第５章

～指数関数・対数関数～

第１講　指数関数

１　指数の拡張

$\boxed{1}$ 累乗根の性質

$a>0$，$b>0$ で，m，n は正の整数とする。

１　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　　２　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

３　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　　４　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

参考　負の数の n 乗根

n が正の奇数のとき，実数としては１つ存在する。n が正の偶数のとき，実数の範囲では存在しない。　例　$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$，$\sqrt[5]{-3}=-\sqrt[5]{3}$

$\boxed{2}$ 有理数の指数

$a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{-r}=\frac{1}{a^r},\quad a^0=1$$

$\boxed{3}$ 指数法則

$a>0$，$b>0$ で，r，s は有理数とする。

１　$a^r\times a^s=a^{r+s}$　　　２　$\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

３　$(a^r)^s=a^{rs}$　　　４　$(ab)^r=a^rb^r$

２　指数関数

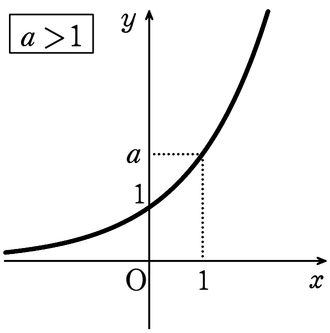
$\boxed{1}$ 指数関数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$）のグラフとその特徴

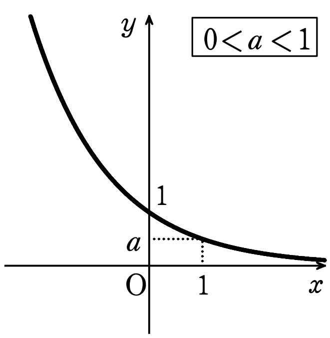
１　定義域は実数全体，値域は正の数全体

２　$a>1$ のとき増加関数　　$r<s \iff a^r<a^s$

　　$0<a<1$ のとき減少関数　　$r<s \iff a^r>a^s$

３　グラフは点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通り，x 軸が漸近線





第１講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の値を求めよ。

(1) $(-3)^0$　(2) 10^{-1}　(3) 7^{-2}　(4) $(-6)^{-3}$

(5) $49^{\frac{1}{2}}$　(6) $8^{\frac{4}{3}}$　(7) $81^{-\frac{5}{4}}$

$\boxed{2}$ ★☆☆

次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$　(2) $\sqrt[5]{0.00001}$　(3) $(\sqrt[4]{5})^8$

(4) $\dfrac{\sqrt[4]{567}}{\sqrt[4]{7}}$　(5) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

$\boxed{3}$ ★★☆

次の計算をせよ。ただし，(3) は分母を有理化せよ。

(1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{6}$　(2) $\sqrt[3]{\sqrt{32}}\times\sqrt{8}\div\sqrt[3]{16}$　(3) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}$

(4) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}$　(5) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})^3$　(6) $\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{-3}$

$\boxed{4}$ ★★☆

(1) $a>0$ とする。$a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=4$ のとき，次の式の値を求めよ。

　① $a+a^{-1}$　② $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$

(2) $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$ のとき，次の式の値を求めよ。

　① $x+x^{-1}$　② x^3+x^{-3}

$\boxed{5}$ ★☆☆

次の関数のグラフをかけ。また，(2)〜(5) のグラフは (1) のグラフとどんな位置関係にあるか。

(1) $y=4^x$　(2) $y=-4^x$　(3) $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$

(4) $y=-4^{-x}$　(5) $y=4\cdot4^x$

第１講　例題

$\boxed{6}$ ★☆☆

次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　2，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[5]{64}$　　(2)　2^{30}，3^{20}，10^{10}　　(3)　$\sqrt[3]{5}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt[4]{8}$

$\boxed{7}$ ★☆☆

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$7^x=49$　　(2)　$4^x=\dfrac{1}{64}$　　(3)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=\dfrac{1}{81}$

(4)　$5^x\geqq 25$　　(5)　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\dfrac{1}{8}$　　(6)　$0.1^x<1000$

(7)　$5^{3x+1}=\dfrac{1}{125}$　　(8)　$4^{2x-1}=2^{3x-5}$

(9)　$2^{x-2}\geqq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　　(10)　$\left(\dfrac{1}{27}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-1}$

$\boxed{8}$ ★★☆

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$9^x-10\cdot 3^x+9=0$　　(2)　$4^x-64=3\cdot 2^{x+2}$

(3)　$16^x-3\cdot 4^x-4<0$　　(4)　$\dfrac{1}{4^x}\geqq\dfrac{3}{2^x}-2$

$\boxed{9}$ ★★☆

次の関数の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$$y=4^x-2^{x+2}+1\quad(-1\leqq x\leqq 2)$$

$\boxed{10}$ ★★★

関数 $y=4(4^x+4^{-x})-34(2^x+2^{-x})+81$ を考える。

(1)　$2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t の式で表せ。

(2)　y の最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

第１講　例題演習

$\boxed{1}$

次の式を計算せよ。

(1) $9^{\frac{3}{2}}$　(2) $8^{-\frac{4}{3}}$　(3) $0.04^{1.5}$　(4) $\left(\dfrac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

(5) $6^{\frac{1}{2}}\times 36^{\frac{1}{4}}$　(6) $2^{-\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{5}{6}}\div 2^{\frac{1}{3}}$　(7) $\left(9^{\frac{2}{3}}\times 3^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}$　(8) $\left\{\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$

$\boxed{2}$

次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[3]{125}$　(2) $\sqrt[4]{81}$　(3) $\sqrt[3]{1000000}$　(4) $\sqrt[3]{0.001}$

(5) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{54}$　(6) $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$　(7) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$　(8) $\sqrt[6]{4^3}$

$\boxed{3}$

次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$　(2) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}\times\sqrt[3]{-25}\div\sqrt[6]{5}$

(3) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{512}$　(4) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}$

(5) $(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16})^3\times\left\{\left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}$　(6) $\sqrt[3]{54}+\dfrac{3}{2}\sqrt[6]{4}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{4}}$

$\boxed{4}$

$a>0$ とする。$9^a+9^{-a}=14$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) 3^a+3^{-a}　(2) 3^a-3^{-a}　(3) 27^a+27^{-a}　(4) 27^a-27^{-a}

$\boxed{5}$

(1)　次の関数のグラフをかけ。また，(2)～(4) のグラフは (1) のグラフとどんな位置関係にあるか。

①　$y=3^x$　②　$y=-3^x$　③　$y=3^{-x}$　④　$y=9\cdot 3^x$

(2)　次の関数のグラフをかき，関数 $y=2^x$ のグラフとの位置関係を述べよ。

⑤　$y=2^{x+1}$　⑥　$y=2^{-x+1}$　⑦　$y=4^{\frac{x}{2}}-1$

6

次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) 2^3，2^{-1}，$2^{\frac{1}{2}}$，2^0　　(2) 0.7^2，0.7^{-3}，0.7^0，0.7^{-1}

(3) $\sqrt[5]{8}$，$\sqrt[6]{16}$，$\sqrt[8]{64}$

7

次の方程式，不等式を解け。

(1) $2^{3x-2}=128$　　(2) $125^{x-1}=\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-6}$　　(3) $3^{x-2}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

(4) $243^x<3^{2x+3}$　　(5) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\dfrac{1}{8}\right)^x$　　(6) $(0.2)^{2x-1}\geqq\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$

8

次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^{2x}+4^{x+1}-12=0$　　(2) $100^x+10^x=2$

(3) $9^x+2\cdot3^x-15>0$　　(4) $\dfrac{1}{4^x}-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\leqq4$

9

次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(1) $y=2^{2x}-4\cdot2^x+1$　　(2) $y=-4^x+2^x+2$　$(-1\leqq x\leqq2)$

10

関数 $y=4^x+4^{-x}-2^{3+x}-2^{3-x}+16$ の最小値を求めよ。

第１講　レベルA

$\boxed{1}$

次の計算をせよ。

(1) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$　(2) $0.09^{1.5}$　(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

(4) $\sqrt{2}\div\sqrt[4]{4}\times\sqrt[12]{32}\div\sqrt[6]{2}$　(5) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}$

(6) $\sqrt[3]{24}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{9}}$

$\boxed{2}$［千葉工業大］

(1) $a>0$，$b>0$ のとき，次の式を計算せよ。

（ア） $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2})$

（イ） $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}}\right)$

(2) $2^x-2^{-x}=3$ のとき，$2^{3x}-2^{-3x}$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$

次の方程式，連立方程式を解け。

(1) $16^{2-x}=8^x$　(2) $27^x-4\cdot 9^x+3^{x+1}=0$　(3) $\begin{cases}3^{y-1}-2^x=19\\ 4^x+2^{x+1}-3^y=-1\end{cases}$

$\boxed{4}$［南山大］

実数 a に対して，x についての方程式 $4^x+a\cdot 2^{x+2}+3a+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$［県立広島大］

次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) 4，$\sqrt[3]{3^4}$，$2^{\sqrt{3}}$，$3^{\sqrt{2}}$　(2) $10^{\frac{1}{3}}$，$3^{\frac{4}{7}}$，$9^{\frac{1}{5}}$

第１講　レベルＢ

$\boxed{1}$［近畿大］

$h(x)=2(8^{x-1}+8^{-x})-3(4^{x-1}+4^{-x})+2^{x-1}+2^{-x}$ とする。

方程式 $h(x)=0$ は，$t=2^{x-1}+2^{-x}$ とおくと，t についての３次方程式

$\left(2t-{}^{ア}\boxed{}\right)\left(t+{}^{イ}\boxed{}\right)\left(t-{}^{ウ}\boxed{}\right)=0$ となる。

したがって，$h(x)=0$ の解 x の値は小さい順に $x={}^{エ}\boxed{}$，$x={}^{オ}\boxed{}$ となる。

$\boxed{2}$［東北大］

(1)　実数 x に関する連立不等式 $\begin{cases} x\geqq -1 \\ 2\cdot 3^x+a\cdot 3^{-x}\leqq 1 \end{cases}$ が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　$x\geqq -1$ を満たすすべての実数 x に対し，不等式 $3^x+a\cdot 3^{-x}\geqq a$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$［名城大］

$(n^2-3n+3)^{n^2-8n+15}=1$ を満たす自然数 n のうち，最小なものと最大なものを求めよ。

第２講　対数とその性質

３　対数とその性質

1　対数　$a>0$，$a\neq 1$ で $M>0$ とするとき，次のことが成り立つ。

$$M=a^p \iff \log_a M=p$$

とくに　$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$

2　対数の性質

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ で，k は実数とする。

１　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

２　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　　　とくに　$\log_a \dfrac{1}{N}=-\log_a N$

３　$\log_a M^k=k\log_a M$

3　底の変換公式

a，b，c は正の数で，$a\neq 1$，$b\neq 1$，$c\neq 1$ とするとき

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\qquad\text{とくに}\quad \log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

４　対数関数

1　対数関数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）のグラフとその特徴

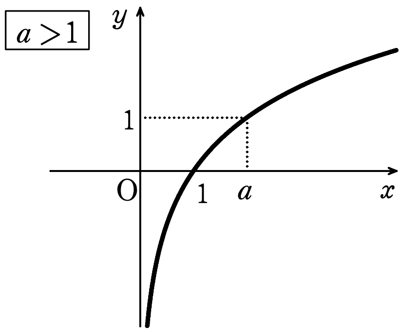
１　定義域は正の数全体，値域は実数全体

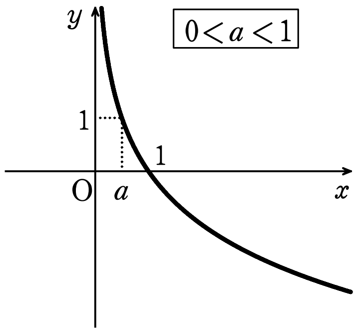
２　$a>1$ のとき増加関数　　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$

　　$0<a<1$ のとき減少関数　　$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

３　グラフは点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通り，y 軸が漸近線

４　直線 $y=x$ に関して，$y=a^x$ のグラフと対称





第２講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の値を求めよ。

(1) $\log_4 64$　(2) $\log_3 81$　(3) $\log_5 5$　(4) $\log_7 1$

(5) $\log_3 \dfrac{1}{9}$　(6) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{25}$　(7) $\log_{0.5} \sqrt{8}$　(8) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{27}$

$\boxed{2}$ ★★☆

次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$　(2) $\log_6 42 - \log_6 7$

(3) $\log_3 54 + \log_3 6 - 2\log_3 2$　(4) $\log_{10} \dfrac{75}{13} - 2\log_{10} \dfrac{5}{9} + \log_{10} \dfrac{130}{243}$

(5) $\log_2 \sqrt[5]{72} - \dfrac{2}{5}\log_2 3$

$\boxed{3}$ ★★☆

次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$　(2) $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 4)$

(3) $\log_4 3 \cdot \log_9 25 \cdot \log_5 8$　(4) $\log_2 10 \cdot \log_5 10 - (\log_2 5 + \log_5 2)$

$\boxed{4}$ ★★☆

$a = \log_{10} 2$，$b = \log_{10} 3$，$c = \log_{10} 7$ とするとき，次の値を a，b，c で表せ。

(1) $\log_{10} 16$　(2) $\log_{10} 5$　(3) $\log_{10} 2.1$　(4) $\log_{10} \sqrt[3]{24}$　(5) $\log_3 28$

$\boxed{5}$ ★★☆

次の式の値を求めよ。

(1) $10^{\log_{10} 2}$　(2) $3^{-2\log_3 4}$　(3) $16^{\log_2 10}$

$\boxed{6}$ ★★★

$xyz \neq 0$，$2^x = 3^y = 12^z$ のとき，$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ を証明せよ。

$\boxed{7}$ ★☆☆

次の関数のグラフをかけ。また，$y = \log_3 x$ のグラフとの位置関係をいえ。

(1) $y = \log_3 (x-1)$　(2) $y = \log_3 9x$　(3) $y = \log_3 \dfrac{1}{x}$

$\boxed{8}$★☆☆

次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　$\log_3 8$，$\log_9 16$，2　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}} 3$，$\log_{\frac{1}{4}} 5$，-2

第２講　例題演習

$\boxed{1}$

次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_3 9$　(2) $\log_2 \frac{1}{4}$　(3) $\log_{100} 1$　(4) $\log_2 \sqrt{8}$

(5) $\log_{\sqrt{3}} 3$　(6) $\log_{64} 4$　(7) $\log_{0.2} 25$　(8) $\log_{25} \sqrt{\frac{1}{5}}$

$\boxed{2}$

次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_8 2 + \log_8 32$　(2) $\log_3 45 - \log_3 5$

(3) $3\log_5 12 - \log_5 300 - 2\log_5 60$　(4) $\log_{0.5} \frac{8}{13} - 2\log_{0.5} \frac{2}{3} + \log_{0.5} \frac{26}{9}$

(5) $\log_2 \sqrt[3]{18} - \frac{2}{3}\log_2 3$　(6) $\log_5 \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{12} - \frac{3}{2}\log_5 \frac{1}{\sqrt[3]{6}}$

$\boxed{3}$

次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 27 \cdot \log_3 64 \cdot \log_{25} \sqrt{125} \cdot \log_{27} 81$

(2) $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4)$

(3) $(\log_5 3 + \log_{25} 9)(\log_9 5 - \log_3 25)$

$\boxed{4}$

$p = \log_a x$，$q = \log_a y$，$r = \log_a z$ であるとき，次の各式を p，q，r で表せ。

(1) $\log_a xyz$　(2) $\log_a x^2 y^3 z^4$　(3) $\log_a \frac{x}{(yz)^2}$　(4) $\log_a \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

$\boxed{5}$

次の式の値を求めよ。ただし，a，x は正の数とし，$a \fallingdotseq 1$ とする。

(1) $5^{\log_5 7}$　(2) $10^{1+\log_{10} 3}$　(3) $36^{\log_6 \sqrt{5}}$　(4) $a^{2\log_a x}$　(5) $a^{-\log_a x}$

$\boxed{6}$

$3^x = 4^y = 6^z$ $(x \fallingdotseq 0)$ のとき，等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{z}$ を証明せよ。

$\boxed{7}$

次の関数のグラフをかけ。また，関数 $y=\log_2 x$ のグラフとの位置関係をいえ。

(1)　$y=\log_2(x+1)$　　(2)　$y=\log_2(2x-4)$　　(3)　$y=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$

$\boxed{8}$

次の３つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1)　$\log_2 0.5$，$\log_2 3$，1　　(2)　$\log_{0.3} 0.5$，0，$\log_{0.3} 2$

(3)　$2\log_2 11$，$3\log_2 5$，7　　(4)　$2\log_{0.1} 3$，$\log_{0.1}\sqrt[3]{512}$，-1

第２講　レベルＡ

$\boxed{1}$

$\log_{16}\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$［星薬科大］

$2\log_3 441-9\log_3\sqrt{7}-\dfrac{1}{6}\log_3\dfrac{27}{343}$ を簡単にせよ。

$\boxed{3}$［京都産業大］

$\log_2 27\cdot\log_3 64\cdot\log_{25}\sqrt{125}\cdot\log_{27}81$ を計算せよ。

$\boxed{4}$［工学院大］

$\log_3\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\log_3\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\log_3\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\log_3\left(1-\dfrac{1}{9}\right)$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$

$\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$ とおくとき，$\log_{14}56$ を a，b で表せ。

$\boxed{6}$［北海道薬科大］

$x=\log_5 50+\log_{25}400-3$ のとき，$\sqrt[3]{5^x}$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$［鹿児島大］

定数 a は実数で，$a>0$，$a\fallingdotseq 1$ とする。このとき，すべての正の実数 x，y に対して $x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$ が成り立つ。このことを証明せよ。

$\boxed{8}$［上智大］

$x>1$，$y>1$，$z>1$，$x^6=y^3=z^2$ のとき，$\log_x\dfrac{z}{y}+\log_y\dfrac{x}{z}+\log_z\dfrac{y}{x}$ の値を求めよ。

第２講　レベルＢ

$\boxed{1}$［京都産業大］

a，b を１でない正の数とし，$A=\log_2 a$，$B=\log_2 b$ とする。a，b が $\log_a 2+\log_b 2=1$，$\log_{ab} 2=-1$，$ab \fallingdotseq 1$ を満たすとき，A，B を求めよ。

$\boxed{2}$

(1)　$5^x=7^y=10$ のとき，$10^{\frac{x+y}{xy}}$ の値を求めよ。

(2)　$3^x=a$，$12^y=a$，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ を満たす実数 x，y が存在するような a の値を求めよ。

(3)　a，b，c は正の数とする。$a^{2x}=b^{2y}=c^{2z}=4$ のとき，$8^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ を a，b，c を用いて表せ。

$\boxed{3}$［防衛大学校］

$1<b<a$ とするとき，$(\log_a b)^2$，$\log_a b^2$，$\log_a(\log_a b)$ の大小を比べよ。

$\boxed{4}$［京都教育大］

(1)　$2^m=3^n$ を満たす自然数 m，n は存在しないことを示せ。

(2)　$\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

第３講　対数と方程式・不等式，常用対数

1　常用対数

10 を底とする対数を **常用対数** という。

$M = a \times 10^n$（n は整数，$1 \leqq a < 10$）とすると　　$\log_{10} M = \log_{10} a + n$

2　常用対数の応用

１　自然数 N，k について

N が k 桁の数 $\iff 10^{k-1} \leqq N < 10^k$

$\iff k-1 \leqq \log_{10} N < k$

２　$0 < M < 1$ である小数 M と自然数 k について

M の小数第 k 位に初めて 0 でない数が現れる

$\iff 10^{-k} \leqq M < 10^{-k+1}$

$\iff -k \leqq \log_{10} M < -k+1$

第３講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_3 x = 3$　(2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$　(3) $\log_{16}(x-2) = 0.5$

(4) $\log_5 x < 3$　(5) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqq 2$　(6) $\log_{0.5}(x+3) \leqq -2$

$\boxed{2}$ ★★☆

次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$　(2) $\log_4(2x+3) + \log_4(4x+1) = 2\log_4 5$

(3) $\log_{10}(x+2)(x+5) = 1$　(4) $\log_2(3-x) = \log_4(2x+18)$

(5) $\log_{10}(x-3) + \log_{10} x \leqq 1$　(6) $\log_2(1-x) + \log_2(3-x) < 1 + \log_2 3$

$\boxed{3}$ ★★☆

次の方程式，不等式を解け。

(1) $(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 = 0$　(2) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 3 \leqq 0$

$\boxed{4}$ ★★☆

関数 $y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 + 6$ $(1 \leqq x \leqq 8)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$\boxed{5}$ ★★☆

$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) $\log_{10} 5$，$\log_{10} 0.006$，$\log_{10}\sqrt{72}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 6^{50} は何桁の整数か。

(3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

$\boxed{6}$ ★★☆

(1) 3^n が 10 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(2) 不等式 $3^{30} > 16^n$ を満たす最大の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

第３講　例題演習

$\boxed{1}$

次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_5 x=2$　(2) $\log_3 x=-1$　(3) $\log_{\frac{1}{3}} x=4$

(4) $\log_5 x<2$　(5) $\log_{\frac{1}{3}} x\leqq 3$　(6) $\log_{0.1} x>2$

$\boxed{2}$

次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2 x+\log_2(x+3)=2$　(2) $\log_4(2x+3)+\log_4(4x+1)=2\log_4 5$

(3) $\log_{10}(x+2)(x+5)=1$　(4) $\log_2(3-x)=\log_4(2x+18)$

(5) $(\log_3 x)^2+\log_3 x-6\geqq 0$　(6) $\log_{\frac{1}{2}}(1-x)>2$

(7) $2\log_{0.5}(x-2)>\log_{0.5}(x+4)$　(8) $\log_2(x-2)<1+\log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

$\boxed{3}$

次の方程式，不等式を解け。

(1) $(\log_2 x)^2-2\log_2 x-8=0$　(2) $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2+\log_{\frac{1}{3}} x^2-15\leqq 0$

$\boxed{4}$

$1\leqq x\leqq 64$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=(\log_4 x)^2-\log_4 x^2$　(2) $y=\left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)^2+\log_{\frac{1}{4}} 4x$

$\boxed{5}$

25^{30} は何桁の数であるか。また，$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{30}$ は，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

$\boxed{6}$

(1) 1.25^n の整数部分が 3 桁であるような自然数 n の値の範囲を求めよ。
ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(2) $(0.4)^n<10^{-15}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

第３講　レベルＡ

$\boxed{1}$

次の方程式を解け。

(1)　$2^x=3^{2x-1}$　　(2)　$5^{2x}=3^{x+2}$

$\boxed{2}$

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\log_2 x+6\log_x 2=5$　　(2)　$2\log_3 x-4\log_x 27\leqq 5$

$\boxed{3}$［山形大］

不等式 $\log_a(3x^2-3x-18)>\log_a(2x^2-10x)$ を解け．ただし，a は 1 と異なる正の定数とする．

$\boxed{4}$

(1)　関数 $y=\log_2(x-2)+2\log_4(3-x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$1\leqq x\leqq 5$ のとき，関数 $y=2\log_5 x+(\log_5 x)^2$ の最大値と最小値を求めよ。

(3)　$\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 27$ のとき，関数 $y=(\log_3 3x)\left(\log_3\dfrac{x}{27}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{5}$

$x\geqq 3$，$y\geqq\dfrac{1}{3}$，$xy=27$ のとき，$(\log_3 x)(\log_3 y)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{6}$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(1)　$\log_{10}5$ の値を求めよ。　　(2)　3^{37} は何桁の整数か。

(3)　3^{37} の最高位の数字を求めよ。

$\boxed{7}$

A 市の人口は近年増加傾向にある。現在，A 市の人口は前年同時期の人口と比べて 8 ％増加している。毎年この比率で増加するとした場合，人口が現在の 5 倍を超えるのは何年後か。答えは整数で求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

第３講　レベルＢ

$\boxed{1}$［早稲田大］

次の方程式，連立方程式を解け。ただし，(3) では $0<x<1$，$0<y<1$ とする。

(1)　$3^{2-\log_2 x}+26\cdot 3^{-\log_4 x}-3=0$　　　(2)　$\left(x^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x}=64x^{6\log_2 x-11}$

(3)　$\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2\\ 2\log_x \sin(x+y)=\log_x \sin y+\log_y \cos x\end{cases}$

$\boxed{2}$［津田塾大］

(1)　$0<x\leqq 2$，$0<y\leqq 2$，$y\neq 1$ の範囲で，不等式 $\dfrac{1}{2}\geqq \log_y x$ の表す領域を図示せよ。

(2)　点 $(x,\ y)$ が (1) で求めた領域を動くとき，$3x+2y$ の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$［新潟大］

a を実数とする。x に関する方程式 $\log_3(x-1)=\log_9(4x-a-3)$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。