高 3 物理総合 S～前期第 1 回～ ＜解答＞◆円運動と万有引力◆

【２】

（１）イ：小物体 A はひもの張力 T を向心力として，半径 r ，速さ V の等速円運動をするから $T=\dfrac{mV^2}{r}$

ロ：$\Delta E=T\Delta r=\dfrac{mV^2}{r}\Delta r$ ，$E=\dfrac{1}{2}mV^2$ より，$\dfrac{\Delta E}{E}=\dfrac{\dfrac{mV^2}{r}\Delta r}{\dfrac{1}{2}mV^2}=\dfrac{2\Delta r}{r}$

ハ：$\Delta E=\dfrac{1}{2}m(V+\Delta V)^2-\dfrac{1}{2}mV^2=\dfrac{1}{2}mV^2\left(1+\dfrac{\Delta V}{V}\right)^2-\dfrac{1}{2}mV^2$

$$=\frac{1}{2}mV^2\cdot\left\{1+\frac{2\Delta V}{V}+\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2-1\right\}$$

$\dfrac{\Delta V}{V}$ に比べて$\left(\dfrac{\Delta V}{V}\right)^2$ は小さいので無視すると，$\Delta E=\dfrac{1}{2}mV^2\cdot\dfrac{2\Delta V}{V}=mV\times\Delta V$

ニ：$\Delta E=\dfrac{mV^2}{r}\Delta r=mV\Delta V$　　$\therefore\Delta V=\dfrac{V}{r}\times\Delta r$

ホ：$\Delta\omega=(\omega+\Delta\omega)-\omega=\dfrac{V+\Delta V}{r-\Delta r}-\dfrac{V}{r}=\dfrac{V}{r}\left(\dfrac{1+\dfrac{\Delta V}{V}}{1-\dfrac{\Delta r}{r}}-1\right)\fallingdotseq\dfrac{V}{r}\left\{\left(1+\dfrac{\Delta V}{V}\right)\left(1+\dfrac{\Delta r}{r}\right)-1\right\}$

$$\fallingdotseq\frac{V}{r}\left(1+\frac{\Delta V}{V}+\frac{\Delta r}{r}-1\right)=\frac{V}{r}\left(\frac{\Delta V}{V}+\frac{\Delta r}{r}\right)$$

ニより，$\dfrac{\Delta V}{V}=\dfrac{\Delta r}{r}$ であるから　　$\Delta\omega=\dfrac{V}{r}\cdot\dfrac{2\Delta r}{r}=\dfrac{2V}{r^2}\Delta r$　　$\therefore\dfrac{\Delta\omega}{\Delta r}=\dfrac{2V}{r^2}$

へ：ロより$\dfrac{\Delta E}{E}=\dfrac{2\Delta r}{r}$　　また，ホより$\dfrac{\Delta\omega}{\Delta r}=\dfrac{2V}{r^2}$ ，$\omega=\dfrac{V}{r}$ であるから，$\dfrac{\Delta\omega}{\omega}=\dfrac{2\Delta r}{r}$

よって，$\dfrac{\Delta E}{E}=\dfrac{\Delta\omega}{\omega}$ となるから，$\dfrac{\omega+\Delta\omega}{E+\Delta E}=\dfrac{\omega}{E}\cdot\dfrac{1+\dfrac{\Delta\omega}{\omega}}{1+\dfrac{\Delta E}{E}}=\dfrac{\omega}{E}$

ト：へより，$\dfrac{\omega}{E}$ は一定である。よって②

（２）チ：おもり B に働く力のつりあいより $Mg=T$

イより $T=\dfrac{mV^2}{r}$ であるから $Mg=\dfrac{mV^2}{r}$　　$\therefore r=\dfrac{m}{Mg}\times V^2$

リ：おもり B をΔr だけ引き下げたとき，小物体 A の回転半径は $r-\Delta r$ ，円運動の速さは $V+\Delta V$ になる。おもりに働く上向きの力 F は，このときのひもの張力からおもり B の重力を差し引いたものに等しいから

$$F=\frac{m(V+\Delta V)^2}{r-\Delta r}-Mg=\frac{mV^2\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^2}{r\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right)}-Mg\fallingdotseq\frac{mV^2\left(1+2\frac{\Delta V}{V}\right)}{r\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right)}-Mg$$

$$\fallingdotseq\frac{mV^2}{r}\left(1+2\frac{\Delta V}{V}\right)\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)-Mg\fallingdotseq\frac{mV^2}{r}\left(1+2\frac{\Delta V}{V}+\frac{\Delta r}{r}\right)-Mg$$

チより$\frac{mV^2}{r}=Mg$，ニより$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta r}{r}$ であるから

$$F=Mg\left(1+3\frac{\Delta r}{r}-1\right)=\frac{3Mg}{r}\times\Delta r\qquad\therefore k=\frac{3Mg}{r}$$

ヌ：おもり B の加速度（鉛直下向きを正とする）をα とすると，B の運動方程式は

$M\alpha=-k\Delta r$　　したがって，B の振動数は$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$

【３】ア：$\frac{GMm}{R^3}r$　　イ：$2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$　　ウ：$\sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)}}$　　エ：$\sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$

オ：$\frac{|\mu-m|}{\mu+m}\sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$　　カ：$\frac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$　　キ：$\frac{GMm}{R^3}x$

ク：$\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$　　ケ：m　　コ：$(11+2\sqrt{33})m$

問 1　カの結果より，$h=0$ のとき衝突直後の質点 B の速さを V_0 とすると

$$V_0=\frac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

反対側の地表に達したときの質点 B の速さを V' とすると，ばね定数が $k'=\frac{GMm}{R^3}$の

単振動をするから，力学的エネルギー保存則より$\frac{1}{2}mV_0^2=\frac{1}{2}mV'^2+\frac{1}{2}k'R^2$

$$\therefore V'^2=V_0^2-\frac{GM}{R}=\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2\frac{GM}{R}-\frac{GM}{R}$$

質点 B が無限遠方まで飛び去るためには力学的エネルギーが 0 以上であればよいから

$$\frac{1}{2}mV'^2-G\frac{Mm}{R}\geqq 0\qquad\therefore V'^2\geqq\frac{2GM}{R}$$

よって$\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2\frac{GM}{R}-\frac{GM}{R}\geqq\frac{2GM}{R}$　　$\therefore\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2\geqq 3$

$\frac{\mu}{m}=\alpha$ とおくと$\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\right)^2\geqq 3$　　$\therefore\alpha^2-6\alpha-3\geqq 0$

$\alpha>0$ より$\alpha\geqq 3+2\sqrt{3}$

問 2　質点 B が地表から飛び出したときの速さを w とすると，

$$\frac{1}{2}mw^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{GMm}{R}\qquad\therefore w=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

質点Bが地球から最も離れたときの速さを w' ，そのときの中心Oからの距離を r' とすると，力学的エネルギー保存則より $\frac{1}{2}\cdot\frac{GMm}{R}-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mw'^2-\frac{GMm}{r'}$

$$\therefore -\frac{GM}{R}=w'^2-\frac{2GM}{r'}$$

地表を飛び出したとき $\theta=30°$ ，最も離れたとき $\theta=90°$ であるから，

面積速度一定より $\frac{1}{2}Rw\sin30°=\frac{1}{2}r'w'$ $\quad\therefore w'=\frac{R}{2r'}w$

よって $-\frac{GM}{R}=\frac{R^2}{4r'^2}\cdot\frac{GM}{R}-\frac{2GM}{r'}$ $\qquad 4r'^2-8Rr'+R^2=0$

$\therefore r'=\frac{1}{4}(4\pm\sqrt{12})R=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}R$ $\qquad r'>R$ より $r'=\frac{2+\sqrt{3}}{2}R$

＜解説＞

（1）ア：半径 r の球の質量は $\frac{r^3}{R^3}M$ であるから，質点に働く重力の大きさを f と

すると，$f=G\frac{\frac{r^3}{R^3}Mm}{r^2}=\frac{GMm}{R^3}r$

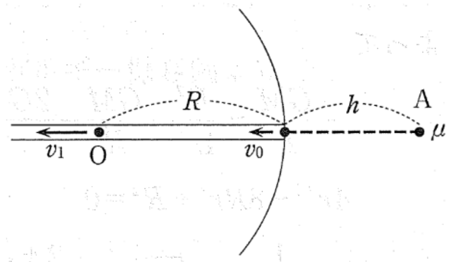
イ：中心Oを原点としトンネルに沿って図1の右向きに X 軸をとる。位置 X のときの

質点の加速度を a とすると，運動方程式より $ma=-\frac{GMm}{R^3}X$ $\qquad\therefore a=-\frac{GM}{R^3}X$

角振動数 $\omega=\sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ の単振動を表すから，周期 T は，$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$

（2）ウ：質点Aがトンネルに入る瞬間の速さを v_0 とすると，

力学的エネルギー保存則より



$$\frac{1}{2}\mu v_0^2-G\frac{M\mu}{R}=-G\frac{M\mu}{R+h}$$

$$v_0^2=2GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{2GMh}{R(R+h)}$$

$$\therefore v_0=\sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)}}$$

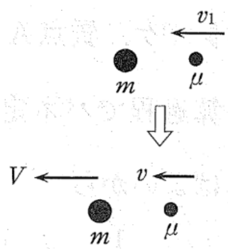
エ：アの結果より，トンネルに入るとばね定数 $k=\frac{GMm}{R^3}$ の単振動をするから，

中心Oに到達する直前の速さを v_1 とすると，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2=\frac{1}{2}\mu v_0^2+\frac{1}{2}kR^2=\frac{1}{2}\mu v_0^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{GM\mu}{R}$$

$\therefore v_1^2=v_0^2+\frac{GM}{R}=\frac{GM}{R}\left(\frac{2h}{R+h}+1\right)=\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}$ $\qquad$ よって $v_1=\sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$

オ・カ：衝突直後の質点 A，B の速度を，図 2 の左向きに v ，V とすると，運動量保存則より　$\mu v_1 = \mu v + mV$



弾性衝突であるから，$1 = -\dfrac{v-V}{v_1}$　　$\therefore V = v_1 + v$

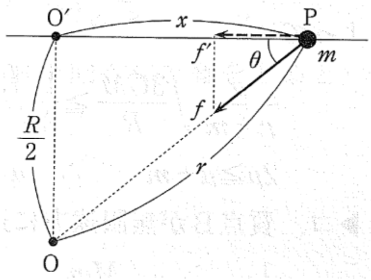
2 式より $\mu v_1 = \mu v + m(v_1 + v)$　　$\therefore v = \dfrac{\mu-m}{\mu+m}v_1$

$$V = v_1 + \frac{\mu-m}{\mu+m}v_1 = \frac{2\mu}{\mu+m}v_1$$

よって，v_1 を代入すると，質点 A，B の速さは

$$|v| = \frac{|\mu-m|}{\mu+m}\sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}\ ,\quad V = \frac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{\frac{GM(R+3h)}{R(R+h)}}$$

（3）キ：$\angle \mathrm{OPO}' = \theta$ とすると，トンネルに沿った力の大きさ f' は，アの結果より



$$f' = \frac{GMm}{R^3}r\cdot\cos\theta = \frac{GMm}{R^3}r\cdot\frac{x}{r} = \frac{GMm}{R^3}x$$

ク：トンネルに沿った質点の加速度を a' とすると，

運動方程式は $ma' = -\dfrac{GMm}{R^3}x$

これは（1）の単振動と同じ形であるから，周期もイと同じになる。よって，地表から反対側の地表に達するまでの時間は半周期で，イの半分となる。

（4）ケ：質点 A が中心 O′ に到達する直前の速さを u_1 とすると，エの計算過程で

ばね定数 $k = \dfrac{GM\mu}{R^3}$ は同じで，$v_1 \to u_1$ ，$v_0 \to 0$，$R \to \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$ とすればよいので，

$$\frac{1}{2}\mu u_1{}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{GM\mu}{R^3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 \qquad u_1{}^2 = \frac{3GM}{4R} \qquad \therefore u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3GM}{R}}$$

衝突直後の質点 B の速さを U とすると，オ・カの計算過程と同様にして

$$U = \frac{2\mu}{\mu+m}u_1 = \frac{\mu}{\mu+m}\sqrt{\frac{3GM}{R}}$$

反対側の地表に達したときの質点 B の速さを U' とすると，問 1 の計算過程で

ばね定数 $k' = \dfrac{GMm}{R^3}$ は同じで，$V_0 \to U$ ，$V' \to U'$ ，$R \to \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$ とすればよいので，

$$\frac{1}{2}mU^2 = \frac{1}{2}mU'^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{GMm}{R^3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 \qquad U'^2 = U^2 - \frac{3GM}{4R}$$

質点 B が反対側の地表に達するためには $U' \geqq 0$ であればよいから，

$$U^2 \geqq \frac{3GM}{4R} \qquad \therefore U \geqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3GM}{R}}$$

よって $\dfrac{\mu}{\mu+m}\sqrt{\dfrac{3GM}{R}} \geqq \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3GM}{R}}$　　$2\mu \geqq \mu+m$　　$\therefore \mu \geqq m$

コ：質点 B が無限遠方に達しなければ再び地表に戻ってくるから

$\frac{1}{2}mU'^2 - G\frac{Mm}{R} < 0 \qquad \therefore U'^2 < \frac{2GM}{R}$　であればよい。よって，ケの計算過程より

$$U^2 - \frac{3GM}{4R} < \frac{2GM}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\mu}{\mu + m}\right)^2 \frac{3GM}{R} < \frac{11GM}{4R} \quad \Leftrightarrow \quad 12\mu^2 < 11(\mu^2 + 2m\mu + m^2)$$

よって$\mu^2 - 22m\mu - 11m^2 < 0$

$\mu > 0$ より，これを解くと$\mu < (11 + 2\sqrt{33})m$

＜前期第１回　演習問題解答＞

$\boxed{1}$［2013 東北大］

解答　(1) (a)　$v=\sqrt{2gR(\cos\theta-\cos\theta_0)}$，$|a|=g\sin\theta$　　(b)　$2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

(2) (a)　$\sqrt{\dfrac{g}{\sqrt{R^2-r^2}}}$　　(b)　$2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

(3) (a)　$\dfrac{5}{13}$　　(b)　$\sqrt{\dfrac{13g}{12\sqrt{R^2-r^2}}}$

(4) (a)　$\dfrac{\sqrt{2gR}}{l}$　　(b)　$\sqrt{\dfrac{2gR}{l^2-2R^2}}$

ヒント　(1) (b)　単振り子の周期の導出と同様に考える。与えられた近似式 $\sin\theta\fallingdotseq\theta$ と，扇形の中心角と弧の長さの関係式 $l=r\theta$ を用いる。

(3) (a)，(b)　台車に乗っている観測者には，重力と慣性力の合力が見かけの重力 mg' となる。この見かけの重力によって円運動の軸の方向が決まる。

(4) (a)　小球の角速度が小さくなると回転半径が小さくなる：『小球が内面から離れる』 ⇛ 垂直抗力が 0 になる

(b)　小球の角速度が大きくなると回転半径が大きくなる：『ひもがたるむ』 ⇛ 張力が 0 になる

(1) (a)　xy 平面を基準 $(h=0)$ として，力学的エネルギー保存則「$\dfrac{1}{2}mv^2+mgh=$一定」 より (図 a)

$$0+(-mgR\cos\theta_0)=\frac{1}{2}mv^2+(-mgR\cos\theta)$$

よって　$v=\sqrt{2gR(\cos\theta-\cos\theta_0)}$

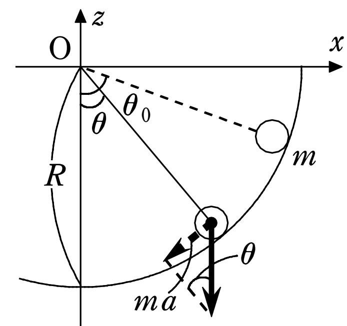


図 a

図 a より，角度 θ の位置で小球は重力 mg を受けるので，半球にそって右向きを正とすると，運動方程式「$ma=F$」より

$ma=-mg\sin\theta$　　よって　$|a|=g\sin\theta$

(b)　(a) より，接線方向の運動方程式は

$ma=-mg\sin\theta$　　……①

図 b のように最下点を点 P とする。最下点から円軌道にそった反時計回りの変位を s とし，変位 s のときの角度を θ とすると，扇形の弧の長さと中心角の関係式より　$s=R\theta$　　……②

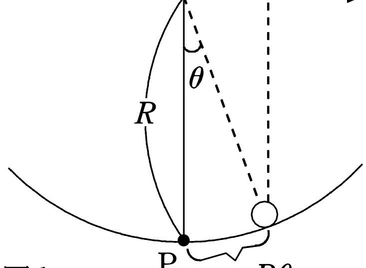


図 b

①，② 式と，近似式 $\sin\theta\fallingdotseq\theta$ より

$$ma=-mg\sin\theta\fallingdotseq-mg\theta=-mg\times\frac{s}{R}$$

よって　$a=-\dfrac{g}{R}s$

一方単振動の角振動数を ω とすると $a=-\omega^2 s$ と表されるから

上式と比較して　$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{R}}$　　よって　$T_1=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ ※A←

(2) (a)　小球が回転している位置が z 軸となす角を θ とする。小球とともに運動する立場から小球にはたらく力を図示すると，図 c のようになる (垂直抗力を N とする。$mr{\omega_1}^2$ は慣性力)。図 c より

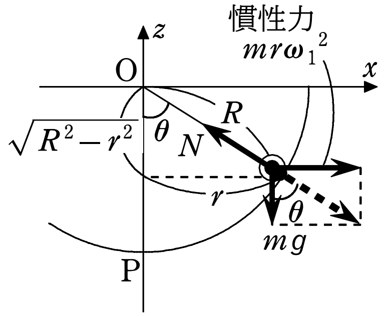


図 c

$$\tan\theta=\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}} \quad \cdots\cdots ③$$

垂直抗力 N に垂直方向の力のつりあいより

$$mr{\omega_1}^2\cos\theta=mg\sin\theta$$

よって　$${\omega_1}^2=\frac{g\sin\theta}{r\cos\theta}=\frac{g}{r}\tan\theta$$ ※B←

③ 式を代入して　$${\omega_1}^2=\frac{g}{r}\times\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}=\frac{g}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

よって　$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{\sqrt{R^2-r^2}}}$$

(b)　周期の式「$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$」より

$$T_2=\frac{2\pi}{\omega_1}=2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}}$$

ここで，$1-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2 \fallingdotseq 1$　を用いて　　$T_2\fallingdotseq 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

(3) (a)　台車が等加速度運動しているとき，重力 mg と慣性力 ma の合力が見かけの重力 mg' となる (図 d)。この見かけの重力の方向が円運動の軸の方向となるので，図 d 中の ϕ について考えればよい。

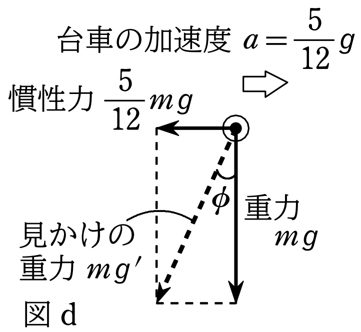


図 d

注 「5：12：13」の直角三角形となっている。

見かけの重力の大きさ mg' は

$$mg'=\sqrt{(mg)^2+\left(\frac{5}{12}mg\right)^2}=\frac{13}{12}mg$$

よって　$$\sin\phi=\frac{\frac{5}{12}mg}{mg'}=\frac{5}{13}$$

(b)　見かけの重力加速度の大きさ g' が $g'=\dfrac{13}{12}g$ であるので，(2) の状況で g が g' になると考え，(2)(a) の角速度の式で g を g' に置き換えて

$$\omega_2=\sqrt{\frac{g'}{\sqrt{R^2-r^2}}}=\sqrt{\frac{13g}{12\sqrt{R^2-r^2}}}$$

(4)　小球の角速度が小さくなると回転半径が小さくなり，小球は半球の内面から離れてしまう。一方，小球の角速度が大きくなると回転半径が大きくなり，小球は半球の内面を上方に上がり，ひもがたるんでしまう。小球が半球の内面からも離れず，ひももたるんでいない状態で小球にはたらく力を，小球とともに運動する立場から図示すると図 e のようになる (ただし，小球の位置は z 軸から角度 θ で，ひもと z 軸のなす角を ϕ' とする)。このとき，円運動の半径 r はひもの長さ l を用いて　$r=l\sin\phi'$　……④

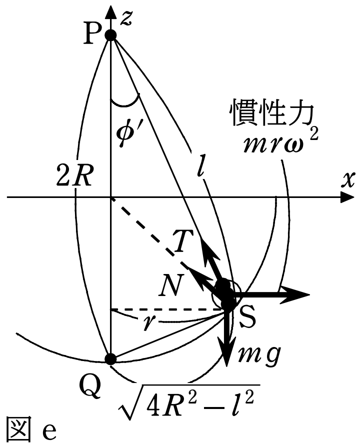


図 e

注　△PQS は ∠S が直角な直角三角形であるから

$$\sin\phi'=\frac{\sqrt{(2R)^2-l^2}}{2R}$$

$$\cos\phi'=\frac{l}{2R}$$

となる。

(a)　角速度が最小 $\omega_{\min}$ になるのは垂直抗力 N が 0 になるときである (図 f)。

張力 T に垂直な方向の力のつりあいより

$$mr\omega_{\min}{}^2\cos\phi'=mg\sin\phi'$$

$$\omega_{\min}{}^2=\frac{g\sin\phi'}{r\cos\phi'}=\frac{g}{l\cos\phi'}\quad(④ 式を用いた)$$

また，図 e より　$\cos\phi'=\dfrac{l}{2R}$ であるので

$$\omega_{\min}{}^2=\frac{g}{l\times\left(\dfrac{l}{2R}\right)}=\frac{2gR}{l^2}\qquad よって\quad \omega_{\min}=\frac{\sqrt{2gR}}{l}$$

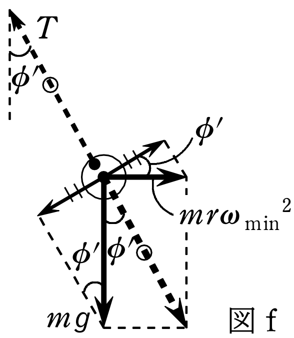


図 f

(b)　角速度が最大 $\omega_{\max}$ になるのはひもの張力 T が 0 になるときである (図 g)。これは (2) と同じ状況であるので，(2)(a) の角速度 ω_1 の式の r を ④ 式で置き換えればよい。

また，図 e より $\sin\phi'=\dfrac{\sqrt{4R^2-l^2}}{2R}$ であるので

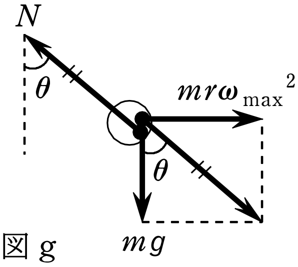


図 g

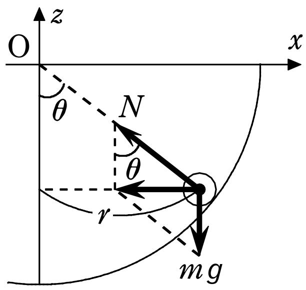
$$\omega_{\max}=\sqrt{\frac{g}{\sqrt{R^2-(l\sin\phi')^2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{g}{\sqrt{R^2-\left(l\cdot\dfrac{\sqrt{4R^2-l^2}}{2R}\right)^2}}}=\sqrt{\frac{g}{\sqrt{\dfrac{4R^4-4l^2R^2+l^4}{4R^2}}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2gR}{\sqrt{4R^4-4l^2R^2+l^4}}}=\sqrt{\frac{2gR}{l^2-2R^2}}$$ ※C←

←※A　これは単振り子の周期「$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$」に他ならない。

←※B　慣性力を用いない場合は，小球にはたらく力を図示して (右図)



半径方向の運動方程式は　$mr{\omega_1}^2 = N\sin\theta$

鉛直方向の力のつりあいの式は

$$mg = N\cos\theta$$

この 2 式から N を消去して

$$\frac{r{\omega_1}^2}{g} = \tan\theta \qquad \text{よって} \quad {\omega_1}^2 = \frac{g}{r}\tan\theta$$

←※C　P から半球面のふちまでが $\sqrt{R^2+R^2} = \sqrt{2}\,R$ なので　$l > \sqrt{2}\,R$ すなわち $l^2 - 2R^2 > 0$ であることに注意して $\sqrt{\quad}$ を開くこと。