$\boxed{1}$

解説

(1)　$f(x)=(x-1)^2+1$，　$g(x)=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}+a$

題意の条件は，$[f(x)$ の最小値$]\geqq[g(x)$ の最大値$]$ が成り立つことと同じである。

よって　$1\geqq\dfrac{a^2}{4}+a$　　ゆえに　$a^2+4a-4\leqq 0$

これを解くと　$-2-2\sqrt{2}\leqq a\leqq -2+2\sqrt{2}$

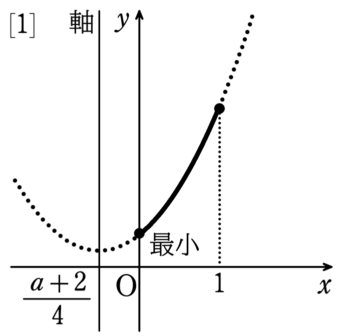
(2)　$f(x)-g(x)=h(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}h(x)&=2x^2-(a+2)x+2-a\\&=2\left(x-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{1}{8}(a+2)^2+2-a\\&=2\left(x-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{1}{8}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$y=h(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は

直線 $x=\dfrac{a+2}{4}$

題意の条件は，$0\leqq x\leqq 1$ において，$[h(x)$ の最小値$]\geqq 0$ が成り立つことと同じである。



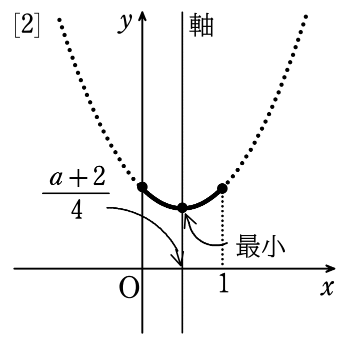
[1]　$\dfrac{a+2}{4}<0$ すなわち $a<-2$ のとき

求める条件は　$h(0)\geqq 0$　すなわち　$2-a\geqq 0$

よって　$a\leqq 2$

$a<-2$ との共通範囲は　$a<-2$

[2]　$0\leqq\dfrac{a+2}{4}\leqq 1$ すなわち $-2\leqq a\leqq 2$ のとき



求める条件は　$-\dfrac{1}{8}a^2-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{3}{2}\geqq 0$

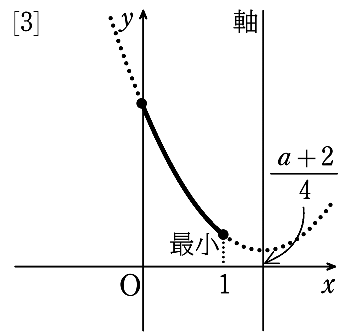
ゆえに　$a^2+12a-12\leqq 0$

これを解くと　$-6-4\sqrt{3}\leqq a\leqq -6+4\sqrt{3}$

$-2\leqq a\leqq 2$ との共通範囲は

$-2\leqq a\leqq -6+4\sqrt{3}$

[3]　$1<\dfrac{a+2}{4}$ すなわち $a>2$ のとき



求める条件は　$h(1)\geqq 0$

すなわち　$2-a-2+2-a\geqq 0$

よって　$a\leqq 1$　　$a>2$ との共通範囲はない。

[1] と [2] で求めた範囲を合わせて

$a\leqq -6+4\sqrt{3}$

$\boxed{2}$

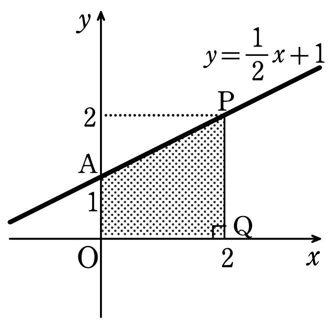
(解説)

(1)　$y=\frac{1}{2}x+1$ に $x=2$ を代入すると

$$y=\frac{1}{2}\cdot 2+1=2$$

したがって，P(2，2) であるから，台形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot 2=3$$



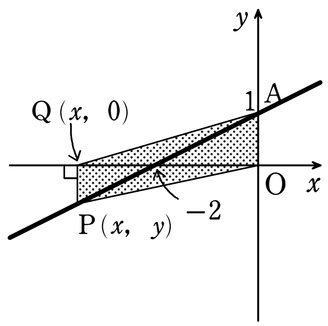
(2)　$x<-2$ のとき，

$y=\frac{1}{2}x+1<0$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot\{1+(-y)\}\cdot(-x)$$

$$=\frac{1}{2}x(y-1)$$

$$=\frac{1}{2}x\left\{\left(\frac{1}{2}x+1\right)-1\right\}=\frac{1}{4}x^2$$



(3)　[1]　$x>0$ のとき

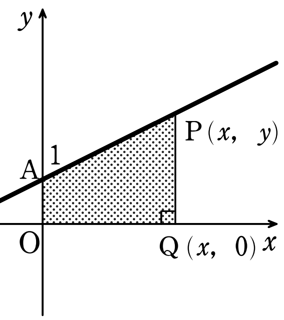
$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot(1+y)\cdot x=\frac{1}{2}x(y+1)$$

$$=\frac{1}{2}x\left\{\left(\frac{1}{2}x+1\right)+1\right\}$$

$$=\frac{1}{4}x^2+x$$

$$=\frac{1}{4}(x+2)^2-1$$

[1]



[2]　$-2<x<0$ のとき

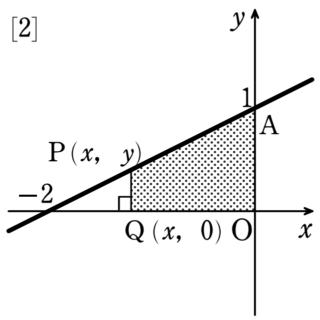
$$S(x)=\frac{1}{2}\cdot(1+y)\cdot(-x)$$

$$=-\frac{1}{2}x(y+1)$$

$$=-\left(\frac{1}{4}x^2+x\right)$$

$$=-\frac{1}{4}(x+2)^2+1$$

[2]

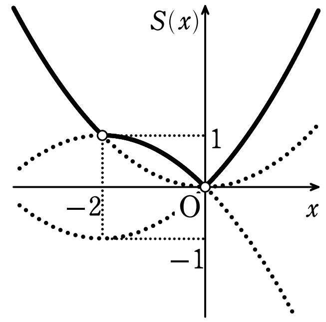


[3]　$x<-2$ のとき，(2) から　　$S(x)=\frac{1}{4}x^2$

[4]　$x=0$，-2 のとき

図形 OAPQ は台形にならない。

したがって，$S(x)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。



$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$y=x^2-ax-a$，$y=ax^2+ax$ から y を消去して　　$x^2-ax-a=ax^2+ax$

整理して　　$(a-1)x^2+2ax+a=0$　……①

C，D が異なる 2 点で交わるための条件は，① が 2 次方程式で，異なる 2 つの実数解をもつことであるから　　$a \fallingdotseq 1$　かつ　$a^2-(a-1)a>0$

よって　　$a \fallingdotseq 1$　かつ　$a>0$

これらと $a \geqq 1$ の共通範囲を求めて　$a>1$

(2)　$a>1$ のとき，① の 2 つの解を α，β $(\alpha \fallingdotseq \beta)$ とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-\frac{2a}{a-1}$$

また，C と D の 2 つの交点の座標は　　$(\alpha,\ \alpha^2-a\alpha-a)$，$(\beta,\ \beta^2-a\beta-a)$

よって　$m=\dfrac{(\beta^2-a\beta-a)-(\alpha^2-a\alpha-a)}{\beta-\alpha}=\beta+\alpha-a=-\dfrac{2a}{a-1}-a$

$$=-\left(2+\frac{2}{a-1}\right)-a=-\left(a-1+\frac{2}{a-1}+3\right)$$

$a-1>0$，$\dfrac{2}{a-1}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$a-1+\frac{2}{a-1} \geqq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{2}{a-1}}=2\sqrt{2}$$

よって　$m \leqq -3-2\sqrt{2}$

等号が成り立つのは $a-1=\dfrac{2}{a-1}$ のときである。

このとき　$(a-1)^2=2$　　　ゆえに　　$a=1\pm\sqrt{2}$

$a>1$ であるから　　$a=1+\sqrt{2}$

よって，m は $a=1+\sqrt{2}$ で最大値 $-3-2\sqrt{2}$ をとる。

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$x^2+xy+y^2=1$ から　　$y^2+xy+(x^2-1)=0$

これを満たす実数 y が存在するから，判別式 D について

$$D=x^2-4(x^2-1) \geqq 0 \quad すなわち \quad x^2 \leqq \frac{4}{3}$$

よって　　$-\dfrac{2}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(2)　$f(y)=y^2+xy+(x^2-1)$ とおくと　　$f(y)=\left(y+\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x^2-1$

$z=f(y)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $y=-\dfrac{x}{2}$ である。

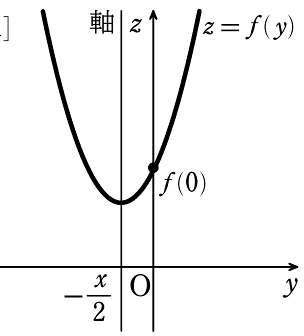
[1]　$-\dfrac{x}{2} \leqq 0$　すなわち　$x \geqq 0$ のとき

求める条件は　　$f(0) \geqq 0$　すなわち　$x^2-1 \geqq 0$

よって　　$x \leqq -1$，$1 \leqq x$

$x \geqq 0$ との共通範囲は　　$x \geqq 1$

[1]



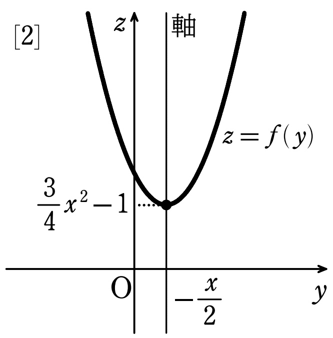
[2]　$-\dfrac{x}{2}>0$　すなわち　$x<0$ のとき

求める条件は　　$\dfrac{3}{4}x^2-1>0$　すなわち　$x^2>\dfrac{4}{3}$

よって　　$x<-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{2}{\sqrt{3}}<x$

$x<0$ との共通範囲は　　$x<-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

[2]



以上から　　$x<-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$1 \leqq x$

(3)　$x^2+xy+y^2>x+y$ から　　$y^2+(x-1)y+(x^2-x)>0$

よって　　$\left(y+\dfrac{x-1}{2}\right)^2+\dfrac{3x^2-2x-1}{4}>0$

これがすべての実数 y について成り立つための条件は　　$\dfrac{3x^2-2x-1}{4}>0$

よって　　$(3x+1)(x-1)>0$　　　　ゆえに　　$x<-\dfrac{1}{3}$，$1<x$