高 3 物理総合 S～前期第 2 回～ ＜解答＞◆コリオリの力◆

＜予習用問題＞

【１】（１）鉛直方向で，最高点までの時間 t について，$0 = -gt + v_0\sin45°$

$\therefore t = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}g}$　地面に着くまでの時間は 2 倍なので $\dfrac{\sqrt{2}v_0}{g}$ …①

水平方向で，この時間に R だけ移動していれば命中するので，

$R = v_0\cos45° \times t$ となり，①を代入して，$v_0 = \sqrt{gR}$ …②

（２）②を①に代入して，$\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$

（３）遠心力が最大静止摩擦力を越えればよいので，

$MR\omega^2 \leqq \mu N$ ，$N = Mg$ より $\omega \leqq \sqrt{\dfrac{\mu g}{R}}$

（４）水平方向について $v_0\cos45° = \sqrt{\dfrac{gR}{2}}$　　（５）$\theta = \omega t = \omega\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$

（６）弧の長さ$= R\theta = R\omega\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$　　（７）右

（８）初速 0 で加速度 a の等加速度運動と考えることができるので，$\dfrac{1}{2}at^2 = R\omega\sqrt{\dfrac{2R}{g}}$

よって $a = \omega\sqrt{2gR}$

（９）垂直　　（10）運動方程式 $F = ma = m\omega\sqrt{2gR}$　　（11）自転

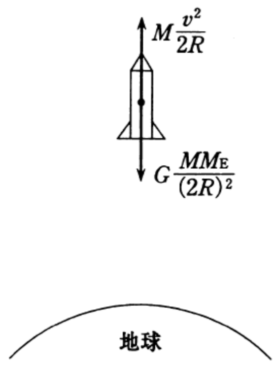
【２】（１）宇宙ステーションとともに運動する立場から見た場合，宇宙ステーションには，遠心力と地球から受ける万有引力が働き，これらがつりあうので，

$$M\frac{v^2}{2R} - G\frac{MM_E}{(2R)^2} = 0$$

したがって，与えられた式 $g = \dfrac{GM_E}{R^2}$ を用いて整理すると $v = \sqrt{\dfrac{gR}{2}}$ [m/s]

（２）（１）の結果に，与えられた数値を代入すると

$$v = \sqrt{\frac{gR}{2}} = \sqrt{\frac{9.8 \times 6.4 \times 10^6}{2}} = \sqrt{5.6^2 \times 10^6} = 5.6 \times 10^3 \text{[m/s]}$$



（３）宇宙ステーションに働く力は遠心力と万有引力で，横方向には力が働かない。宇宙ステーションの回転の角速度を ω[rad/s]とすると $\omega = \dfrac{v}{2R} = \sqrt{\dfrac{g}{8R}}$

これを用いて，各点における遠心力と万有引力の合力を考える。右図において，上向きを正とすると，点 A で働く力 $\overrightarrow{F_A}$ は

$$\overrightarrow{F_A} = m(2R+l)\omega^2 - G\frac{mM_E}{(2R+l)^2} \quad = m(2R+l)\times\frac{g}{8R} - \frac{m}{(2R+l)^2}\times gR^2$$

$$= \frac{mg(2R-l)}{8R} - \frac{mg}{4}\left(1+\frac{l}{2R}\right)^{-2} \fallingdotseq \frac{mg(2R+l)}{8R} - \frac{mg}{4}\left(1-2\cdot\frac{l}{2R}\right) = \frac{3mgl}{8R}\ [\mathrm{N}] \quad (>0)$$

したがって，$\overrightarrow{F_A}$の大きさは$\frac{3mgl}{8R}$ [N]，向きは 1 となる。

また，点 B で働く力$\overrightarrow{F_B}$は

$$\overrightarrow{F_B} = m(2R-l)\omega^2 - G\frac{mM_E}{(2R-l)^2} = m(2R-l)\times\frac{g}{8R} - \frac{m}{(2R-l)^2}\times gR^2$$

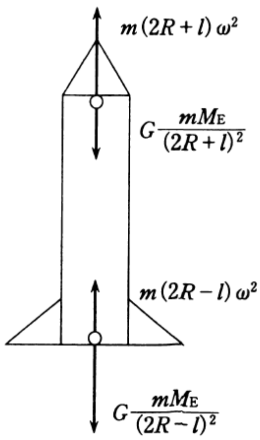
$$= \frac{mg(2R+l)}{8R} - \frac{mg}{4}\left(1-\frac{l}{2R}\right)^{-2} \fallingdotseq \frac{mg(2R-l)}{8R} - \frac{mg}{4}\left\{1-2\left(-\frac{l}{2R}\right)\right\} = -\frac{3mgl}{8R}\ [\mathrm{N}](<0)$$

したがって，$\overrightarrow{F_B}$の大きさは，$\frac{3mgl}{8R}$ [N]向きは 7 となる。

（4）一定の角速度で円運動(等速円運動)する宇宙ステーション内では，中心方向の外側の方が円運動の半径が大きくなるため，円運動の速さは大きくなる。このため，点 A から点 B に向けて投げたボールは 1 のように，点 B から点 A に向けて投げたボールの動きは 6 のようになる。

点 A : 1　点 B : 6

（5）点 A 付近では点 B 付近より円運動の半径が大きく，円運動の速さが大きくなるから(40 字以内)



【３】〔Ⅰ〕

（1）バネのばね定数を k，物体 A の質量を m とする。観測者 S が円筒の内壁上で静止しているとき，A に作用する弾性力と遠心力のつりあいより，

$kL = mR\omega^2$ …①

S が内壁に対して速さ v で$+x$ 方向に運動するとき，静止系から見ると，中心軸の回りの角速度は$\omega' = \omega + \frac{v}{R}$

バネの伸びを L_1 とすると，弾性力と遠心力のつりあいから，

$$kL_1 = mR\omega'^2 = mR\left(\omega+\frac{v}{R}\right)^2 \cdots ②$$

①，②より $\frac{L_1}{L} = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 = \left(1+\frac{v}{R\omega}\right)^2$　よって $L_1 = \left(1+\frac{v}{R\omega}\right)^2 L$

（2）観測者 S がはしごを$\frac{R}{2}$ の高さまで登ったときのバネの伸びを L_2 とすると，弾性力と遠心力のつりあいより $kL_2 = m \cdot \frac{R}{2} \cdot \omega^2$ …③

①，③より$\frac{L_2}{L} = \frac{1}{2}$　$\therefore L_2 = \frac{1}{2}L$

（３）地球上で，物体 A に作用する弾性力と重力のつりあいから，

$kL = mg$ …④　　∴①，④より $1 = \dfrac{g}{R\omega^2}$　よって $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$

〔Ⅱ〕（１）観測者 T が見ると，ボールは等速度運動をする。

理由：静止している観測者 T が見ると，打ち上げられた後，ボールに作用する力はないから，慣性により，ボールは一定の速度で動き続ける。

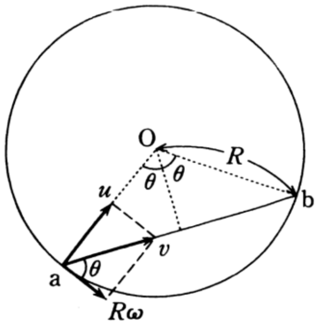
観測者 T から見ると，打ち上げ装置が $+x$ 方向に動く速さは $R\omega$ なので，

ボールの初速度の大きさ $v = \sqrt{u^2 + (R\omega)^2}$

（２）ボールが打ち上げられた点を a，宇宙ステーションの内壁に衝突する点を b とし，角 θ をとる。ボールが動く距離は

$\overline{\mathrm{ab}} = 2R\sin\theta = 2R \times \dfrac{u}{v}$ なので，衝突するまでの時間は

$t_1 = \dfrac{\overline{\mathrm{ab}}}{v} = \dfrac{2Ru}{v^2} = \dfrac{2Ru}{u^2 + (R\omega)^2}$



（３）「$+x$ 方向に離れた場所」

理由：打ち上げ装置が点 a から点 b まで動く時間は $t_2 = \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{ab}}}{R\omega}$ であるが，上図で

$\overset{\frown}{\mathrm{ab}} > \overline{\mathrm{ab}}$　　$R\omega < v$　なので，$t_2 > t_1$ が成立する。つまり，点 a で打ち上げられたボールが点 b に衝突するとき，打ち上げ装置は点 b まで動いていないから，$+x$ 方向に離れた場所に落下するように見える。

＜演習問題＞

【１】

（１）(a)　円盤上の観測者からは，小球はバネから受ける弾性力と遠心力がつり合って見える。半径方向の力のつりあいより　$0 = kL_1 - m\left(\dfrac{R}{2}\omega^2\right)$　　∴ $k = \dfrac{mR\omega^2}{2L_1}$

(b)　角速度を 2 倍にすると，遠心力は $m\left\{\dfrac{R}{2}(2\omega)^2\right\} = 4m\left(\dfrac{R}{2}\omega^2\right)$ となり，

もとの 4 倍となる。よって，弾性力ももとの 4 倍となるのでバネの伸びは 4 倍となる。つまり $L_2 = 4L_1$

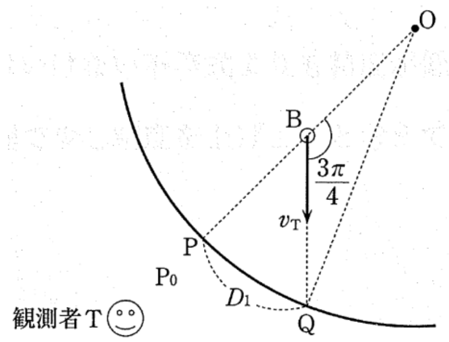
(c)　中心からの距離が $\dfrac{2}{3}R$ のとき，地点 A の場合と比較して半径が $\dfrac{4}{3}$ 倍となるので，

遠心力も $\dfrac{4}{3}$ 倍となる。よって，バネの伸びは $\dfrac{4}{3}$ 倍となるので $L_3 = \dfrac{4}{3}L_1$

（２）(a)　観測者 T から見た小球の OP_0 方向（半径方向）の速度の大きさは

$\dfrac{R\omega}{2}$ であり，OP_0 に垂直な方向の速度の大きさは $\dfrac{R}{2}\omega$ である。

よって $v_T = \sqrt{2}\times\frac{R\omega}{2} = \frac{R\omega}{\sqrt{2}}$



(b)　観測者 T から見ると小球には水平方向の力は働いていない。よって，小球は等速度で運動する。BQ の距離は，余弦定理より，

$$R^2 = \frac{R^2}{2^2} + BQ^2 - 2\cdot\frac{R}{2}\cdot BQ\cdot\cos\frac{3\pi}{4}$$

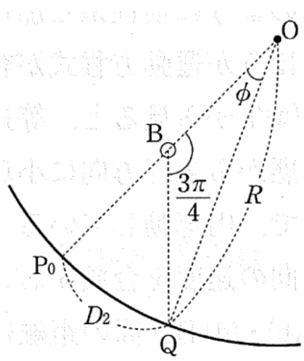
$$4BQ^2 + 2\sqrt{2}R\cdot BQ - 3R^2 = 0$$

$BQ > 0$ より $BQ = \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{2}}R$　　よって，円盤端に要する時間 t は

$$t = \frac{BQ}{v_T} = \frac{\frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{2}}R}{\frac{R\omega}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{7}-1}{2\omega}$$

(c)　円盤は角速度 ω で回転しているので，時間 t での P の移動距離 D_1 は円弧の長さとなり $D_1 = R\omega t = \frac{\sqrt{7}-1}{2}R$

(d)　右図の三角形 OBQ で $\angle BOQ = \phi$ とする。



正弦定理を用いると $\frac{R}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{BQ}{\sin\phi}$

$$\therefore \sin\phi = \frac{BQ\sin\frac{3\pi}{4}}{R} = \frac{\frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{2}}R\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{R} = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

ここで，$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$ より，$\phi = \alpha$ となる。　よって $D_2 = R\alpha$

(e)　$D_1 = \frac{\sqrt{7}-1}{2}R \fallingdotseq \frac{2.65-1}{2}R = 0.825R$

$\alpha = 0.424$[rad]のとき，$D_2 = 0.424R$ となるので，$D_1 > D_2$ である。
$D_1 - D_2 = 0.401R$ より，Q は P から円盤の回転の向きとは逆に円盤の円周に沿って $0.401R$ 戻った点である。