4} & (a<1)\\ a-4 & (1\leqq a\leqq 2)\\ \left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4} & (a>2)\end{cases}$

よって，$y=g(a)$ のグラフは，右の図の実線部分のようになる。

ゆえに，$g(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{13}{4}$ をとる。



$\boxed{4}$

解答　$x=0$ のとき最大値0，最小値はない

解説

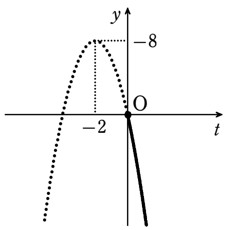
$x^2=t$ とおくと　$t\geqq 0$

y を t の式で表すと

$y=-2t^2-8t$
$=-2(t+2)^2+8$

$t\geqq 0$ の範囲において，y は $t=0$ のとき最大となり，最小値はない。

よって　$x=0$ のとき最大値0，
最小値はない。



$\boxed{5}$

解答　(1)　最大値はない，$x=1$ で最小値 -4

(2)　$x=-1$ のとき最大値1，$x=-1+\sqrt{3}$ のとき最小値 -8

解説

(1)　$x^2-2x=t$ とおくと

$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$

よって　$t\geqq -1$

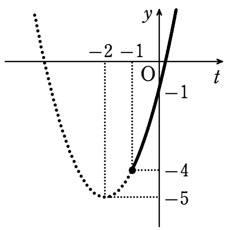
また　$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$
$=t^2+4t-1$
$=(t+2)^2-5$

このグラフは，[図] の実線部分のようになる。

したがって，y は

$t=-1$ すなわち $x=1$ で最小値 -4 をとる。

最大値はない。



(2)　$x^2+2x=t$ とおくと

$t=(x+1)^2-1$

$-2\leqq x\leqq 1$ から　$-1\leqq t\leqq 3$　……①

y を t の式で表すと

$y=t^2-4t-4$
$=(t-2)^2-8$

① の範囲において，y は

$t=-1$ で最大値1，

$t=2$　で最小値 -8　をとる。

$t=-1$ のとき　$(x+1)^2-1=-1$

ゆえに　$(x+1)^2=0$　よって　$x=-1$

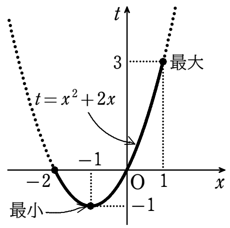
$t=2$ のとき　$(x+1)^2-1=2$

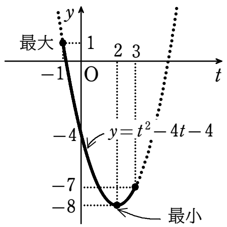
これを解いて　$x=-1\pm\sqrt{3}$

$-2\leqq x\leqq 1$ を満たす解は

$x=-1+\sqrt{3}$

以上から　$x=-1$ のとき最大値1，
$x=-1+\sqrt{3}$ のとき最小値 -8





$\boxed{1}$

解答　(1)　$a<0$ のとき $x=0$ で最大値 $-a$，$0\leqq a\leqq 1$ のとき $x=2a$ で最大値 $4a^2-a$，
$1<a$ のとき $x=2$ で最大値 $7a-4$

(2)　$a<\dfrac{1}{2}$ のとき $x=2$ で最小値 $7a-4$，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき $x=0$，2 で最小値 $-\dfrac{1}{2}$，
$\dfrac{1}{2}<a$ のとき $x=0$ で最小値 $-a$

解説

$y=-x^2+4ax-a=-(x-2a)^2+4a^2-a$　$(0\leqq x\leqq 2)$

$x=0$ のとき　$y=-a$，$x=2$ のとき　$y=7a-4$，$x=2a$ のとき　$y=4a^2-a$

(1)　[1]　$2a<0$ すなわち $a<0$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最大値 $-a$　をとる。

[2]　$0\leqq 2a\leqq 2$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

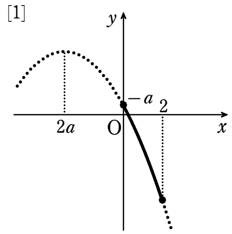
グラフは [図] の実線部分のようになる。

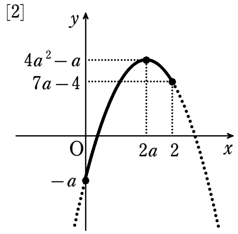
よって，$x=2a$ で最大値 $4a^2-a$　をとる。

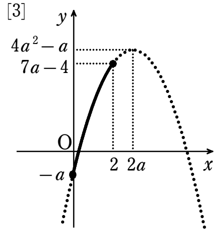
[3]　$2<2a$　すなわち $1<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最大値 $7a-4$　をとる。







(2)　定義域の中央の値は1

[1]　$2a<1$ すなわち $a<\dfrac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最小値 $7a-4$　をとる。

[2]　$2a=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{2}$ のとき

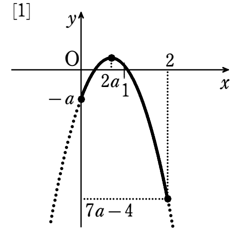
グラフは [図] の実線部分のようになる。

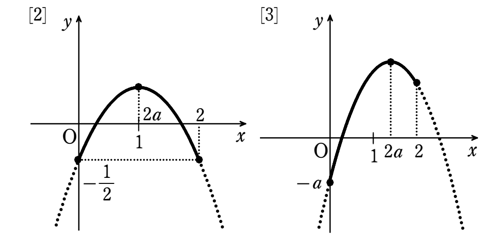
よって，$x=0$，2 で最小値 $-\dfrac{1}{2}$　をとる。

[3]　$2a>1$ すなわち $a>\dfrac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最小値 $-a$　をとる。





$\boxed{2}$

解答　(1)　$a<1$ のとき　$x=a+1$ で最小値 a^2-2a-2,
$1\leqq a\leqq 2$ のとき　$x=2$ で最小値 -3,
$2<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-4a+1

(2)　$a<\frac{3}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a+1,

$a=\frac{3}{2}$ のとき　$x=\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{11}{4}$,

$a>\frac{3}{2}$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a-2

解説

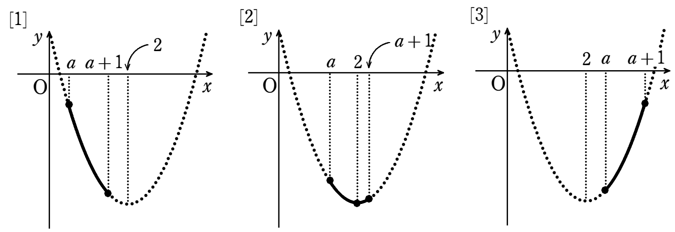
関数の式を変形すると　　$y=(x-2)^2-3$　$(a\leqq x\leqq a+1)$

また　　$x=a$ のとき　$y=a^2-4a+1$,　$x=a+1$ のとき　$y=a^2-2a-2$,
$x=2$ のとき　$y=-3$

(1)　[1]　$a+1<2$ すなわち $a<1$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。
よって　　$x=a+1$ で最小値 a^2-2a-2

[2]　$a\leqq 2\leqq a+1$ すなわち $1\leqq a\leqq 2$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。
よって　　$x=2$ で最小値 -3

[3]　$2<a$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。
よって　　$x=a$ で最小値 a^2-4a+1

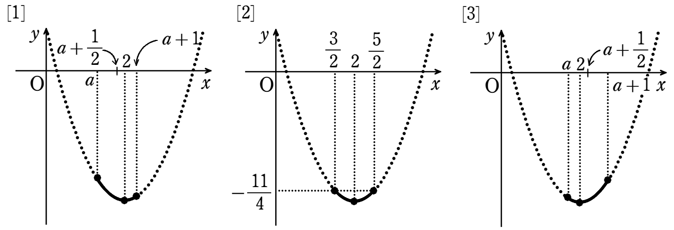


(2)　定義域の中央の値は $a+\frac{1}{2}$

[1]　$a+\frac{1}{2}<2$ すなわち $a<\frac{3}{2}$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。
よって　　$x=a$ で最大値 a^2-4a+1

[2]　$a+\frac{1}{2}=2$ すなわち $a=\frac{3}{2}$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。
よって　　$x=\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ で最大値 $-\frac{11}{4}$

[3]　$a+\frac{1}{2}>2$ すなわち $a>\frac{3}{2}$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。
よって　　$x=a+1$ で最大値 a^2-2a-2



$\boxed{3}$

解答　(1)　$a<-1$ のとき　$g(a)=a^2+3a-8$,　$-1\leqq a\leqq 3$ のとき　$g(a)=a-9$,
$3<a$ のとき　$g(a)=a^2-5a$
$a<1$ のとき　$G(a)=a^2-5a$,　$a=1$ のとき　$G(a)=-4$,
$a>1$ のとき　$G(a)=a^2+3a-8$

(2)　$g(a)$ の最小値は $a=-\frac{3}{2}$ のとき $-\frac{41}{4}$, $G(a)$ の最小値は $a=1$ のとき -4

解説

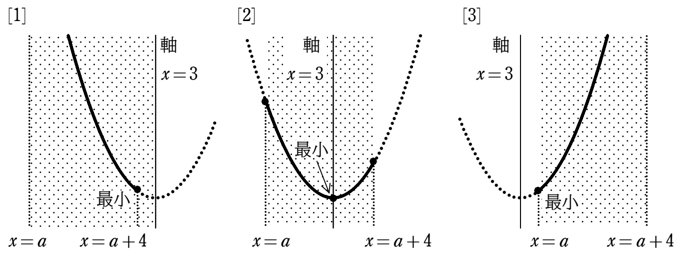
(1)　関数の式を変形すると　　$f(x)=x^2-6x+a=(x-3)^2+a-9$
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=3$ である。
また，$a\leqq x\leqq a+4$ の中央の値は　　$x=a+2$
$f(a)=a^2-6a+a=a^2-5a$,
$f(a+4)=(a+4-3)^2+a-9=a^2+3a-8$

最小値 $g(a)$ について

[1]　$a+4<3$　すなわち　$a<-1$ のとき　　$g(a)=f(a+4)=a^2+3a-8$

[2]　$a\leqq 3\leqq a+4$　すなわち　$-1\leqq a\leqq 3$ のとき　　$g(a)=f(3)=a-9$

[3]　$3<a$ のとき　　$g(a)=f(a)=a^2-5a$

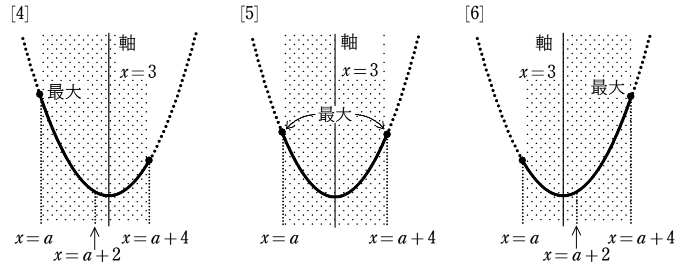


最大値 $G(a)$ について

[4]　$a+2<3$　すなわち　$a<1$ のとき　　$G(a)=f(a)=a^2-5a$

[5]　$3=a+2$　すなわち　$a=1$ のとき　　$G(a)=f(1)=f(5)=-4$

[6]　$a+2>3$　すなわち　$a>1$ のとき　　$G(a)=f(a+4)=a^2+3a-8$



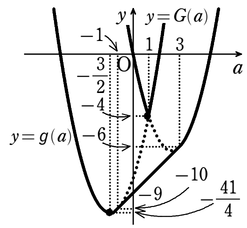
(2)　$f(a)=a^2-5a=\left(a-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$

$f(a+4)=a^2+3a-8=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{41}{4}$

$y=g(a)$, $y=G(a)$ のグラフをかくと，右の図のようになる。したがって，

$g(a)$ の最小値は　　$a=-\frac{3}{2}$ のとき　$-\frac{41}{4}$

$G(a)$ の最小値は　　$a=1$ のとき　-4



$\boxed{4}$

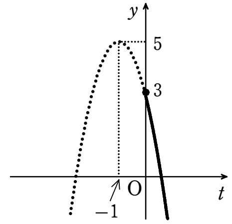
解答　(1)　$x=0$ のとき最大値 3，最小値はない
(2)　$x=\pm 1$ で最大値 5，最小値はない

解説

(1)　$t=x^2$ とおくと
$t\geqq 0$　……①

また　　$y=-2(x^2)^2-4x^2+3$
$=-2t^2-4t+3$
$=-2(t+1)^2+5$

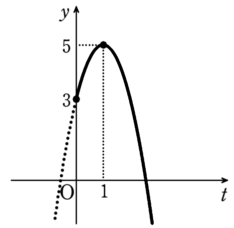
よって，① の範囲の t について，y は $t=0$
すなわち $x=0$ のとき最大値 3 をとる。
最小値はない。



(2)　$x^2=t$ とおくと，$x^2\geqq 0$ であるから，t の変域は　　$t\geqq 0$　……①

また　　$y=-2t^2+4t+3$
$=-2(t-1)^2+5$

① における t の関数 y のグラフは，右の図の実線部分である。
① の範囲で，y は
$t=1$ で最大値 5 をとり，最小値はない。
$t=1$ のとき　　$x^2=1$
これを解いて　　$x=\pm 1$
したがって，$x=\pm 1$ で最大値 5 をとり，最小値はない。



$\boxed{5}$

解答　(1)　$x=\frac{3}{4}$ で最大値 $\frac{71}{64}$，最小値はない

(2)　$x=3$ のとき最大値 3，$x=3\pm\sqrt{3}$ のとき最小値 -6

解説

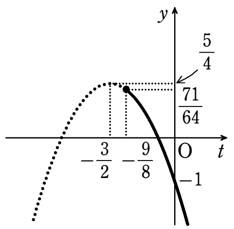
(1)　$2x^2-3x=t$ とおくと　　$t=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$

よって，t の変域は　　$t \geqq -\dfrac{9}{8}$　……①

また　　$y=-t^2-3t-1$

$=-\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

① における t の関数 y のグラフは，右の図の実線部分である。



① の範囲で，y は

$t=-\dfrac{9}{8}$ で最大値 $\dfrac{71}{64}$ をとり，最小値はない。

$t=-\dfrac{9}{8}$ のとき　　$-\dfrac{9}{8}=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$

すなわち　$\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2=0$　　よって　　$x=\dfrac{3}{4}$

したがって，$x=\dfrac{3}{4}$ で最大値 $\dfrac{71}{64}$ をとり，最小値はない。

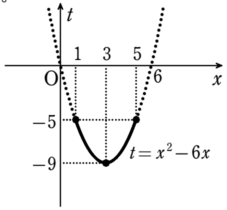
(2)　$x^2-6x=t$ とおくと　　$t=(x-3)^2-9$

$1 \leqq x \leqq 5$ であるから　　$-9 \leqq t \leqq -5$　……①

y を t の式で表すと

$y=t^2+12t+30$

$=(t+6)^2-6$



① の範囲において，y は $t=-9$ で最大値 3，

$t=-6$ で最小値 -6 をとる。

$t=-9$ のとき　　$(x-3)^2-9=-9$

ゆえに　　$(x-3)^2=0$

よって　　$x=3$

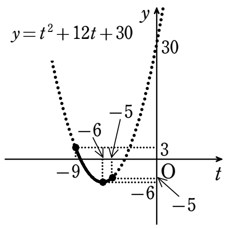
$t=-6$ のとき　　$(x-3)^2-9=-6$

ゆえに　　$(x-3)^2=3$

よって　　$x=3\pm\sqrt{3}$

以上から　　$x=3$ のとき最大値 3，

$x=3\pm\sqrt{3}$ のとき最小値 -6



$\boxed{1}$

解答　(1)　$1<a<2$ のとき　$x=a$ で最大値 $-2a^2+8a+1$，

$2 \leqq a$ のとき　$x=2$ で最大値 9

(2)　$1<a<3$ のとき　$x=1$ で最小値 7，

$a=3$ のとき　$x=1$，3 で最小値 7，

$a>3$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^2+8a+1$

解説

関数の式を変形すると　　$y=-2(x-2)^2+9$　$(1 \leqq x \leqq a)$

また　　$x=1$ のとき　$y=7$，　$x=a$ のとき　$y=-2a^2+8a+1$，

$x=2$ のとき　$y=9$

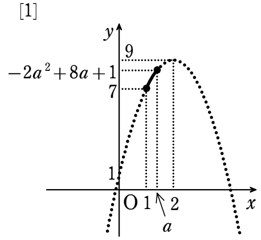
(1)　[1]　$1<a<2$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=a$ で最大値 $-2a^2+8a+1$

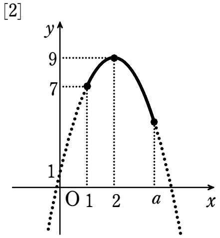
[2]　$2 \leqq a$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=2$ で最大値 9

[1]



[2]



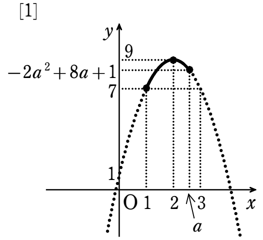
(2)　[1]　$1<a<3$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=1$ で最小値 7

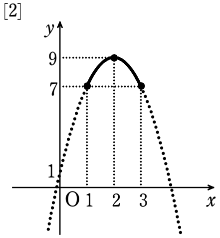
[2]　$a=3$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって　　$x=1$，3 で最小値 7

[1]



[2]

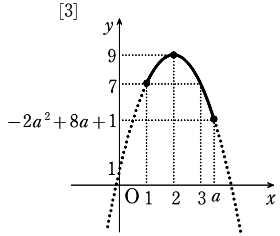


[3]　$a>3$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって

$x=a$ で最小値 $-2a^2+8a+1$

[3]



$\boxed{2}$

解答　(1)　$a<-2$ のとき　$M=a^2-a-1$，　$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき　$M=\dfrac{5}{4}a^2$，

$0<a$ のとき　$M=a^2$　　(2)　$a=-2$，$\sqrt{5}$

解説

(1)　関数の式を変形すると　　$y=-\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}a^2$　$(0 \leqq x \leqq 1)$

また　　$x=0$ のとき　$y=a^2$，　$x=1$ のとき　$y=a^2-a-1$，

$x=-\dfrac{a}{2}$ のとき　$y=\dfrac{5}{4}a^2$

[1]　$-\dfrac{a}{2}<0$ すなわち $0<a$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって，y は $x=0$ で最大となるから　　$M=a^2$

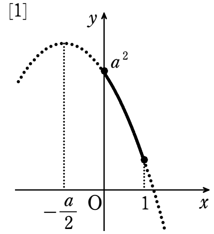
[2]　$0 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq 1$ すなわち $-2 \leqq a \leqq 0$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって，y は $x=-\dfrac{a}{2}$ で最大となるから　　$M=\dfrac{5}{4}a^2$

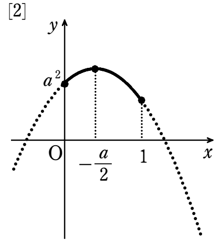
[3]　$1<-\dfrac{a}{2}$ すなわち $a<-2$ のとき，グラフは図の実線部分のようになる。

よって，y は $x=1$ で最大となるから　　$M=a^2-a-1$

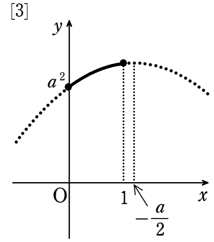
[1]



[2]



[3]



以上をまとめて

$a<-2$ のとき　$M=a^2-a-1$，　$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき　$M=\dfrac{5}{4}a^2$，

$0<a$ のとき　$M=a^2$

(2)　(1) の結果を利用する。

[1]　$a<-2$ のとき，$M=5$ から　　$a^2-a-1=5$　　よって　　$a^2-a-6=0$

左辺を因数分解して　　$(a+2)(a-3)=0$　　ゆえに　　$a=-2$，3

これらは $a<-2$ を満たさない。

[2]　$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき，$M=5$ から　　$\dfrac{5}{4}a^2=5$　　よって　　$a^2=4$

　これを解いて　$a=\pm 2$　　$-2\leqq a\leqq 0$ を満たすのは　$a=-2$

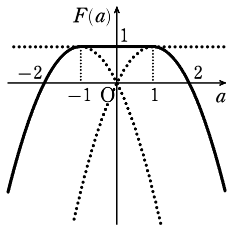
[3]　$0<a$ のとき，$M=5$ から　$a^2=5$

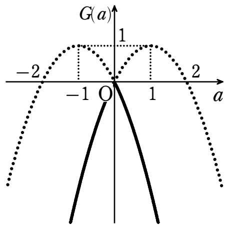
　これを解いて　$a=\pm\sqrt{5}$　　$a>0$ を満たすのは　$a=\sqrt{5}$

[1]～[3] から，求める a の値は　$a=-2,\ \sqrt{5}$

$\boxed{3}$

解答　［図］





解説

$$f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$$

ゆえに，2 次関数 $f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=1$ である。

$a\leqq x\leqq a+2$ の中央は　$x=a+1$

また　$f(a)=-a^2+2a$

$f(a+2)=-(a+1)^2+1=-a^2-2a$

$F(a)$ について

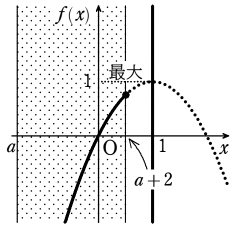
[1]　$a+2<1$ すなわち　$a<-1$ のとき

$x=a+2$ で最大値をとるから

$F(a)=f(a+2)$

$=-a^2-2a$

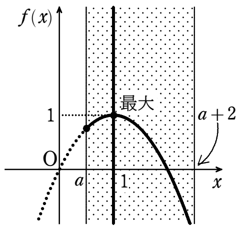
よって　$F(a)=-(a+1)^2+1$



[2]　$a\leqq 1\leqq a+2$ すなわち　$-1\leqq a\leqq 1$ のとき

$x=1$ で最大値をとるから

$F(a)=f(1)=1$



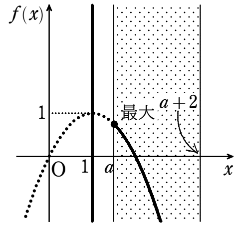
[3]　$a>1$ のとき

$x=a$ で最大値をとるから

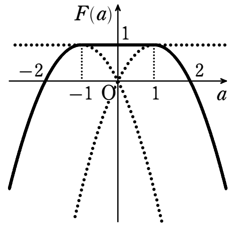
$F(a)=f(a)$

$=-a^2+2a$

よって　$F(a)=-(a-1)^2+1$



[1]～[3] から，a の関数 $F(a)$ のグラフは右の図の実線部分である。



$G(a)$ について

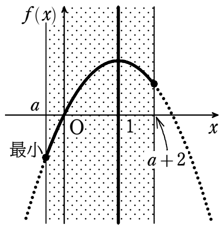
[4]　$a+1<1$ すなわち　$a<0$ のとき

$x=a$ で最小値をとるから

$G(a)=f(a)$

$=-a^2+2a$

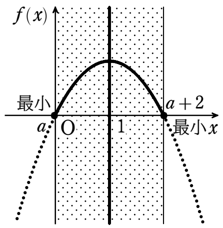
よって　$G(a)=-(a-1)^2+1$



[5]　$a+1=1$ すなわち　$a=0$ のとき

$x=0,\ 2$ で最小値をとるから

$G(a)=f(0)=f(2)=0$



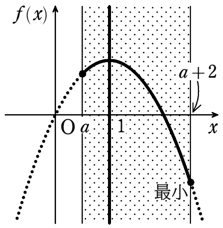
[6]　$1<a+1$ すなわち　$a>0$ のとき

$x=a+2$ で最小値をとるから

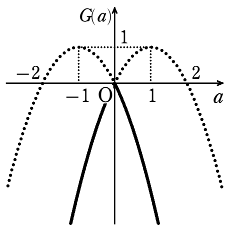
$G(a)=f(a+2)$

$=-a^2-2a$

よって　$G(a)=-(a+1)^2+1$



[4]～[6] から，a の関数 $G(a)$ のグラフは右の図の実線部分である。



$\boxed{4}$

解答　$m=4a^2+4a$，$a=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 -1

解説

$y=-x^2+4ax+4a$ を変形すると　$y=-(x-2a)^2+4a^2+4a$

よって，y は $x=2a$ で最大値 $4a^2+4a$ をとるから　$m=4a^2+4a$

これを変形すると　$m=4\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2-1$

したがって，m は $a=-\dfrac{1}{2}$ で最小値 -1 をとる。

$\boxed{5}$

解答　$a=10-2\sqrt{5}$，$4+2\sqrt{5}$

解説

$y=x^2-ax=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}$

よって，$y=x^2-ax$ のグラフは下に凸である放物線で，軸は直線 $x=\dfrac{a}{2}$，頂点の座標は

$\left(\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}\right)$ である。

$f(x)=x^2-ax$ とする。

[1] $\dfrac{a}{2}<2$ すなわち $a<4$ のとき

最大値は　$f(5)=5^2-5a=-5a+25$

最小値は　$f(2)=2^2-2a=-2a+4$

よって　　$d=-5a+25-(-2a+4)=-3a+21$

$-3a+21=5$ とすると　　$a=\dfrac{16}{3}$

これは $a<4$ を満たさない。

[2] $2\leqq\dfrac{a}{2}\leqq\dfrac{7}{2}$ すなわち $4\leqq a\leqq 7$ のとき

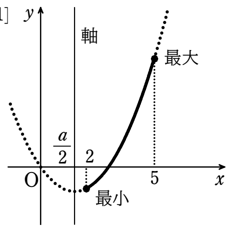
最大値は　$f(5)=-5a+25$，　最小値は　$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}$

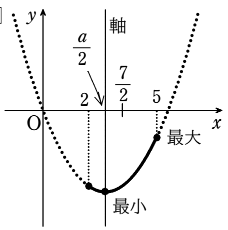
よって　　$d=-5a+25-\left(-\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{a^2}{4}-5a+25$

$\dfrac{a^2}{4}-5a+25=5$ とすると　　$a^2-20a+80=0$

これを解くと　　$a=10\pm2\sqrt{5}$

$4\leqq a\leqq 7$ を満たすのは　　$a=10-2\sqrt{5}$

[1]


[2]


[3] $\dfrac{7}{2}<\dfrac{a}{2}\leqq 5$ すなわち $7<a\leqq 10$ のとき

最大値は　$f(2)=-2a+4$，最小値は　$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}$

よって　　$d=-2a+4-\left(-\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{a^2}{4}-2a+4$

$\dfrac{a^2}{4}-2a+4=5$ とすると　　$a^2-8a-4=0$

これを解くと　　$a=4\pm2\sqrt{5}$

$7<a\leqq 10$ を満たすのは　　$a=4+2\sqrt{5}$

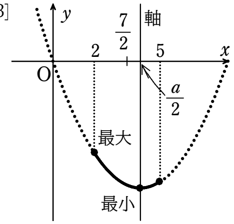
[4] $\dfrac{a}{2}>5$ すなわち $a>10$ のとき

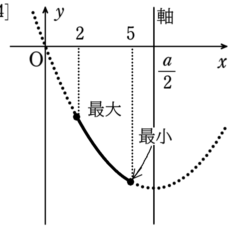
最大値は　$f(2)=-2a+4$，最小値は　$f(5)=-5a+25$

よって　　$d=-2a+4-(-5a+25)=3a-21$

$3a-21=5$ とすると　　$a=\dfrac{26}{3}$

これは $a>10$ を満たさない。

[3]


[4]


[1]～[4] から，求める a の値は　　$a=10-2\sqrt{5}$，$4+2\sqrt{5}$

$\boxed{1}$

解答　$a<-4$ のとき $\dfrac{a^2}{4}+4$，$a\geqq-4$ のとき $-2a$

解説

$x\geqq2$ のとき　　$f(x)=x^2-a(x-2)+\dfrac{a^2}{4}=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+2a$

したがって，頂点は　点 $\left(\dfrac{a}{2},\ 2a\right)$

$x<2$ のとき　　$f(x)=x^2+a(x-2)+\dfrac{a^2}{4}=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-2a$

したがって，頂点は　点 $\left(-\dfrac{a}{2},\ -2a\right)$

[1] $\dfrac{a}{2}\geqq2$ すなわち $a\geqq4$ のとき

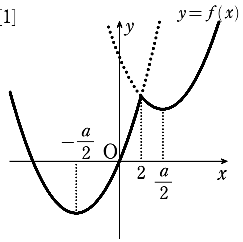
図 [1] から，$x=-\dfrac{a}{2}$ で最小値 $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ をとる。

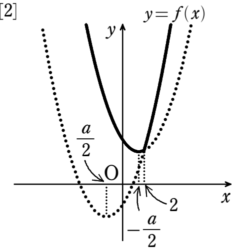
[2] $\dfrac{a}{2}<2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq2$ すなわち $-4\leqq a<4$ のとき

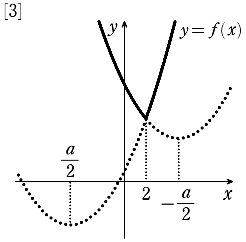
図 [2] から，$x=-\dfrac{a}{2}$ で最小値 $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ をとる。

[3] $-\dfrac{a}{2}>2$ すなわち $a<-4$ のとき

図 [3] から，$x=2$ で最小値 $f(2)=\dfrac{a^2}{4}+4$ をとる。

[1]


[2]


[3]


[1]～[3] から　　$a<-4$ のとき　最小値 $\dfrac{a^2}{4}+4$

$a\geqq-4$ のとき　最小値 $-2a$

$\boxed{2}$

解答　$a=-\dfrac{14}{3}$，$b=1$

解説

$$y=x^2+ax+b=\left\{x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{a}{2}\right)^2+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$$

よって，グラフは頂点が点 $\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}+b\right)$，軸が直線 $x=-\dfrac{a}{2}$ で，下に凸の放物線である。

ここで，$f(x)=x^2+ax+b$ とおく。

また，定義域 $0\leqq x\leqq 3$ の中央は $\frac{3}{2}$，

定義域 $0\leqq x\leqq 6$ の中央は 3 である。

[1] $-\frac{a}{2}\leqq\frac{3}{2}$ すなわち $a\geqq -3$ のとき

$0\leqq x\leqq 3$ の範囲では，$x=3$ で最大値をとるから

$f(3)=9+3a+b=1$

すなわち　$3a+b=-8$ ……①

$0\leqq x\leqq 6$ の範囲では，$x=6$ で最大値をとるから

$f(6)=36+6a+b=9$

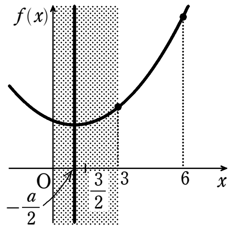
すなわち　$6a+b=-27$ ……②

②−① から　$3a=-19$

よって　$a=-\frac{19}{3}$

これは，$a\geqq -3$ を満たさない。

[1]



[2] $\frac{3}{2}<-\frac{a}{2}<3$ すなわち $-6<a<-3$ のとき

$0\leqq x\leqq 3$ の範囲では，$x=0$ で最大値をとるから

$f(0)=b=1$ ……③

$0\leqq x\leqq 6$ の範囲では，$x=6$ で最大値をとるから

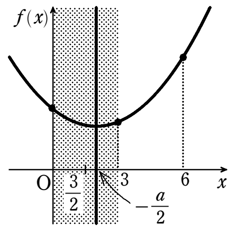
$f(6)=36+6a+b=9$ ……④

③を④に代入して　$6a=-28$

よって　$a=-\frac{14}{3}$

これは，$-6<a<-3$ を満たす。

[2]

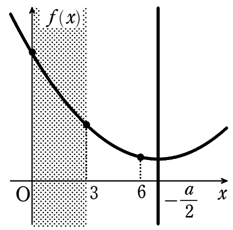


[3] $3\leqq-\frac{a}{2}$ すなわち $a\leqq -6$ のとき

$0\leqq x\leqq 3$ の範囲では，$x=0$ で最大値をとる。

また，$0\leqq x\leqq 6$ の範囲でも，$x=0$ で最大値をとり，条件を満たさない。

[3]



[1]～[3] から　$a=-\frac{14}{3}$，$b=1$

$\boxed{3}$

解答 (1) $x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$ のとき最大値 $\frac{29}{4}$，$x=2$ のとき最小値 1

(2) $x=0$ のとき最大値 10；$x=1$，3 のとき最小値 1

解説

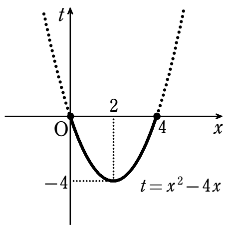
(1) $x^2-4x=t$ とおくと　$t=(x-2)^2-4$

$0\leqq x\leqq 4$ であるから，t の変域は　$-4\leqq t\leqq 0$ ……①

また　$y=\{(x^2-4x)+3\}\{-(x^2-4x)+2\}-2(x^2-4x)-1$

$=(t+3)(-t+2)-2t-1=-t^2-3t+5$

$=-\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$



したがって，① の範囲において，y は

$t=-\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{29}{4}$，$t=-4$ で最小値 1 をとる。

$t=-\frac{3}{2}$ のとき　$x^2-4x=-\frac{3}{2}$

よって　$2x^2-8x+3=0$

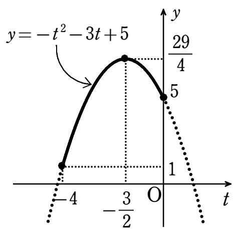
これを解いて　$x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$

$t=-4$ のとき　$x^2-4x=-4$

よって　$(x-2)^2=0$　ゆえに　$x=2$

よって　$x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}$ のとき最大値 $\frac{29}{4}$，

$x=2$ のとき最小値 1



(2) $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ であるから，関数 $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 3$ における値域は

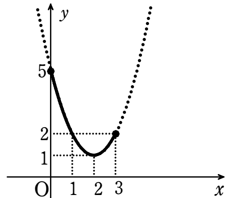
$1\leqq f(x)\leqq 5$

また　$f(f(x))=\{f(x)\}^2-4f(x)+5$

$=\{f(x)-2\}^2+1$

よって，$1\leqq f(x)\leqq 5$ の範囲において，$f(f(x))$ は，$f(x)=5$ で最大値 10，$f(x)=2$ で最小値 1 をとる。

$y=f(x)$ のグラフ



$f(x)=5$ のとき　$x^2-4x+5=5$

ゆえに　$x^2-4x=0$

これを解いて　$x=0$，4

$0\leqq x\leqq 3$ を満たすものは　$x=0$

$f(x)=2$ のとき　$x^2-4x+5=2$

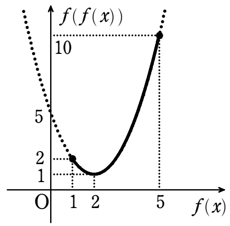
よって　$x^2-4x+3=0$

これを解いて　$x=1$，3

$x=1$，3 はともに $0\leqq x\leqq 3$ を満たす。

ゆえに　$x=0$ のとき最大値 10；

$x=1$，3 のとき最小値 1



$\boxed{4}$

解答 (1) $p\geqq\frac{1}{3}$ のとき $m=-3p+2$，$p<\frac{1}{3}$ のとき $m=-9p^2+3p+1$

(2) $p=\frac{1}{6}$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$

解説

(1) $t=x^2-2x$ とおくと　$t=(x-1)^2-1$

t のとりうる値の範囲は　$t\geqq -1$

また　$y=(x^2-2x)^2+6p(x^2-2x)+3p+1$

$=t^2+6pt+3p+1$

$=(t+3p)^2-9p^2+3p+1$

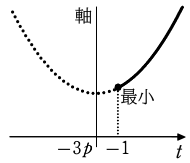
ゆえに，$y=t^2+6pt+3p+1$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-3p$ である。

[1] $-3p\leqq -1$ すなわち $p\geqq\frac{1}{3}$ のとき

y は $t=-1$ で最小値をとる。

よって　$m=(-1)^2+6p\cdot(-1)+3p+1$

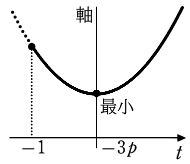
$=-3p+2$



[2] $-3p>-1$ すなわち $p<\frac{1}{3}$ のとき

y は $t=-3p$ で最小値をとる。

よって　$m=-9p^2+3p+1$

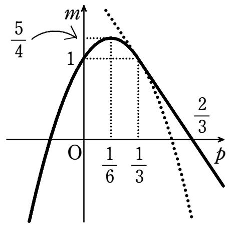


[1]，[2] から　$m=\begin{cases}-9p^2+3p+1 & \left(p<\frac{1}{3}\right)\\ -3p+2 & \left(p\geqq\frac{1}{3}\right)\end{cases}$

(2) $p<\frac{1}{3}$ のとき

$m=-9p^2+3p+1=-9\left(p-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5}{4}$

よって，p の関数 m のグラフは，右の図のようになるから，m は $p=\frac{1}{6}$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$ をとる。



$\boxed{1}$

解答　(1)　$k \geqq -\dfrac{5}{8}$　　(2)　$k=\dfrac{16}{3}$，$x=-\dfrac{4}{3}$

解説

２次方程式の判別式を D とする。

(1)　２次方程式が実数解をもつための条件は　　$D \geqq 0$

よって　　$D=(2k-1)^2-4\cdot1\cdot(k^2-3k-1)=8k+5 \geqq 0$

ゆえに　　$k \geqq -\dfrac{5}{8}$

(2)　２次方程式が重解をもつための条件は　　$D=0$

よって　　$\dfrac{D}{4}=4^2-3\cdot k=16-3k=0$　　　ゆえに　　$k=\dfrac{16}{3}$

また，重解は　　$x=-\dfrac{8}{2\cdot3}=-\dfrac{4}{3}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$(3-\sqrt{13}，0)$，$(3+\sqrt{13}，0)$　　(2)　$\left(\dfrac{1}{2}，0\right)$

解説

(1)　２次方程式 $x^2-6x-4=0$ の解は

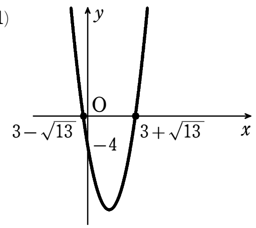
$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{52}}{2}=3\pm\sqrt{13}$$

よって，共有点の座標は

$(3-\sqrt{13}，0)$，$(3+\sqrt{13}，0)$

(1)



(2)　２次方程式 $-4x^2+4x-1=0$

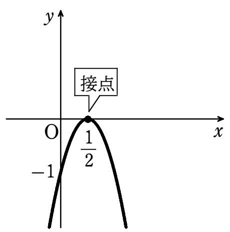
すなわち，$4x^2-4x+1=0$ の解は

左辺を因数分解して　　$(2x-1)^2=0$

ゆえに　　$2x-1=0$　　よって　　$x=\dfrac{1}{2}$

共有点の座標は　　$\left(\dfrac{1}{2}，0\right)$

(2)



$\boxed{3}$

解答　(1)　$k>3$　　(2)　$k=3$，接点の座標は $(3，0)$

解説

この２次関数の係数について

$D=(-2k)^2-4\cdot1\cdot(k^2-k+3)=4k-12=4(k-3)$　　とする。

(1)　グラフが x 軸と異なる２点で交わるための条件は　　$D>0$

よって　　$4(k-3)>0$　　　したがって　　$k>3$

(2)　グラフが x 軸と接するための条件は　　$D=0$

よって　　$4(k-3)=0$　　　したがって　　$k=3$

このとき，接点の x 座標は　　$x=-\dfrac{-2k}{2\cdot1}=k=3$

ゆえに，接点の座標は　　$(3，0)$

$\boxed{4}$

解答　$k<\dfrac{5}{2}$ のとき２個，$k=\dfrac{5}{2}$ のとき１個，$k>\dfrac{5}{2}$ のとき０個

解説

２次関数 $y=x^2-2x+2k-4$ について

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(2k-4)=-2k+5$

とすると，放物線 $y=x^2-2x+2k-4$ と x 軸の共有点の個数は

$D>0$　すなわち　$k<\dfrac{5}{2}$ のとき　２個

$D=0$　すなわち　$k=\dfrac{5}{2}$ のとき　１個

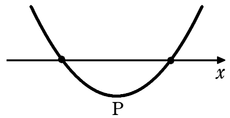
$D<0$　すなわち　$k>\dfrac{5}{2}$ のとき　０個

別解　$y=(x-1)^2+2k-5$ であるから，この放物線は下に凸で

頂点Ｐの y 座標は $2k-5$ である。

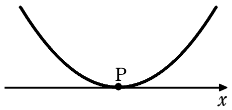
Ｐが x 軸の下側にあるとき，共有点の個数は２個である。

よって　$2k-5<0$　すなわち　$k<\dfrac{5}{2}$ のとき　２個



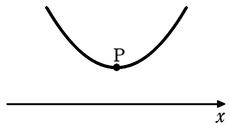
Ｐが x 軸上にあるとき，共有点の個数は１個である。

よって　$2k-5=0$　すなわち　$k=\dfrac{5}{2}$ のとき　１個



Ｐが x 軸の上側にあるとき，共有点の個数は０個である。

よって　$2k-5>0$　すなわち　$k>\dfrac{5}{2}$ のとき　０個



$\boxed{5}$

解答　(1)　$(-1，1)$，$(2，4)$　　(2)　$(2，0)$　　(3)　共有点はない

解説

(1)　$y=x^2$　……①，　$y=x+2$　……②

①，②から y を消去すると　　$x^2=x+2$　すなわち　$x^2-x-2=0$

よって　　$(x+1)(x-2)=0$　　　ゆえに　$x=-1，2$

②から　　$x=-1$ のとき $y=1$，　$x=2$ のとき $y=4$

したがって，共有点の座標は　　$(-1，1)$，$(2，4)$

(2)　$y=x^2-2x$　……①，　$y=2x-4$　……②

①，②から y を消去すると　　$x^2-2x=2x-4$　すなわち　$x^2-4x+4=0$

よって　　$(x-2)^2=0$　　　ゆえに　$x=2$　　　このとき，②から　$y=0$

したがって，共有点の座標は　　$(2，0)$

(3)　$y=x^2+2x-1$　……①，　$y=x-2$　……②

①，②から y を消去すると　　$x^2+2x-1=x-2$　すなわち　$x^2+x+1=0$

この２次方程式について，判別式を D とすると　　$D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

したがって，共有点はない。

$\boxed{6}$

解答　(1)　$a=4$　　(2)　$a>7$

解説

(1)　$y=x^2-2x+a$ ……①，$y=2x$ ……②とおく。

①，②から y を消去すると　　$x^2-2x+a=2x$

整理すると　　$x^2-4x+a=0$　……③

③について，判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot a=4-a$

放物線①と直線②が接するための条件は，２次方程式③が重解をもつことであるから　　$D=0$　　すなわち　　$a=4$

(2)　$y=x^2-2x+a$ ……①，$y=2x+3$ ……②とおく。

①，②から y を消去すると　　$x^2-2x+a=2x+3$

整理すると　　$x^2-4x+a-3=0$　……③

③について，判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(a-3)=-a+7$

放物線①と直線②が共有点をもたないための条件は，２次方程式③が実数解をもたないことであるから

$D<0$　　すなわち　　$a>7$

1

解答　(1)　$m<\frac{25}{4}$　　(2)　$m>\frac{17}{8}$　　(3)　$m\leqq 2$

解説

(1)　この２次方程式の判別式を D とすると

$$D=5^2-4\cdot 1\cdot m=-4m+25$$

２次方程式が異なる２つの実数解をもつのは $D>0$ のときであるから

$$-4m+25>0$$

これを解いて　$m<\frac{25}{4}$

(2)　この２次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot (m-1)=-8m+17$$

２次方程式が実数解をもたないのは $D<0$ のときであるから

$$-8m+17<0$$

これを解いて　$m>\frac{17}{8}$

(3)　この２次方程式の判別式を D とすると

$$D=6^2-4\cdot 3\cdot (2m-1)=-24m+48$$

２次方程式が実数解をもつのは $D\geqq 0$ のときであるから

$$-24m+48\geqq 0$$

これを解いて　$m\leqq 2$

2

解答　(1)　$\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$，$\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$　　(2)　$(1,\ 0)$

解説

(1)　共有点の x 座標は，２次方程式 $x^2+3x-2=0$ の実数解である。

これを解くと　$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

よって，共有点の座標は　$\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$，$\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$

(2)　共有点の x 座標は，２次方程式 $-x^2+2x-1=0$ の実数解である。

両辺に -1 を掛けて　$x^2-2x+1=0$

これを解くと　$x=1$

よって，共有点の座標は　$(1,\ 0)$

3

解答　(1)　$k>2$　　(2)　$k=2$，接点の座標は $(-1,\ 0)$

解説

この２次関数の係数について

$D=\{2(k-1)\}^2-4\cdot 1\cdot (k^2-3)=-8k+16=-8(k-2)$　　とする。

(1)　グラフが x 軸と共有点をもたないための条件は　$D<0$

よって　$-8(k-2)<0$　　したがって　$k>2$

(2)　グラフが x 軸と接するための条件は　$D=0$

よって　$-8(k-2)=0$　　したがって　$k=2$

このとき，接点の x 座標は　$x=-\frac{2(k-1)}{2\cdot 1}=-k+1=-1$

ゆえに，接点の座標は　$(-1,\ 0)$

4

解答　$k<2$ のとき２個，$k=2$ のとき１個，$k>2$ のとき０個

解説

$y=2x^2-4x+2k-2$ の係数について

$$D=(-4)^2-4\cdot 2\cdot (2k-2)=16-8(2k-2)=16(2-k)$$

とする。この符号を調べると

$D>0$ となるのは，$2-k>0$　すなわち　$k<2$ のとき。

$D=0$ となるのは，$2-k=0$　すなわち　$k=2$ のとき。

$D<0$ となるのは，$2-k<0$　すなわち　$k>2$ のとき。

よって，この２次関数のグラフと x 軸の共有点の個数は

$k<2$ のとき　２個，　$k=2$ のとき　１個，　$k>2$ のとき　０個

5

解答　(1)　$(-3,\ 9)$，$(2,\ 4)$　　(2)　$(-4,\ 1)$　　(3)　共有点はない

解説

(1)　$y=x^2$　……①，　$y=-x+6$　……②

①，② から y を消去すると　$x^2=-x+6$　すなわち　$x^2+x-6=0$

よって　$(x+3)(x-2)=0$　　ゆえに　$x=-3,\ 2$

② から　$x=-3$ のとき $y=9$，　$x=2$ のとき $y=4$

したがって，共有点の座標は　$(-3,\ 9)$，$(2,\ 4)$

(2)　$y=x^2+6x+9$　……①，　$y=-2x-7$　……②

①，② から y を消去すると　$x^2+6x+9=-2x-7$　すなわち　$x^2+8x+16=0$

よって　$(x+4)^2=0$　　ゆえに　$x=-4$　　このとき，② から　$y=1$

したがって，共有点の座標は　$(-4,\ 1)$

(3)　$y=x^2+2$　……①，　$y=2x-6$　……②

①，② から y を消去すると　$x^2+2=2x-6$　すなわち　$x^2-2x+8=0$

この２次方程式について，判別式を D とすると　$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 8=-28<0$

したがって，共有点はない。

6

解答　(1)　$m=4$　　(2)　$m<\frac{61}{4}$

解説

(1)　$y=x^2-3x+m$　……①，　$y=x$　……②

①，② から y を消去すると　$x^2-3x+m=x$

よって　$x^2-4x+m=0$

この２次方程式の判別式を D とすると，放物線 ① が直線 ② と接するための必要十分条件は　$D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot m=0$　すなわち　$16-4m=0$

これを解いて　$m=4$

(2)　$y=x^2-3x+m$　……①，　$y=4x+3$　……②

①，② から y を消去すると　$x^2-3x+m=4x+3$

よって　$x^2-7x+m-3=0$

この２次方程式の判別式を D とすると，放物線 ① と直線 ② が異なる２点で交わるための必要十分条件は

$$D=(-7)^2-4\cdot 1\cdot (m-3)>0$$　これを解いて　$m<\frac{61}{4}$

1

解答　(1)　$-7\leqq m<2,\ 2<m$　　(2)　$m=-2,\ -1,\ 3$

解説

２次方程式の判別式を D とする。

(1)　２次方程式であるから　$m-2\neq 0$　　よって　$m\neq 2$

２次方程式が実数解をもつための条件は $D\geqq 0$ であるから

$$\frac{D}{4}=\{-(m+1)\}^2-(m-2)(m+3)=m+7\geqq 0$$

ゆえに　$m\geqq -7$　　よって　$-7\leqq m<2,\ 2<m$

(2)　$m+1=0$ すなわち $m=-1$ のとき　$-4x-7=0$

よって，ただ１つの実数解 $x=-\frac{7}{4}$ をもつ。

$m\neq -1$ のとき

２次方程式がただ１つの実数解をもつための条件は $D=0$ であるから

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m+1)(2m-5)=-m^2+m+6=0$$

ゆえに　$(m+2)(m-3)=0$　　これを解いて　$m=-2,\ 3$

これらは $m\neq -1$ を満たす。

以上から，ただ１つの実数解をもつとき　$m=-2,\ -1,\ 3$

2

解答　(ア)　$\frac{5}{4}$　　(イ)　$\frac{3}{2}$

解説

判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=(1-2k)^2-1\cdot (k+1)=4k^2-5k=k(4k-5)$

方程式が重解をもつから　$D=0$　　よって　$k(4k-5)=0$

ゆえに　$k=0,\ \frac{5}{4}$

このとき，重解は　$x=-\frac{2-4k}{2\cdot 1}=2k-1$

$k=0,\ \frac{5}{4}$ のうち $2k-1>0$ を満たすものは　$k={}^{ア}\frac{5}{4}$

このとき，重解は　$2\cdot\frac{5}{4}-1={}^{イ}\frac{3}{2}$

3

解答　(1)　$\frac{\sqrt{33}}{2}$　　(2)　$k=6,\ -2$

解説

(1)　$-2x^2-3x+3=0$ とすると　$2x^2+3x-3=0$

ゆえに　$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot (-3)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$

よって，放物線が x 軸から切り取る線分の長さは

$$\frac{-3+\sqrt{33}}{4}-\frac{-3-\sqrt{33}}{4}=\frac{\sqrt{33}}{2}$$

(2)　$x^2-(k+2)x+2k=0$ とすると　$(x-2)(x-k)=0$　　よって　$x=2,\ k$

ゆえに，放物線が x 軸から切り取る線分の長さは　$|k-2|$

よって　$|k-2|=4$　　すなわち　$k-2=\pm 4$　　したがって　$k=6,\ -2$

4

解答　$a=-2$，$b=4$

解説

$y=x^2+ax+b$ ……①，　$y=2x$ ……②，　$y=-4x+3$ ……③　とする。

①，② から y を消去すると　$x^2+ax+b=2x$

よって　$x^2+(a-2)x+b=0$

① と ② が接するとき，この 2 次方程式の判別式が 0 になるから

$$(a-2)^2-4\cdot1\cdot b=0$$

ゆえに　$a^2-4a-4b+4=0$ ……④

①，③ から y を消去すると　$x^2+ax+b=-4x+3$

よって　$x^2+(a+4)x+b-3=0$

① と ③ が接するとき，この 2 次方程式の判別式が 0 になるから

$$(a+4)^2-4\cdot1\cdot(b-3)=0$$

ゆえに　$a^2+8a-4b+28=0$ ……⑤

④−⑤ から　$-12a-24=0$　これを解いて　$a=-2$

これを ④ に代入すると　$16-4b=0$　ゆえに　$b=4$

したがって　$a=-2$，$b=4$

5

解答　$a<1$，$1<a<\frac{4}{3}$ のとき 2 個；$a=1$，$\frac{4}{3}$ のとき 1 個；$a>\frac{4}{3}$ のとき 0 個

解説

$x^2-4=a(x+1)^2$ とおくと　$(a-1)x^2+2ax+a+4=0$ ……①

この方程式の実数解の個数が，求める共有点の個数である。

[1]　$a=1$ のとき

① は　$2x+5=0$　これを解いて　$x=-\frac{5}{2}$

よって，2 つのグラフの共有点は　1 個

[2]　$a\fallingdotseq1$ のとき

① について　$\frac{D}{4}=a^2-(a-1)(a+4)=-3a+4$

$D>0$ すなわち $a<\frac{4}{3}$ のとき

$a\fallingdotseq1$ であるから　$a<1$，$1<a<\frac{4}{3}$

このとき，2 つのグラフの共有点は　2 個

$D=0$ すなわち $a=\frac{4}{3}$ のとき

2 つのグラフの共有点は　1 個

$D<0$ すなわち $a>\frac{4}{3}$ のとき

2 つのグラフは共有点をもたない。

[1]，[2] から，2 つのグラフの共有点の個数は

$a<1$，$1<a<\frac{4}{3}$ のとき　2 個　　$a=1$，$\frac{4}{3}$ のとき　1 個　　$a>\frac{4}{3}$ のとき　0 個

1

解答　$k=-6$，共通解 $x=2$

解説

共通解を $x=\alpha$ とおいて，方程式にそれぞれ代入すると

$$2\alpha^2+k\alpha+4=0 \text{ ……①},\quad \alpha^2+\alpha+k=0 \text{ ……②}$$

①−②×2 から　$(k-2)\alpha+4-2k=0$　ゆえに　$(k-2)(\alpha-2)=0$

よって　$k=2$　または　$\alpha=2$

[1]　$k=2$ のとき

2 つの方程式はともに $x^2+x+2=0$ で，同じ方程式になる。

ところが，判別式を D とすると $D=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$ であるから，実数解をもたない。

[2]　$\alpha=2$ のとき

② から　$2^2+2+k=0$　よって　$k=-6$

このとき，2 つの方程式は $2x^2-6x+4=0$，$x^2+x-6=0$ となり，$x=2$ は共通解である。

以上から　$k=-6$，共通解は $x=2$

2

解答　(1)　$q\geqq-\frac{49}{16}$　(2)　$(2,\ -4)$ または $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$　(3)　$(-4,\ -1)$

解説

(1)　$y=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q$ であるから，放物線 $y=x^2+px+q$ の頂点は

点 $\left(-\frac{p}{2},\ -\frac{p^2}{4}+q\right)$

これが直線 $y=-\frac{1}{2}x-3$ 上にあるから　$-\frac{p^2}{4}+q=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{p}{2}\right)-3$

よって　$q=\frac{1}{4}p^2+\frac{1}{4}p-3$ ……①　すなわち　$q=\frac{1}{4}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{16}$

したがって　$q\geqq-\frac{49}{16}$

(2)　放物線 $y=x^2+px+q$ が原点 $(0,\ 0)$ を通過するとき　$q=0$

① に代入して整理すると　$p^2+p-12=0$

よって　$(p+4)(p-3)=0$　ゆえに　$p=-4,\ 3$

したがって，求める頂点の座標は　$(2,\ -4)$　または　$\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$

(3)　放物線は x 軸と異なる 2 点で交わるから，$x^2+px+q=0$ の判別式を D とすると

$$D=p^2-4q>0$$

$x^2+px+q=0$ を解くと　$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

放物線と x 軸の 2 つの交点間の距離が 2 であるから

$$\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}-\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}=2$$

よって　$\sqrt{p^2-4q}=2$　両辺を平方して　$p^2-4q=4$

ゆえに　$q=\frac{1}{4}p^2-1$ ……②

① に代入して整理すると　$p=8$　このとき，② から　$q=15$

$p=8$，$q=15$ は $p^2-4q>0$ を満たす。

したがって，求める頂点の座標は　$(-4,\ -1)$

別解　2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 2 つの解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-p$，　$\alpha\beta=q$ ……①

放物線と x 軸の 2 つの交点間の距離を l とすると　$l=\beta-\alpha$

$l=2$ のとき　$\beta-\alpha=2$　両辺を平方して　$(\beta-\alpha)^2=2^2$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ であるから，① より

$(-p)^2-4q=4$　すなわち　$p^2-4q=4$　(以後，上と同じ)