高 3 物理総合 S～夏期講習会第 3 回～ ＜解答＞◆電気力学◆

＜予習用問題＞

【１】

＜解答＞

[A](ア) $\dfrac{3Q}{4\pi R^3}$　(イ) $\dfrac{Qr^3}{R^3}$　(ウ) $\dfrac{4\pi kQr^3}{R^3}$　(エ) $\dfrac{kQr}{R^3}$　(オ) Q

(カ) $4\pi kQ$　(キ) $\dfrac{kQ}{r^2}$　(ク) $\dfrac{kQ}{r}$

[B](ケ) $-\dfrac{kQ^2}{r}$　(コ) $\dfrac{kQ^2r}{R^3}$　(サ) $\dfrac{Q}{R}\sqrt{\dfrac{k}{mR}}$

(い) ②　(ろ) ②　(は) ②　(に) ④　(ほ) ①

＜解説＞

[A](ア) 半径 R の球の体積は $\dfrac{4}{3}\pi R^3$ なので，単位体積当たりの電気量は

$$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\boldsymbol{\frac{3Q}{4\pi R^3}}$$

(イ) (ア)の式に半径 r の球の体積をかけて

$$\frac{3Q}{4\pi R^3}\times\frac{4}{3}\pi R^3=\boldsymbol{\frac{Qr^3}{R^3}}$$

(ウ) $4\pi kq$ の q に(イ)の式を代入すればよいので

$$\boldsymbol{\frac{4\pi kQr^3}{R^3}}$$

(エ) 半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ であり, 球面に垂直に(ウ)本の電気力線が一様に分布しているので，点 P における電場の強さは

$$\frac{\frac{4\pi kQr^3}{R^3}}{4\pi r^2}=\boldsymbol{\frac{kQr}{R^3}}$$

(い) 正電位なので …②

(オ) 半径 r の球の内部に，半径 R の球全体がすっぽりと含まれるので，$\boldsymbol{Q}$

(カ) (オ)より，$\boldsymbol{4\pi kQ}$ [本]である。

(キ) $4\pi kQ$ [本]の電気力線が，表面積 $4\pi r^2$ の球面を一様かつ垂直に貫いているから，点 P における電場の強さは $\dfrac{4\pi kQ}{4\pi r^2}=\boldsymbol{\dfrac{kQ}{r^2}}$

(ろ) 正電荷なので …②

(は) (エ)および(キ)から，E は $0<r<R$ では r に比例し，$r>R$ では r^2 に反比例することがわかる。よって，E-r グラフは …②

(ク)　(キ)より $r>R$ における電場の強さは，点電荷 Q が点 O にある場合と等しいので，無限遠点を基準としたときの電位も $r>R$ (無限遠点も $r>R$ にある)に限れば点電荷の場合と等しくなる。すなわち　$V=\boldsymbol{\frac{kQ}{r}}$

(に)　問題文のとおり，無限遠点から距離 r の位置まで，静電気力に逆らって＋1C をゆっくり移動させるのに必要な仕事が V であるから $r=R$ のとき $V=\frac{kQ}{R}$ となり，さらに $r<R$ にまで＋1C を移動させるのに必要な仕事は，図 a の斜線部の面積であるから，これを $r=R$ まで移動させるのに必要な仕事 $\frac{kQ}{R}$ に足したものが $0<r<R$ における V となる。つまり

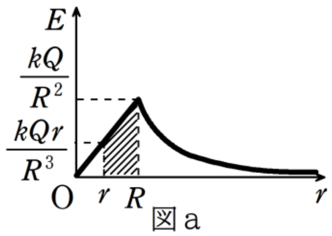


図 a

$$V=\frac{kQ}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{kQr}{R^3}+\frac{kQ}{R^2}\right)(R-r)$$

$$=\frac{kQ}{R}+\frac{kQ}{2R^3}(R+r)(R-r)$$

$$=-\frac{kQ}{2R^3}\,r^2+\frac{3kQ}{2R}$$

このグラフは，軸が $r=0$ の上に凸の放物線である。(ク)より $r>R$ では，V は r に反比例するので V-r グラフは　…④

[B](ケ)　静電気力による位置エネルギーは $r>R$ では

$$-QV=-\boldsymbol{\frac{kQ^2}{r}}$$

(コ)　静電気力の大きさは $0<r<R$ では

$$|-QE|=\boldsymbol{\frac{kQ^2r}{R^3}}$$

(ほ)　力の向きは，負電荷なので電場と逆向きである。　…①

(サ)　加速度を a とすれば，運動方程式は

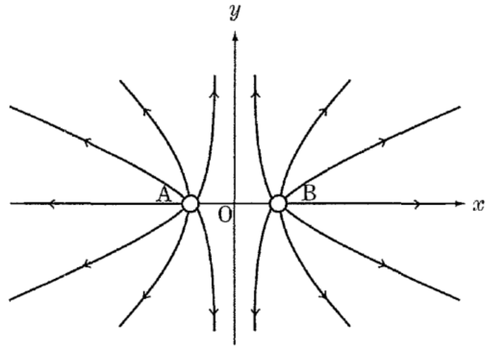
$$ma=-\frac{kQ^2}{R^3}r\quad よって\quad a=-\frac{kQ^2}{mR^3}r$$

ゆえに $r=0$ を振動の中心とする単振動を行う。角振動数を ω とすれば

$$a=-\omega^2 r\quad したがって\quad \omega=\boldsymbol{\frac{Q}{R}\sqrt{\frac{k}{mR}}}$$

【２】

〔Ｉ〕(１) 右図



(２) 荷電粒子の電荷を q ，質量を m とする。運動開始点の電位を V とし，無限遠点での速度を v とすると，力学的エネルギー保存則

より，$\frac{1}{2}mv^2 = qV \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$

運動開始点の電位 V は,

$$V = \frac{2\times 9.0\times 10^{9}\times 5.0\times 10^{-12}}{5.0\times 10^{-2}} = 1.8[\mathrm{V}]$$

q，m の数値を代入して，$v = \sqrt{\frac{2\times 1.6\times 10^{-19}\times 1.8}{9.0\times 10^{-31}}} = 8.0\times 10^{5}$ [m/s]

〔II〕（1）点$(x,\ y)$での電位が 0 より，

$$0 = k\frac{Q}{\sqrt{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2 + y^2}} + k\frac{\left(-\frac{Q}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{l}{2}\right)^2 + y^2}}$$

これを変形すると，$\left(x-\frac{5}{6}l\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}l\right)^2$

これは中心$\left(\frac{5}{6}l\ ,\ 0\right)$，半径$\frac{2}{3}l$ の円である。

（2）x 軸上で $x < -\frac{l}{2}$ ，$-\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2}$ の領域には電場が 0 となる点は存在しない。

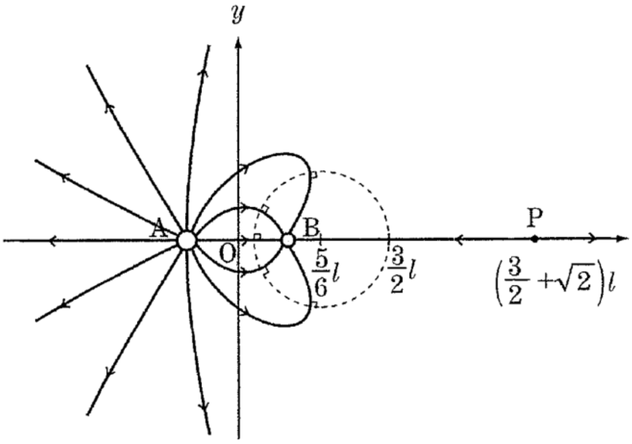
$$k\frac{Q}{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2} + k\frac{\left(-\frac{1}{2}Q\right)}{\left(x-\frac{l}{2}\right)^2} = 0 \qquad \therefore x = \left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)l \qquad \left(\because x > \frac{l}{2}\right)$$

よって点 P の座標は$\left(\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)l\ ,\ 0\right)$

（3）点 B を中心とする円周上では，点 B の点電荷による電位は等しい値となる。
したがって，合成電位が最も低い点は，点 A の点電荷による電位が最低，すなわち，
点 A から最も遠い点であり，x 軸上$\left(ただし，x > \frac{l}{2}\right)$ にある。

（4）電荷から出入りする電気力線の本数は電荷に比例している。したがって，
電荷 Q から出る電気力線の内，半数が電荷$-\frac{Q}{2}$ に到達し，残りの半数は無限遠方に達すると考えられる。電荷 Q のごく近傍では電荷$-\frac{Q}{2}$ の影響は無視できるので，電気力線の分布は等方的とみなしてよい。この内，電荷$-\frac{Q}{2}$ に到達する電気力線は電荷$-\frac{Q}{2}$ に近い側の点 A を中心とする微小半径の球面の右半分を通過するので，線分 AB となす角度θ の満たす条件は $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$

（5）



＜演習問題＞

【１】〔Ｉ〕（１）水平方向に関する力のつりあいより

$mg\tan\theta - Bql\omega\sin\theta - ml\omega^2\sin\theta = 0$

また，$B>0$ のとき

$mg\tan\theta$: R→O の向き，糸の張力の水平成分

$Bql\omega\sin\theta$: O→R の向き，ローレンツ力

$ml\omega^2\sin\theta$: O→R の向き，遠心力

（２）（１）の結果を整理すると $\omega^2 + \dfrac{Bq}{m}\omega - \dfrac{g}{l\cos\theta} = 0$ となる。

よって，$\omega = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{Bq}{m} \pm \sqrt{\left(\dfrac{Bq}{m}\right)^2 + \dfrac{4g}{l\cos\theta}}\right)$ となるが，$\omega > 0$ とすると

$$\omega = \frac{1}{2}\left(-\frac{Bq}{m} + \sqrt{\left(\frac{Bq}{m}\right)^2 + \frac{4g}{l\cos\theta}}\right)$$

（３）B の絶対値が十分に大きい場合，$\left(\dfrac{Bq}{m}\right)^2 \gg \dfrac{4g}{l\cos\theta}$ が成り立つものとすると，

近似式を用いて

$B>0$ のとき

$$\omega = \frac{1}{2}\left[-\frac{Bq}{m} + \frac{Bq}{m}\left\{1 + \frac{4g}{l\cos\theta}\left(\frac{m}{Bq}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right] \fallingdotseq \frac{1}{2}\left[-\frac{Bq}{m} + \frac{Bq}{m}\left\{1 + \frac{1}{2}\times\frac{4g}{l\cos\theta}\left(\frac{m}{Bq}\right)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{mg}{Bql\cos\theta} \to 0$$

$B<0$ のとき $\sqrt{\left(\dfrac{Bq}{m}\right)^2} = -\dfrac{Bq}{m}$ なので，

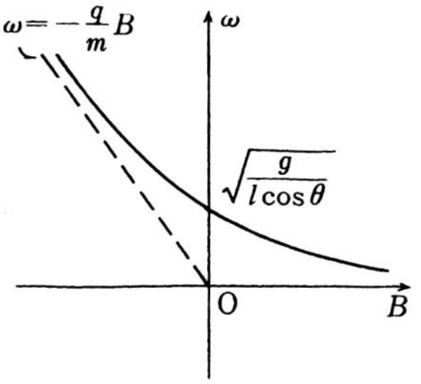
$$\omega=\frac{1}{2}\left[-\frac{Bq}{m}-\frac{Bq}{m}\left\{1+\frac{4g}{l\cos\theta}\left(\frac{m}{Bq}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]\fallingdotseq\frac{1}{2}\left[-\frac{Bq}{m}-\frac{Bq}{m}\left\{1+\frac{1}{2}\times\frac{4g}{l\cos\theta}\left(\frac{m}{Bq}\right)^2\right\}\right]$$

$$\fallingdotseq-\frac{Bq}{m}$$

となる。また，$B=0$ のときは，（２）の式より

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$$

したがって，ωと B の関係を表すグラフは，右図のようになる。漸近線は，$B>0$ では B 軸，$B<0$ では，直線 $\omega=-\dfrac{q}{m}B$ である。



〔Ⅱ〕（１）鉛直方向については，糸の張力の鉛直成分と重力がつりあっている。水平方向については，磁界が上向きで十分に大きい場合，$\omega\to0$ となって遠心力が無視できるから，主として，糸の張力の水平成分とローレンツ力がつりあう。

（２）鉛直方向については，糸の張力の鉛直成分と重力がつりあっている。水平方向については，磁界が下向きで十分に大きい場合，ω も大きくなり，糸の張力の水平成分が無視できるから主として，遠心力とローレンツ力がつりあう。

（３）位置エネルギーは $U=mg\times\mathrm{OQ}=mgl(1-\cos\theta)$である。

また，$\omega\to0$ となるから，運動エネルギーは $K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(r\omega)^2\to0$ であり

U の方が大きい。

（４）位置エネルギーU の値は（３）と同じである。磁界が下向きで十分に大きい場合，

ωも大きくなり，運動エネルギー$K=\frac{1}{2}m(r\omega)^2$ の値も十分大きくなるから

K の方が大きい。

【２】〔Ⅰ〕（１）円筒の中点 C から荷電粒子の位置までの距離を x とする（右図)。円筒を水平面内で点 C の回りに角速度ωで回転させるとき，粒子には遠心力が作用し，その大きさは $mx\omega^2$ である。また，粒子は速さ $v=x\omega$ で回転運動することになり，ローレンツ力が円筒の方向に作用するが，これが点 C を向けば粒子は逃げない。

したがって，円筒は右回転をさせればよい。

また，ローレンツ力の大きさは $qvB=qx\omega B$ なので，$qx\omega B\ \geqq mx\omega^2$　　　$\therefore\omega\leqq\dfrac{qB}{m}$

（２）荷電粒子が点 C から距離 x の位置にあるとき，円筒に沿って外向きを正とすると，粒子に作用する力は $F=mx\omega^2-qx\omega B=-\omega(qB-m\omega)x$　となるので，単振動である。

よって，単振動の周期は $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$ より $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\omega(qB-m\omega)}}$

（3）荷電粒子を円筒から逃がすには，（1）より$\omega > \dfrac{qB}{m}$ が必要である。

円筒を回転させる仕事は，粒子の運動エネルギーになるから，粒子を逃がすのに必要な仕事が最小になるのは，円筒の端 $x = L$ にあった粒子が飛び出る場合である。

このとき，粒子の速さ V は $V = L\omega > \dfrac{qBL}{m}$ なので，円筒の回転に要する仕事は

$$\frac{1}{2}mV^2 > \frac{m}{2}\left(\frac{qBL}{m}\right)^2 = \frac{(qBL)^2}{2m} \quad (=W)$$

〔Ⅱ〕（1）2 つの荷電粒子は同じ条件なので，一方だけについて考察すればよい。

力のつり合いより，

$$N + q \cdot L\omega \cdot B = mL\omega^2 + k\frac{q^2}{(2L)^2} \quad \cdots ① \qquad \therefore N = L\omega(m\omega - qB) + \frac{kq^2}{4L^2}$$

（2）荷電粒子がフタから離れると $N = 0$ なので，①より $m\omega^2 - qB\omega + \dfrac{kq^2}{4L^3} = 0 \quad \cdots ②$

となる。これをωに関する 2 次方程式とみなすと，ωの実数値が解として存在するためには，$(qB)^2 - 4m \cdot \dfrac{kq^2}{4L^3} > 0 \qquad \therefore B^2L^3 > km$

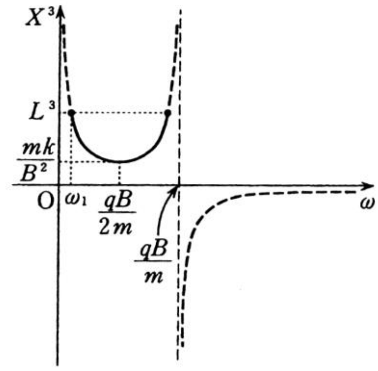
（3）②より$\omega = \dfrac{qB}{2m} \pm \sqrt{\left(\dfrac{qB}{2m}\right)^2 - \dfrac{kq^2}{4mL^3}}$ となる。題意より，小さい方の解がω_1なので

$$\omega_1 = \frac{qB}{2m} - \sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 - \frac{kq^2}{4mL^3}}$$ となる。

ゆっくりと角速度を上げていくと，各瞬間，荷電粒子に作用する力はつり合っているとみなせる。角速度がωのとき，点 C から粒子の位置までの距離を X とすると，

②と同様にして$\omega(m\omega - qB) + \dfrac{kq^2}{4X^3} = 0$

$\therefore X^3 = \dfrac{kq^2}{4\omega(qB - m\omega)}$ が得られ，ωと X^3 の関係を表すグラフは右図のようになる。



したがって，ωをω_1よりゆっくり大きくしていくと，つり合いの位置は中点 C に近づき，$\omega = \dfrac{qB}{2m}$ のときに最も近づくが，$X = 0$ とはならない。この後，粒子はフタに向かって戻り，フタに再び達した後は中点 C に向かうことはない。

よって(c)