$\boxed{1}$

$\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}$ のとき，この比例式の値を求めよ。

$\boxed{2}$

$a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$ のとき，$a=b=c$ または $a+b+c=0$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$

次の等式を満たす実数 $x$，$y$ の値を求めよ。

(1)　$x^2+y^2-4x+6y+13=0$　　　(2)　$x^2+2xy+5y^2-4y+1=0$

$\boxed{4}$

$x$ についての整式 $Q$ を $2x^2+5$ で割ると $7x-4$ 余り，更に，その商を $3x^2+5x+2$ で割ると $3x+8$ 余る。このとき，$Q$ を $3x^2+5x+2$ で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{5}$

$|x|<1$，$|y|<1$ のとき，$\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1$ を証明せよ。

$\boxed{6}$

(1)　任意の実数 $p$，$q$，$r$ に対して，不等式 $3(p^2+q^2+r^2)\geqq(p+q+r)^2$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2)　実数 $a$，$b$，$c$，$d$ が $a+2b+3c+4d=6$，$a^2+4b^2+9c^2+16d^2=12$ を満たすとき，$0\leqq a\leqq 3$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{7}$

$x$ の 4 次式 $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-x+4$ を $x^2-x+1$ で割ったときの商は ア$\boxed{\quad}$，余りは イ$\boxed{\quad}$ だから，$\dfrac{f(x)}{x^2-x+1}=$ ア$\boxed{\quad}$$+\dfrac{イ\boxed{\quad}}{x^2-x+1}$ と変形できる。

$x$ が実数全体を動くとき，$t=x^2-x+1$ の最小値は ウ$\boxed{\quad}$ であり，特に $t>0$ である。

$x$ が実数全体を動くとき，$\dfrac{f(x)}{x^2-x+1}$ の最小値は エ$\boxed{\quad}$ であり，そのときの $x$ の値は オ$\boxed{\quad}$ である。

$\boxed{8}$

$p$ を素数とするとき，次のことを証明せよ。

(1)　$1\leqq k\leqq p$ を満たす自然数 $k$ について，等式 $p\cdot{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}=k\cdot{}_p\mathrm{C}_k$ が成り立つ。

(2)　$1\leqq k\leqq p-1$ を満たす自然数 $k$ について，${}_p\mathrm{C}_k$ は $p$ の倍数である。

(3)　$2^p-2$ は $p$ の倍数である。

$\boxed{9}$

2 次方程式 $x^2-kx+2k-7=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，$|\alpha-\beta|$ の最小値とそのときの $k$ の値を求めよ。

$\boxed{10}$

方程式 $(x-a)(x-b)=cx+d$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とすると，方程式 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx+d=0$ の 2 つの解は $a$，$b$ であることを証明せよ。

ただし $a$，$b$，$c$，$d$ は実数とする。

$\boxed{11}$

$x^2+xy-6y^2-x+7y+k$ が $x$，$y$ の 1 次式の積に因数分解できるように，定数 $k$ の値を定めよ。また，このとき，与式を因数分解せよ。

$\boxed{12}$

2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき，2 つの数 $\dfrac{4\alpha^2+5\alpha+6}{4\beta^2+5\beta+6}$，$\dfrac{4\beta^2+5\beta+6}{4\alpha^2+5\alpha+6}$ を解とする 2 次方程式を 1 つ作れ。

$\boxed{13}$

次の方程式を解け。ただし，$i$ は虚数単位，$x$ は実数とする。

$$(1+i)x^2-(1+3i)x-2+2i=0$$

$\boxed{14}$

整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $4x-5$ で，$x+2$ で割ったときの余りが $-4$ である。

(1)　$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ。

(2)　$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

(3)　$P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{15}$

実数を係数とする 4 次方程式 $x^4+ax^2+b=0$ が $\sqrt{2}-i$ を解にもつとき，実数 $a$，$b$ の値を求めよ。

$\boxed{16}$

方程式 $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$ の解 $x$ について，$x+\dfrac{1}{x}=t$ とおくと $t$ の正の値は ア$\boxed{\quad}$ であり，もとの方程式の解 $x$ の中で最も大きいものは イ$\boxed{\quad}$，最も小さいものは ウ$\boxed{\quad}$ である。

$\boxed{17}$

3 点 $\mathrm{A}(4,\ 6)$，$\mathrm{B}(0,\ 0)$，$\mathrm{C}(6,\ 0)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ について，次の 3 直線が 1 点で交わることを示せ。また，その交点の座標を求めよ。

(1)　各辺の垂直二等分線　　　(2)　各頂点から対辺に下ろした垂線

$\boxed{18}$

2 円 $x^2+y^2=1$，$(x-a)^2+(y-2a)^2=4$ について，次のものを求めよ。

ただし，$a>0$ とする。

(1)　共有点がないときの $a$ の値の範囲　　　(2)　共有点が 1 個のときの $a$ の値

(3)　共有点が 2 個のときの $a$ の値の範囲

$\boxed{19}$

点 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を頂点とする三角形の内部を動くとき，放物線 $y=x^2+ax+b$ の頂点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が動く範囲を図示せよ。

$\boxed{20}$

連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2-4x-6y+12\leqq 0 \\ x+y\geqq 4 \end{cases}$ の表す領域を $D$ とし，点 $(5,\ 0)$ を通り，傾きが $a$ の直線を $\ell$ とする。直線 $\ell$ と領域 $D$ が共有点をもつような $a$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{21}$

(1)　直線 $\ell$ ：$y=x+1$ と 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 1)$ を考える。$\ell$ に関して B と対称な点を C とすると，C の座標は (ア$\boxed{\quad}$，イ$\boxed{\quad}$) である。また，点 P が $\ell$ 上を動くとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ が最小となる P の座標は (ウ$\boxed{\quad}$，エ$\boxed{\quad}$) であり，そのときの最小値は オ$\boxed{\quad}$ となる。

(2)　直線 $y=\dfrac{3}{4}x-2$ 上を動く動点 P と，円 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ の周上を動く動点 Q がある。このとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

$\boxed{22}$

2 円 $C_1$：$x^2+y^2=4$，$C_2$：$(x-4)^2+y^2=1$ の両方に接する直線は全部で 4 本ある。

この 4 本の直線の方程式を求めよ。

$\boxed{23}$

座標平面上の点 P から放物線 $y=x^2$ へ 2 本の接線が引けて，かつ，この 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。

$\boxed{24}$

点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ が $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta<1$ を満たして動くとき，点 $\mathrm{Q}(\alpha+\beta,\ \alpha\beta)$ の動く範囲を図示せよ。

$\boxed{1}$

解説

$\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{y+z}{x}=\dfrac{z+x}{y}=k$ とおくと　$x+y=zk,\ y+z=xk,\ z+x=yk$

辺々加えて　$2(x+y+z)=k(x+y+z)$

よって　$(x+y+z)(k-2)=0$

ゆえに　$x+y+z=0$　または　$k-2=0$

[1]　$x+y+z=0$ のとき　$k=\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{-z}{z}=-1$

[2]　$k-2=0$ のとき　$k=2$

したがって，求める値は　$-1,\ 2$

$\boxed{2}$

解説

$a^2-bc=b^2-ca$ から　$(a-b)c+a^2-b^2=0$

すなわち　$(a-b)c+(a+b)(a-b)=0$

よって　$(a-b)(a+b+c)=0$

ゆえに　$a=b$ または $a+b+c=0$

同様に，$b^2-ca=c^2-ab$ から　$(b-c)(a+b+c)=0$

ゆえに　$b=c$ または $a+b+c=0$

よって，$a+b+c\neq 0$ のとき　$a=b=c$

したがって　$a=b=c$ または $a+b+c=0$

$\boxed{3}$

解説

(1)　$(\text{左辺})=(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=(x-2)^2+(y+3)^2$

よって，等式は　$(x-2)^2+(y+3)^2=0$

$x-2,\ y+3$ は実数であるから，この等式が成り立つのは，$x-2=0$ かつ $y+3=0$ のときである。

したがって　$x=2,\ y=-3$

(2)　$(\text{左辺})=(x^2+2xy+y^2)-y^2+5y^2-4y+1=(x+y)^2+4y^2-4y+1$

$=(x+y)^2+(2y-1)^2$

よって，等式は　$(x+y)^2+(2y-1)^2=0$

$x+y,\ 2y-1$ は実数であるから，この等式が成り立つのは，$x+y=0$ かつ $2y-1=0$ のときである。

したがって　$x=-\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{4}$

解説

$Q$ を $2x^2+5$ で割ったときの商を $S$，$S$ を $3x^2+5x+2$ で割ったときの商を $T$ とすると

$Q=(2x^2+5)S+7x-4,\quad S=(3x^2+5x+2)T+3x+8$

したがって　$Q=(2x^2+5)\{(3x^2+5x+2)T+3x+8\}+7x-4$

$=(3x^2+5x+2)(2x^2+5)T+(2x^2+5)(3x+8)+7x-4$

$=(3x^2+5x+2)(2x^2+5)T+6x^3+16x^2+22x+36$

よって，求める余りは，$6x^3+16x^2+22x+36$ を $3x^2+5x+2$ で割ったときの余りに等しいから，右の計算より　$8x+32$

$$\begin{array}{r} 2x+2 \\ 3x^2+5x+2\,\overline{)\,6x^3+16x^2+22x+36} \\ \underline{6x^3+10x^2+\ \ 4x\qquad} \\ 6x^2+18x+36 \\ \underline{6x^2+10x+\ \ 4} \\ 8x+32 \end{array}$$

$\boxed{5}$

解説

$\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1 \iff \dfrac{|x+y|}{|1+xy|}<1 \iff |x+y|<|1+xy|$

よって，$|x+y|<|1+xy|$ を示せばよい。

$|1+xy|^2-|x+y|^2=(1+2xy+x^2y^2)-(x^2+2xy+y^2)$

$=1-x^2-y^2+x^2y^2=(1-x^2)(1-y^2)$

$|x|<1,\ |y|<1$ から　$-1<x<1,\ -1<y<1$

ゆえに，$0\leqq x^2<1,\ 0\leqq y^2<1$ であるから　$(1-x^2)(1-y^2)>0$

すなわち　$|1+xy|^2-|x+y|^2>0$

よって　$|x+y|^2<|1+xy|^2$

$|x+y|\geqq 0,\ |1+xy|>0$ であるから　$|x+y|<|1+xy|$

したがって　$\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1$

別解　$|x|<1,\ |y|<1$ から　$|xy|<1$

よって　$-1<xy<1$　ゆえに　$1+xy>0$

$\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1 \iff -1<\dfrac{x+y}{1+xy}<1 \iff -(1+xy)<x+y<1+xy$

したがって，$-(1+xy)<x+y<1+xy$ を示せばよい。

$1+xy-(x+y)=(1-x)(1-y)$

$x+y-\{-(1+xy)\}=(1+x)(1+y)$

$|x|<1,\ |y|<1$ から　$-1<x<1,\ -1<y<1$

よって　$(1-x)(1-y)>0,\ (1+x)(1+y)>0$

ゆえに　$x+y<1+xy,\ -(1+xy)<x+y$

すなわち　$-(1+xy)<x+y<1+xy$

したがって　$\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1$

$\boxed{6}$

解説

(1)　$3(p^2+q^2+r^2)-(p+q+r)^2=3(p^2+q^2+r^2)-(p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp)$

$=2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp$

$=(p^2-2pq+q^2)+(q^2-2qr+r^2)+(r^2-2rp+p^2)$

$=(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2\geqq 0$

よって　$3(p^2+q^2+r^2)\geqq(p+q+r)^2$

等号が成り立つのは，$p-q=0$ かつ $q-r=0$ かつ $r-p=0$ すなわち $p=q=r$ のときである。

(2)　$a+2b+3c+4d=6$ から　$2b+3c+4d=6-a$　……①

$a^2+4b^2+9c^2+16d^2=12$ から　$4b^2+9c^2+16d^2=12-a^2$　……②

(1) の不等式において，$p=2b,\ q=3c,\ r=4d$ を代入すると

$3(4b^2+9c^2+16d^2)\geqq(2b+3c+4d)^2$

これに ①，② を代入して　$3(12-a^2)\geqq(6-a)^2$

よって　$4(a^2-3a)\leqq 0$　ゆえに　$0\leqq a\leqq 3$

$\boxed{7}$

解説

$f(x)$ を $x^2-x+1$ で割ると，右のようになるから，商は ${}^{ア}x^2-x$，余りは ${}^{イ}4$

$$\begin{array}{r} x^2-x\qquad\qquad \\ x^2-x+1\,\overline{)\,x^4-2x^3+2x^2-x+4} \\ \underline{x^4-\ \ x^3+\ \ x^2\qquad\quad} \\ -\ \ x^3+\ \ x^2-x\quad \\ \underline{-\ \ x^3+\ \ x^2-x\quad} \\ 4 \end{array}$$

よって，$f(x)=(x^2-x+1)(x^2-x)+4$ と表されるから

$\dfrac{f(x)}{x^2-x+1}=\dfrac{(x^2-x+1)(x^2-x)+4}{x^2-x+1}$

$=x^2-x+\dfrac{4}{x^2-x+1}$

$t=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ であるから，$t$ の最小値は ${}^{ウ}\dfrac{3}{4}$ である。

よって，$t>0$ となる。

$\dfrac{f(x)}{x^2-x+1}=(x^2-x+1)+\dfrac{4}{x^2-x+1}-1=t+\dfrac{4}{t}-1$

$t>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$t+\dfrac{4}{t}-1\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{4}{t}}-1=3$

等号が成り立つのは，$t=\dfrac{4}{t}$ かつ $t>0$，すなわち $t=2$ のときである。

$t=2$ のとき　$x^2-x+1=2$　よって　$x^2-x-1=0$

これを解くと　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

したがって，$\dfrac{f(x)}{x^2-x+1}$ は $x={}^{オ}\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ のとき最小値 ${}^{エ}3$ をとる。

$\boxed{8}$

解説

(1)　$p\cdot{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}=p\cdot\dfrac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!}=\dfrac{p!}{(k-1)!(p-k)!}$

$k\cdot{}_{p}\mathrm{C}_{k}=k\cdot\dfrac{p!}{k!(p-k)!}=\dfrac{p!}{(k-1)!(p-k)!}$

よって，等式 $p\cdot{}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}=k\cdot{}_{p}\mathrm{C}_{k}$ ……① が成り立つ。

(2)　① の左辺は $p$ の倍数である。

$p$ は素数であるから，$p$ と $1\leqq k\leqq p-1$ を満たす $k$ とは互いに素である。

したがって，① から，${}_{p}\mathrm{C}_{k}$ は $p$ の倍数である。

注意　2つの整数 $a$，$b$ の最大公約数が 1 であるとき，$a$ と $b$ は **互いに素** であるという。(数学 A の「整数の性質」で学習する)

特に，2つの自然数 $m$ と $n$ が互いに素であるとき，$m$ と $n$ は 1 より大きい公約数をもたない。

(3)　二項定理により

$2^p-2=(1+1)^p-2={}_{p}\mathrm{C}_{0}+{}_{p}\mathrm{C}_{1}+{}_{p}\mathrm{C}_{2}+\cdots\cdots+{}_{p}\mathrm{C}_{p}-2$

$=1+{}_{p}\mathrm{C}_{1}+{}_{p}\mathrm{C}_{2}+\cdots\cdots+{}_{p}\mathrm{C}_{p-1}+1-2$

$={}_{p}\mathrm{C}_{1}+{}_{p}\mathrm{C}_{2}+\cdots\cdots+{}_{p}\mathrm{C}_{p-1}$

(2) より，${}_{p}\mathrm{C}_{k}$ ($k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ p-1$) は $p$ の倍数であるから，$2^p-2$ は $p$ の倍数である。

## 9

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=2k-7$

よって　$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=k^2-4(2k-7)$

$$=k^2-8k+28=(k-4)^2+12$$

ゆえに，$|\alpha-\beta|^2$ は $k=4$ で最小値 12 をとる。

$|\alpha-\beta|\geqq 0$ であるから，このとき $|\alpha-\beta|$ も最小で，最小値は　$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

したがって　$k=4$ で最小値 $2\sqrt{3}$

別解　$|\alpha-\beta|^2$ は次のように計算してもよい。

$x^2-kx+2k-7=0$ の判別式を $D$ とすると

$$D=(-k)^2-4\cdot 1\cdot(2k-7)=k^2-8k+28$$

$x^2-kx+2k-7=0$ の解は $x=\dfrac{k\pm\sqrt{D}}{2}$ であるから

$$|\alpha-\beta|=\frac{k+\sqrt{D}}{2}-\frac{k-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}$$

よって　$|\alpha-\beta|^2=D=k^2-8k+28=(k-4)^2+12$

## 10

解説

$(x-a)(x-b)=cx+d$ の 2 つの解が $\alpha,\ \beta$ であるから

$$(x-a)(x-b)-cx-d=(x-\alpha)(x-\beta)$$

これを変形すると　$(x-\alpha)(x-\beta)+cx+d=(x-a)(x-b)$

よって，$(x-\alpha)(x-\beta)+cx+d=0$ の 2 つの解は $a,\ b$ である。

## 11

解説

$P=x^2+xy-6y^2-x+7y+k$ とする。

$P$ が $x,\ y$ の 1 次式の積に因数分解できるための条件は，

$$x^2+xy-6y^2-x+7y+k=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を $x$ の 2 次方程式とみたとき，その解が $y$ の 1 次式で表されることである。

① の左辺を $x$ について整理すると　$x^2+(y-1)x-(6y^2-7y-k)=0$

$x$ について解くと　$x=\dfrac{-(y-1)\pm\sqrt{(y-1)^2+4(6y^2-7y-k)}}{2}$

$$=\frac{-y+1\pm\sqrt{25y^2-30y-4k+1}}{2}$$

これが $y$ の 1 次式になるのは，$\sqrt{\phantom{x}}$ 内が $y$ の 1 次式の平方となるときである。

よって，$25y^2-30y-4k+1=0$ の判別式を $D$ とすると　$D=0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(-15)^2-25(-4k+1)=100(k+2)$

よって　$k+2=0$　　ゆえに　$k=-2$

このとき　$x=\dfrac{-y+1\pm\sqrt{25y^2-30y+9}}{2}=\dfrac{-y+1\pm\sqrt{(5y-3)^2}}{2}$

$$=\frac{-y+1\pm(5y-3)}{2}$$

ゆえに　$x=2y-1,\ -3y+2$

したがって　$P=\{x-(2y-1)\}\{x-(-3y+2)\}=(x-2y+1)(x+3y-2)$

## 12

解説

$p=\dfrac{4\alpha^2+5\alpha+6}{4\beta^2+5\beta+6}$，$q=\dfrac{4\beta^2+5\beta+6}{4\alpha^2+5\alpha+6}$ とおくと　$pq=1$　……①

$\alpha,\ \beta$ は $x^2+2x+3=0$ の解であるから　$\alpha^2+2\alpha+3=0,\ \beta^2+2\beta+3=0$

すなわち　$\alpha^2=-2\alpha-3,\ \beta^2=-2\beta-3$

よって　$4\alpha^2+5\alpha+6=4(-2\alpha-3)+5\alpha+6=-3(\alpha+2)$

同様に　$4\beta^2+5\beta+6=-3(\beta+2)$

ゆえに　$p=\dfrac{-3(\alpha+2)}{-3(\beta+2)}=\dfrac{\alpha+2}{\beta+2}$，$q=\dfrac{\beta+2}{\alpha+2}$

また，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=3$

したがって　$p+q=\dfrac{\alpha+2}{\beta+2}+\dfrac{\beta+2}{\alpha+2}=\dfrac{(\alpha+2)^2+(\beta+2)^2}{(\alpha+2)(\beta+2)}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+4(\alpha+\beta)+8}{(\alpha+2)(\beta+2)}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+4(\alpha+\beta)+8}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}=\frac{(-2)^2-2\cdot 3+4\cdot(-2)+8}{3+2\cdot(-2)+4}$$

$$=-\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から，$p,\ q$ を解とする 2 次方程式の 1 つは，

$$x^2+\frac{2}{3}x+1=0 \text{ から } \quad 3x^2+2x+3=0$$

## 13

解説

与えられた方程式を整理すると　$x^2-x-2+(x^2-3x+2)i=0$

$x$ は実数であるから，$x^2-x-2,\ x^2-3x+2$ は実数である。

よって　$x^2-x-2=0$　……①

かつ　$x^2-3x+2=0$　……②

① から　$(x+1)(x-2)=0$　　ゆえに　$x=-1,\ 2$

② から　$(x-1)(x-2)=0$　　ゆえに　$x=1,\ 2$

求める解は，①，② をともに満たす $x$ の値であるから　$x=2$

## 14

解説

(1)　$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると，条件から

$$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+4x-5 \quad \cdots\cdots ①$$

よって　$P(1)=4\cdot 1-5=-1$　　ゆえに，求める余りは　$-1$

(2)　$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q_2(x)+ax+b$$

(1) と条件から　$P(1)=-1,\ P(-2)=-4$

よって　$a+b=-1,\ -2a+b=-4$　　これを解いて　$a=1,\ b=-2$

ゆえに，求める余りは　$x-2$

(3)　$P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$ とすると，余りは 2 次以下の整式か 0 であり，更に $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $4x-5$ であるから

$$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q_3(x)+c(x-1)^2+4x-5 \text{　と表される。}$$

$P(-2)=-4$ から　$c(-3)^2+4(-2)-5=-4$

よって　$9c-13=-4$　　ゆえに　$c=1$

したがって，求める余りは　$(x-1)^2+4x-5=x^2+2x-4$

別解　① から　$P(-2)=(-2-1)^2Q_1(-2)+4\cdot(-2)-5=9Q_1(-2)-13$

$P(-2)=-4$ から　$9Q_1(-2)-13=-4$　　よって　$Q_1(-2)=1$

したがって，$Q_1(x)=(x+2)R(x)+1$ （$R(x)$ は整式）と表される。

これを ① に代入して

$$P(x)=(x-1)^2\{(x+2)R(x)+1\}+4x-5$$
$$=(x-1)^2(x+2)R(x)+(x-1)^2+4x-5$$
$$=(x-1)^2(x+2)R(x)+x^2+2x-4$$

よって，求める余りは　$x^2+2x-4$

## 15

解説

$\sqrt{2}-i$ が解であるから　$(\sqrt{2}-i)^4+a(\sqrt{2}-i)^2+b=0$　……①

ここで　$(\sqrt{2}-i)^2=2-2\sqrt{2}\,i+i^2=1-2\sqrt{2}\,i$，

$(\sqrt{2}-i)^4=(1-2\sqrt{2}\,i)^2=1-4\sqrt{2}\,i+8i^2=-7-4\sqrt{2}\,i$

よって，① から　$-7-4\sqrt{2}\,i+a(1-2\sqrt{2}\,i)+b=0$

整理すると　$(a+b-7)-2\sqrt{2}(a+2)i=0$

$a+b-7,\ -2\sqrt{2}(a+2)$ は実数であるから　$a+b-7=0,\ -2\sqrt{2}(a+2)=0$

これを解いて　$a=-2,\ b=9$

別解　方程式の係数は実数であるから，$\sqrt{2}-i$ と共役な複素数 $\sqrt{2}+i$ も解である。

よって，方程式の左辺は $\{x-(\sqrt{2}+i)\}\{x-(\sqrt{2}-i)\}$ すなわち $x^2-2\sqrt{2}\,x+3$ で割り切れる。

左辺 $x^4+ax^2+b$ を $x^2-2\sqrt{2}\,x+3$ で割ると，

商は　$x^2+2\sqrt{2}\,x+a+5$，　余りは　$2\sqrt{2}(a+2)x-3a+b-15$

余りが 0 であるとき　$2\sqrt{2}(a+2)=0,\ -3a+b-15=0$

これを解くと　$a=-2,\ b=9$

参考　$a=-2,\ b=9$ のとき，方程式は $(x^2-2\sqrt{2}\,x+3)(x^2+2\sqrt{2}\,x+3)=0$ となり，4 つの解 $\sqrt{2}\pm i,\ -\sqrt{2}\pm i$ をもつことがわかる。

## 16

解説

$x=0$ は方程式の解でないから　$x\fallingdotseq 0$

方程式の両辺を $x^2\,(\fallingdotseq 0)$ で割ると　$6x^2+5x-38+\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}=0$

すなわち　$6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-38=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}=t^2-2$ であるから　$6(t^2-2)+5t-38=0$

整理すると　$6t^2+5t-50=0$　　すなわち　$(2t-5)(3t+10)=0$

これを解いて　$t=\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{10}{3}$　　よって，$t$ の正の値は　ア $\dfrac{5}{2}$

[1]　$t=\dfrac{5}{2}$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$

両辺に $2x\,(\fallingdotseq 0)$ を掛けて整理すると　$2x^2-5x+2=0$

よって　$(x-2)(2x-1)=0$　　ゆえに　$x=2,\ \dfrac{1}{2}$

[2]　$t=-\dfrac{10}{3}$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{10}{3}$

両辺に $3x\,(\fallingdotseq 0)$ を掛けて整理すると　$3x^2+10x+3=0$

よって　$(x+3)(3x+1)=0$　　ゆえに　$x=-3,\ -\dfrac{1}{3}$

[1]，[2] から，最も大きい解は　イ $2$　　最も小さい解は　ウ $-3$

17

解説

(1) [1] 辺 AB の垂直二等分線は，辺 AB の中点を通り直線 AB に垂直である。

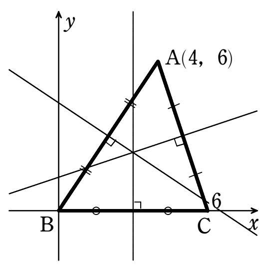
辺 AB の中点の座標は　$(2,\ 3)$

また，直線 AB の傾きは　$\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

よって，辺 AB の垂直二等分線の方程式は

$$y-3=-\frac{2}{3}(x-2)$$

すなわち　$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{13}{3}$　……①




[2] 辺 BC の垂直二等分線は，辺 BC の中点を通り直線 BC に垂直である。

辺 BC の中点の座標は　$(3,\ 0)$

よって，辺 BC の垂直二等分線は，点 $(3,\ 0)$ を通り $x$ 軸に垂直であるから，その方程式は　$x=3$　……②

[3] 辺 CA の垂直二等分線は，辺 CA の中点を通り直線 CA に垂直である。

辺 CA の中点の座標は　$(5,\ 3)$

また，直線 CA の傾きは　$\dfrac{6-0}{4-6}=-3$

よって，辺 CA の垂直二等分線の方程式は

$$y-3=\frac{1}{3}(x-5)\quad すなわち\quad y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\quad ……③$$

② を ①，③ に代入すると，ともに　$y=\dfrac{7}{3}$

したがって，△ABC の各辺の垂直二等分線は 1 点 $\left(3,\ \dfrac{7}{3}\right)$ で交わる。

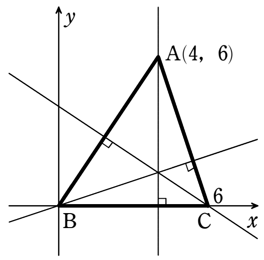
(2) [1] A から辺 BC に下ろした垂線は，A を通り $x$ 軸に垂直であるから，その方程式は

$x=4$　……①

[2] 直線 CA の傾きは　$-3$

よって，B から辺 CA に下ろした垂線の方程式は

$$y=\frac{1}{3}x\quad ……②$$




[3] 直線 AB の傾きは　$\dfrac{3}{2}$

よって，C から辺 AB に下ろした垂線の方程式は

$$y-0=-\frac{2}{3}(x-6)\quad すなわち\quad y=-\frac{2}{3}x+4\quad ……③$$

① を ②，③ に代入すると，ともに　$y=\dfrac{4}{3}$

したがって，△ABC の各頂点から対辺に下ろした垂線は 1 点 $\left(4,\ \dfrac{4}{3}\right)$ で交わる。

参考　求めた交点は (1) △ABC の外心 (2) △ABC の垂心 である。

18

解説

$x^2+y^2=1$ ……①，$(x-a)^2+(y-2a)^2=4$ ……② とする。

円 ① の中心は $(0,\ 0)$，半径は 1　　円 ② の中心は $(a,\ 2a)$，半径は 2

2 円の中心間の距離を $d$ とすると　$d=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}\,|a|$

$a>0$ であるから　$d=\sqrt{5}\,a$

(1) 2 円の共有点がないのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1] 円 ① が円 ② の内部にあるとき

$d<2-1$　すなわち　$\sqrt{5}\,a<1$

よって　$a<\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

[2] 円 ① が円 ② の外部にあるとき

$d>2+1$　すなわち　$\sqrt{5}\,a>3$

よって　$a>\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

したがって，求める $a$ の値の範囲は，$a>0$ に注意して　$0<a<\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{3}{\sqrt{5}}<a$

(2) 2 円の共有点が 1 個であるのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1] 円 ① が円 ② に内接するとき

$d=2-1$　すなわち　$\sqrt{5}\,a=1$

よって　$a=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

[2] 2 円が外接するとき

$d=2+1$　すなわち　$\sqrt{5}\,a=3$

よって　$a=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

したがって，求める $a$ の値は　$a=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

(3) 2 円の共有点が 2 個であるための条件は

$2-1<d<2+1$　すなわち　$1<\sqrt{5}\,a<3$

よって　$\dfrac{1}{\sqrt{5}}<a<\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

別解　共有点が 2 個のときの $a$ の値の範囲は，正の数全体から (1)，(2) の範囲を除いて

$$\frac{1}{\sqrt{5}}<a<\frac{3}{\sqrt{5}}$$

19

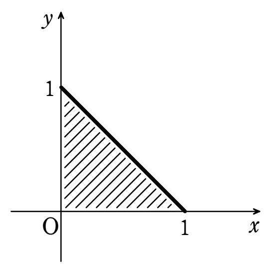
解説

3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を頂点とする三角形の内部を表す連立不等式は

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x+y<1 \end{cases}$$

点 Q $(a,\ b)$ はこの三角形の内部を動くから

$$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ a+b<1 \end{cases}\quad ……①$$




$y=x^2+ax+b$ を変形すると　$y=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$

この放物線の頂点が P $(x,\ y)$ であるから

$$x=-\frac{a}{2}\quad ……②,\qquad y=-\frac{a^2}{4}+b\quad ……③$$

② から　$a=-2x$　……④

④ を ③ に代入すると　$y=-x^2+b$

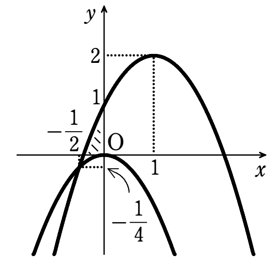
よって　$b=y+x^2$　……⑤

④，⑤ を ① に代入すると

$$\begin{cases} -2x>0 \\ y+x^2>0 \\ -2x+y+x^2<1 \end{cases}\quad すなわち\quad \begin{cases} x<0 \\ y>-x^2 \\ y<-(x-1)^2+2 \end{cases}$$

よって，P が動く範囲は右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。




20

解説

$x^2+y^2-4x-6y+12\leqq 0$ を変形すると

$$(x-2)^2+(y-3)^2\leqq 1$$

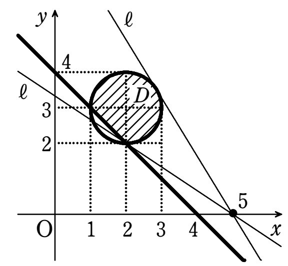
領域 $D$ は右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

直線 $\ell$ の方程式は　$y=a(x-5)$　……①

図から，$\ell$ が点 $(2,\ 2)$ を通るとき，$a$ の値は最大となる。

このとき　$2=a(2-5)$　　よって　$a=-\dfrac{2}{3}$




また，$\ell$ が領域 $D$ 上で円 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ に接するとき，$a$ の値は最小となる。

このとき，円の中心 $(2,\ 3)$ と $\ell$ の距離が円の半径 1 に等しい。

① から　$ax-y-5a=0$

よって　$\dfrac{|a\cdot 2-3-5a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1$　　ゆえに　$3|a+1|=\sqrt{a^2+1}$

両辺を 2 乗して　$9(a+1)^2=a^2+1$　　整理すると　$4a^2+9a+4=0$

これを解いて　$a=\dfrac{-9\pm\sqrt{17}}{8}$

接点が領域 $D$ 上にあるのは　$a=\dfrac{-9-\sqrt{17}}{8}$

よって　最大値 $-\dfrac{2}{3}$，最小値 $\dfrac{-9-\sqrt{17}}{8}$

21

解説

(1) 点Cの座標を $(p,\ q)$ とする。

直線 $\ell$ の傾きは1であり，直線BCは $\ell$ に垂直であるから　$1\cdot\dfrac{q-1}{p-3}=-1$

よって　$p+q=4$　……①

また，線分BCの中点が直線 $\ell$ 上にあるから　$\dfrac{q+1}{2}=\dfrac{p+3}{2}+1$

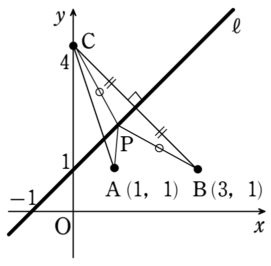
よって　$p-q=-4$　……②

①，②を連立して解くと　$p=0,\ q=4$

したがって，Cの座標は　$({}^{ア}0,\ {}^{イ}4)$

BP=CPであるから　AP+BP=AP+CP

よって，AP+BPが最小になるのは，3点A，P，Cが一直線上にあるとき，すなわち点Pが直線 $\ell$ と直線ACの交点と一致するときである。




直線ACの方程式は

$y-4=\dfrac{1-4}{1-0}(x-0)$　すなわち　$y=-3x+4$

$y=x+1$ と $y=-3x+4$ を連立して解くと

$x=\dfrac{3}{4},\ y=\dfrac{7}{4}$

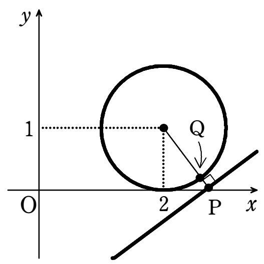
よって，AP+BPが最小となるPの座標は $\left({}^{ウ}\dfrac{3}{4},\ {}^{エ}\dfrac{7}{4}\right)$ であり，このとき

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{AC}=\sqrt{(0-1)^2+(4-1)^2}={}^{オ}\sqrt{10}$$

(2) 円の方程式を変形すると

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

よって，円の中心は点(2, 1)，半径は1である。




$y=\dfrac{3}{4}x-2$ から　$3x-4y-8=0$

よって，円の中心(2, 1)と直線の距離は

$\dfrac{|3\cdot2-4\cdot1-8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{6}{5}$

円と直線は交わらないから，線分PQの最小値は

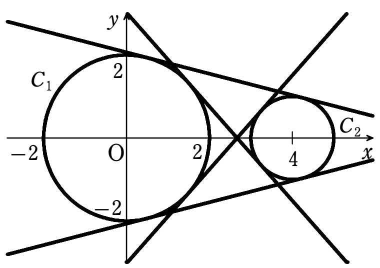
(円の中心と直線の距離)−(円の半径)$=\dfrac{6}{5}-1=\dfrac{1}{5}$

22

解説

円 $C_1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　$x_1x+y_1y=4$　……①

接線①が円 $C_2$ にも接するとき，①と円 $C_2$ の中心 $(4,\ 0)$ の距離が円 $C_2$ の半径1に等しいから




$\dfrac{|x_1\cdot4+y_1\cdot0-4|}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}}=1$　……②

ここで，点 $(x_1,\ y_1)$ は円 $C_1$ 上にあるから

${x_1}^2+{y_1}^2=4$　……③

③を②に代入すると　$|2x_1-2|=1$

よって　$x_1-1=\pm\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$x_1=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}$

$x_1=\dfrac{3}{2}$ のとき，③から　$y_1=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

接線の方程式は，①から　$3x\pm\sqrt{7}\,y=8$

$x_1=\dfrac{1}{2}$ のとき，③から　$y_1=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

接線の方程式は，①から　$x\pm\sqrt{15}\,y=8$

以上から，求める4本の接線の方程式は　$3x\pm\sqrt{7}\,y=8,\ x\pm\sqrt{15}\,y=8$

23

解説

点Pの座標を $(X,\ Y)$ とする。

点Pから放物線 $y=x^2$ に引いた接線は $x$ 軸に垂直でないから，その方程式は

$y=m(x-X)+Y$　……①

とおける。これを $y=x^2$ に代入して整理すると

$x^2-mx+mX-Y=0$

この2次方程式の判別式を $D_1$ とすると

$D_1=m^2-4(mX-Y)=m^2-4Xm+4Y$

①は放物線 $y=x^2$ の接線であるから，$D_1=0$ であり

$m^2-4Xm+4Y=0$　……②

接線が2本引けるから，傾き $m$ についての2次方程式②が異なる2つの実数解をもつ。

よって，②の判別式を $D_2$ とすると　$\dfrac{D_2}{4}=4X^2-4Y>0$

ゆえに　$X^2-Y>0$　……③

このとき，②の2つの実数解を $m_1,\ m_2$ とすると，2接線が直交するから

$m_1m_2=-1$

また，解と係数の関係から　$m_1m_2=4Y$

よって　$4Y=-1$　　ゆえに　$Y=-\dfrac{1}{4}$

このとき，③から　$X^2+\dfrac{1}{4}>0$

これは常に成り立つから，$X$ は任意の実数の値をとる。

したがって，求める軌跡は　直線 $y=-\dfrac{1}{4}$

24

解説

$x=\alpha+\beta,\ y=\alpha\beta$ とおく。

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta<1$ から　$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta<1$

よって　$x^2-y<1$　　ゆえに　$y>x^2-1$　……①

また，$\alpha,\ \beta$ は2次方程式 $t^2-xt+y=0$ の実数解であるから，その判別式 $D$ について

$D=(-x)^2-4\cdot1\cdot y\geqq0$

よって　$y\leqq\dfrac{1}{4}x^2$　……②

①，②から，点Qの動く範囲は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線は放物線 $y=x^2-1$ 上の点を含まないで，他は含む。