$\boxed{1}$

次の連立不等式の表す領域に含まれる格子点 ($x$ 座標，$y$ 座標がともに整数である点) の個数を求めよ。ただし，$n$ は自然数とする。

(1)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+2y \leqq 2n$　　　(2)　$x \geqq 0$，$y \leqq n^2$，$y \geqq x^2$

$\boxed{2}$

$n$ が 2 以上の自然数のとき，1，2，3，……，$n$ の中から異なる 2 個の自然数を取り出して作った積すべての和 $S$ を求めよ。

$\boxed{3}$

次の連立不等式の表す領域に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし，$n$ は自然数とする。

(1) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+3y \leqq 3n$　　(2) $0 \leqq x \leqq n$，$y \geqq x^2$，$y \leqq 2x^2$

$\boxed{4}$

数列 1，2，3，……，$n$ において，次の積の和を求めよ。

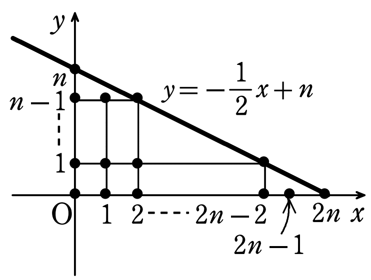
(1) 異なる 2 つの項の積の和（$n \geqq 2$）

(2) 互いに隣り合わない異なる 2 つの項の積の和（$n \geqq 3$）

$\boxed{1}$

(解説)

(1)　領域は，右図のように，$x$ 軸，$y$ 軸，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+n$ で囲まれた三角形の周および内部である。




直線 $y=k$ $(k=n,\ n-1,\ \cdots\cdots,\ 0)$ 上には，それぞれ $1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots,\ 2n+1$ 個の格子点が並ぶ。

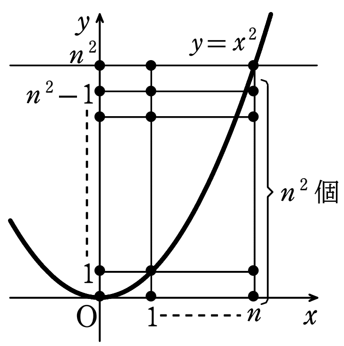
よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(2\cdot0+1)+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=1+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=(n+1)^2\ (\text{個})$$

(2)　領域は，右図のように，$y$ 軸，直線 $y=n^2$，放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分である（境界線を含む）。




直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ n)$ 上には，それぞれ $n^2+1$，$(n^2+1)-1$，$(n^2+1)-4$，$(n^2+1)-9$，$\cdots\cdots$，$(n^2+1)-n^2$ 個の格子点が並ぶ。

よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2+1-k^2)$$

$$=(n^2+1-0^2)+\sum_{k=1}^{n}(n^2+1-k^2)$$

$$=(n^2+1)+(n^2+1)\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=(n^2+1)+(n^2+1)n-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)\ (\text{個})$$

$\boxed{2}$

(解説)

求める和 $S$ について，次の等式が成り立つ。

$$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+2S$$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)\}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$

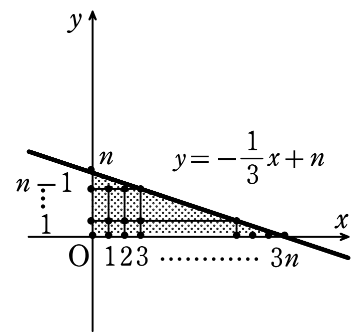
$$=\frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　領域は，右図のように，$x$ 軸，$y$ 軸，直線 $y=-\dfrac{1}{3}x+n$ で囲まれた三角形の周および内部である。



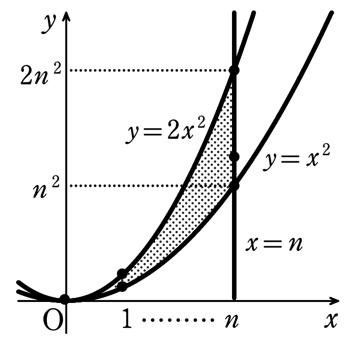

直線 $y=k$ $(k=n,\ n-1,\ \cdots\cdots,\ 0)$ 上には，それぞれ $1,\ 4,\ 7,\ \cdots\cdots,\ 3n+1$ 個の格子点が並ぶ。

よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(3k+1)=(3\cdot0+1)+\sum_{k=1}^{n}(3k+1)=1+\sum_{k=1}^{n}(3k+1)$$

$$=1+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)\ (\text{個})$$

(2)　領域は，右図のように，直線 $x=n$，放物線 $y=x^2$，$y=2x^2$ で囲まれた部分である（境界線を含む）。




直線 $x=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ n)$ 上には，それぞれ $1,\ 2,\ 5,\ \cdots\cdots,\ n^2+1$ 個の格子点が並ぶ。

よって，格子点の総数は

$$\sum_{k=0}^{n}(k^2+1)=(0^2+1)+\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)=1+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6)\ (\text{個})$$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　求める和を $S$ とする。

$$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+2(1\cdot2+1\cdot3+\cdots\cdots+2\cdot3+\cdots\cdots)$$

であるから　$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2=\sum_{k=1}^{n} k^2+2S$

よって

$$2S=\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2-\sum_{k=1}^{n} k^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-2)$$

$$=\frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2)$$

ゆえに，求める和は　$\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$

(2)　(1) より，求める和は

$$\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)-\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n\{(n+1)(3n+2)-4(2n-1)-12\}$$

$$=\frac{1}{24}(n-1)n\cdot3(n^2-n-2)$$

$$=\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n-2)$$