第２章

～　２次関数　～

第１講　２次関数とグラフ

1　関数とグラフ　　$\boxed{\text{研究}}$　**座標平面上の点と象限**

$\boxed{1}$　関数

1　2つの変数 x，y について，x の値を決めるとそれに応じて y の値がただ1つ定まるとき，y は x の **関数** であるという。

2　1次関数，2次関数の一般形

1次関数は　$y=ax+b$　　ただし，$a \fallingdotseq 0$

2次関数は　$y=ax^2+bx+c$　　ただし，$a \fallingdotseq 0$

3　y が x の関数であるとき，y を表す x の式を $f(x)$，$g(x)$ などと書く。

関数 $y=f(x)$ について，x のとりうる値の範囲を関数 $f(x)$ の **定義域**，定義域の x の値に応じて y がとる値の範囲を関数 $f(x)$ の **値域** という。

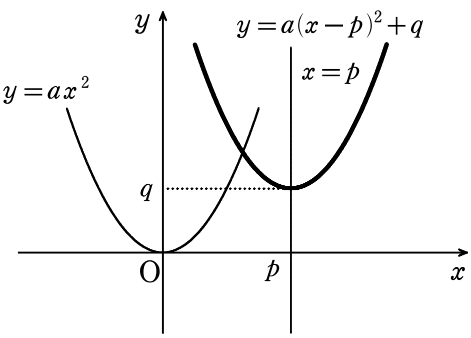
2　２次関数のグラフ　　$\boxed{\text{研究}}$　**グラフの平行移動**　　$\boxed{\text{研究}}$　**グラフの対称移動**

$\boxed{1}$　２次関数 $y=ax^2$ のグラフ

1　軸は y 軸，頂点は原点の放物線である。

2　$a>0$ のとき　下に凸，

$a<0$ のとき　上に凸



$\boxed{2}$　２次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線である。

その軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ q)$ である。

$\boxed{3}$　２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

$y=a(x-p)^2+q$ の形に変形すると $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ であるから

軸は　直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，　　頂点は　点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

2次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを，**平方完成** するという。

第１講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

$f(x)=3x^2-5x+7$ について，次の値を求めよ。

(1)　$f(0)$　　(2)　$f(2)$　　(3)　$f(-3)$　　(4)　$f(a+1)$

$\boxed{2}$ ★☆☆

次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=-x^2+3$　　(2)　$y=3(x+1)^2$　　(3)　$y=2(x-1)^2-4$

$\boxed{3}$ ★☆☆

次の２次関数を平方完成せよ。

(1)　$y=x^2-8x+12$　　(2)　$y=2x^2-4x-1$　　(3)　$y=-3x^2+3x+1$

$\boxed{4}$ ★★☆

次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+4x+1$　　(2)　$y=-2x^2+4x+3$

(3)　$y=\dfrac{1}{3}x^2+2x$　　(4)　$y=-(x-2)(2x+1)$

$\boxed{5}$ ★★★

関数　$y=\begin{cases} x^2 & (0\leqq x\leqq 1) \\ -x^2+4x-2 & (1<x\leqq 3) \end{cases}$　のグラフをかけ。

$\boxed{6}$ ★★★

次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=x^2-4|x|+2$　　(2)　$y=x|x-2|+3$

第１講　例題演習

$\boxed{1}$

次の値を求めよ。

(1)　$f(x)=4x-1$ のとき　$f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$

(2)　$f(x)=-2x+\dfrac{1}{3}$ のとき　$f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{6}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{8}\right)$

(3)　$g(x)=2x^2-2x+3$ のとき　$g(1)$，$g(-3)$，$g(a+1)$

$\boxed{2}$

次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2-2$　　(2)　$y=-2x^2-1$　　(3)　$y=(x+3)^2$

(4)　$y=-\dfrac{1}{2}(x-1)^2$　　(5)　$y=(x-2)^2+1$

(6)　$y=-2(x+2)^2+5$　　(7)　$y=\dfrac{1}{2}(x+3)^2-1$

$\boxed{3}$

次の２次関数を平方完成せよ。

(1)　$y=x^2+10x$　　(2)　$y=x^2-4x+9$　　(3)　$y=x^2+8x-6$

(4)　$y=-x^2+4x-4$　　(5)　$y=3x^2-12x+4$　　(6)　$y=x^2-x+3$

(7)　$y=-x^2-7x-12$　　(8)　$y=3x^2+9x+18$　　(9)　$y=-2x^2+5x-1$

$\boxed{4}$

次の２次関数のグラフをかけ。また，その軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2-2x-2$　　(2)　$y=2x^2+8x-1$

(3)　$y=-x^2-6x-5$　　(4)　$y=-3x^2+6x-4$

(5)　$y=x^2-3x+3$　　(6)　$y=-2x^2-5x-1$

(7)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2-2x$　　(8)　$y=(x+2)(x-1)$

$\boxed{5}$

関数　$y=\begin{cases} x^2+2x & (-2\leqq x\leqq 1) \\ -x^2+4x & (1<x\leqq 3) \end{cases}$　のグラフをかけ。

$\boxed{6}$

次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=x^2-3|x|+2$　　(2)　$y=|x+1|(x-2)$

第１講　レベルA

$\boxed{1}$ [中部大]

放物線 $y=x^2-2(a+1)x+a^2-2$ の頂点が第 2 象限にあるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ [慶応義塾大]

(1)　放物線 $y=x^2+ax-2$ の頂点の座標を a で表せ。また，頂点が直線 $y=2x-1$ 上にあるとき，定数 a の値を求めよ。

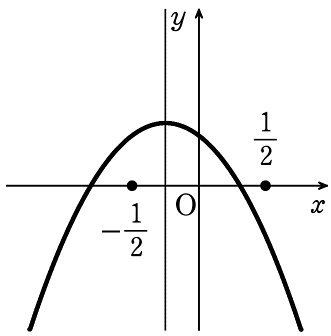
(2)　2 つの放物線 $y=2x^2-12x+17$ と $y=ax^2+6x+b$ の頂点が一致するように定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{3}$

右の図は，関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフである。
次の式の符号を調べよ。

(1)　a　　(2)　b　　(3)　c　　(4)　b^2-4ac

(5)　$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c$　　(6)　$a-b$



$\boxed{4}$ [愛媛大]

関数 $y=x^2-3x+7-3|x-2|$ のグラフをかけ。

第１講　レベルＢ

$\boxed{1}$

関数 $f(x)$ $(0\leqq x\leqq 4)$ を，$f(x)=\begin{cases}2x & (0\leqq x<2)\\ 8-2x & (2\leqq x\leqq 4)\end{cases}$ のように定義するとき，次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=f(x)$　　　　(2)　$y=f(f(x))$

$\boxed{2}$

$[a]$ は実数 a を超えない最大の整数を表すものとする。

(1)　$[2.3]$，$[1]$，$[-\sqrt{3}]$ の値を求めよ。

(2)　関数 $y=2[x]$ $(-3\leqq x\leqq 2)$ のグラフをかけ。

第２講　グラフの移動・２次関数の決定

$\boxed{4}$　グラフの平行移動，対称移動

関数 $y=f(x)$ のグラフについて

1　x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，次のようになる。

$$y=f(x) \longrightarrow y-q=f(x-p) \quad \text{すなわち} \quad y=f(x-p)+q$$

2　x 軸，y 軸，原点に関して対称移動すると，次のようになる。

	x 軸	y 軸	原点
$y=f(x)$	$-y=f(x)$	$y=f(-x)$	$-y=f(-x)$

３　２次関数の決定

1　与えられた条件によって，求める２次関数を適した形において，未定の係数を定める。

[1]　$y=ax^2+bx+c$　　　　[2]　$y=a(x-p)^2+q$

2　$y=f(x)$ のグラフが点 $(s,\ t)$ を通る。$\Longleftrightarrow$ 等式 $t=f(s)$ が成り立つ。

第２講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

放物線 $y=2x^2-8x+5$ をどのように平行移動すると，放物線 $y=2x^2+4x+7$ に重なるか。

$\boxed{2}$ ★☆☆

放物線 $y=3x^2-6x+4$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ ★☆☆

放物線 $y=-2x^2+3x-1$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

$\boxed{4}$ ★★☆

ある放物線を y 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，放物線 $y=-2x^2+16x-29$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$ ★☆☆

次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1)　グラフの頂点が点 $(1,\ 3)$ で，点 $(0,\ 5)$ を通る。

(2)　グラフの軸が直線 $x=-1$ で，2 点 $(-2,\ 9)$，$(1,\ 3)$ を通る。

(3)　3 点 $(-1,\ 9)$，$(1,\ -1)$，$(2,\ 0)$ を通る。

$\boxed{6}$ ★★☆

グラフが放物線 $y=2x^2+3x-5$ を平行移動したもので，2 点 $(2,\ -2)$，$(3,\ 0)$ を通るような 2 次関数を求めよ。

第２講　例題演習

$\boxed{1}$

放物線 $y=x^2-3x+2$ をどのように平行移動すると，放物線 $y=x^2+x+1$ に重なるか。

$\boxed{2}$

放物線 $y=2x^2-7x+3$ を，次のように平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸方向に 1　　(2)　y 軸方向に -3

(3)　x 軸方向に -3，y 軸方向に 1　　(4)　x 軸方向に 2，y 軸方向に -1

$\boxed{3}$

放物線 $y=x^2-5x+2$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

$\boxed{4}$

(1)　x 軸方向に -2，y 軸方向に 5 だけ平行移動すると，放物線 $y=3x^2+4x$ に移るような放物線の方程式を求めよ。

(2)　ある放物線を，x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，更に x 軸に関して対称移動すると，放物線 $y=x^2-6x+7$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$

次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1)　グラフの頂点が点 $(1,\ 3)$ で，点 $(-1,\ 4)$ を通る。

(2)　グラフの軸が直線 $x=4$ で，2 点 $(2,\ 1)$，$(5,\ -2)$ を通る。

(3)　3 点 $(-2,\ 16)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 21)$ を通る。

$\boxed{6}$

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　放物線 $y=-3x^2+4x+7$ を平行移動したもので，2 点 $(1,\ 1)$，$(2,\ -8)$ を通る。

(2)　x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると，3 点 $(0,\ 3)$，$(1,\ -2)$，$(-1,\ 10)$ を通る。

第２講　レベルＡ

$\boxed{1}$

2 次関数 $y=x^2-4x+3$ のグラフ C と点 A $(0,\ -1)$ について，次の (1)，(2) のグラフが表す 2 次関数を求めよ。

(1)　C を x 軸方向に平行移動したもので，点 A を通るグラフ

(2)　C を y 軸方向に平行移動したもので，点 A を通るグラフ

$\boxed{2}$

放物線 $y=-x^2+2x-2$ ……① を原点に関して対称に移動し，更に x 軸に関して対称に移動して得られる放物線 ② の方程式は $y=$ ア $\boxed{}$ であり，② は ① を イ $\boxed{}$ に関して対称に移動した放物線である。

$\boxed{3}$［センター本試］

a を定数とし，x の 2 次関数 $y=x^2-2(a+2)x+a^2-a+1$ のグラフを G とする。

グラフ G が y 軸に関して対称になるのは $a=$ ア $\boxed{}$ のときで，このときのグラフを G_1 とする。

また，グラフ G の頂点が x 軸上にあるのは $a=$ イ $\boxed{}$ のときで，このときのグラフを G_2 とする。

グラフ G_1 を x 軸方向に ウ $\boxed{}$，y 軸方向に エ $\boxed{}$ だけ平行移動するとグラフ G_2 に重なる。

$\boxed{4}$

放物線 $y=x^2+2ax+b$ が点 $(1,\ 1)$ を通り，頂点が直線 $y=-x-4$ 上にあるとき，定数 a，b の値を求めよ。

第２講　レベルＢ

$\boxed{1}$

放物線 $y=2x^2+3x$ を平行移動した曲線で，点 $(1,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=2x-3$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$［摂南大］

直線 $x=2$ に関して放物線 $C : y=x^2-2x+3$ と対称な曲線の方程式を求めよ。また，点 $(-1,\ 1)$ に関して放物線 C と対称な曲線の方程式を求めよ。

第３講　２次関数の最大・最小

４　**２次関数の最大・最小**

1　２次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大・最小

$a>0$ のとき，$x=p$ で最小値 q をとる。最大値はない。

$a<0$ のとき，$x=p$ で最大値 q をとる。最小値はない。

2　関数の定義域に制限のある場合の最大・最小

グラフをかいて，頂点の位置，定義域の両端における y の値に注目する。

3　最大・最小の応用(文章題)

①　何を変数 (x) にするかを決め，そのとりうる値の範囲(定義域)を定める。

②　最大・最小を求めようとする量 (y) を，変数 (x) を用いて表す。

③　変数 (x) の定義域に注意して，②で表した関数(x の式 y)の最大・最小を求める。

注　$y \geqq 0$ のとき，y の最大・最小を求めるのに，まず y^2 の最大・最小を求めると簡単な場合もある。このとき，次が成り立つことを利用する。

$$A \geqq 0,\ B \geqq 0 \text{ のとき} \qquad A<B \Longleftrightarrow A^2<B^2$$

第３講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2+4x$　　　(2)　$y=-3x^2-6x+1$

$\boxed{2}$ ★☆☆

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=2x^2-8x+5$　$(0\leqq x\leqq 3)$　　　(2)　$y=-x^2+6x-2$　$(-1\leqq x\leqq 1)$

$\boxed{3}$ ★★☆

関数 $y=x^2-4x+a$　$(0\leqq x\leqq 5)$ の最大値が 11 であるように，定数 a の値を定めよ。
また，そのときの最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ ★★☆

(1)　$x+2y+12=0$ のとき，xy の最大値を求めよ。

(2)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y=4$ のとき，x のとりうる値の範囲を求めよ。また，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

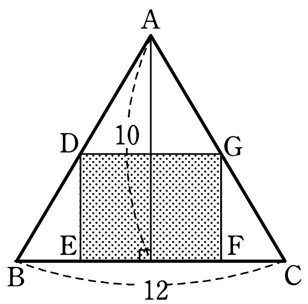
$\boxed{5}$ ★★★

(1)　x，y の関数 $P=x^2+3y^2+4x-6y+2$ の最小値を求めよ。

(2)　x，y の関数 $Q=x^2-6xy+10y^2-2x+2y+2$ の最小値を求めよ。

$\boxed{6}$ ★★☆

底辺の長さが 12，高さが 10 の二等辺三角形 ABC に，長方形 DEFG を右の図のように E，F が辺 BC 上にあるように内接させる。
EF の長さを x として，長方形 DEFG の面積 S を x で表せ。また，S の最大値と，そのときの x の値を求めよ。



第３講　例題演習

$\boxed{1}$

次の２次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-2x-3$　　(2)　$y=-2x^2+x$

(3)　$y=3x^2+4x-1$　　(4)　$y=-2x^2+3x-5$

$\boxed{2}$

次の関数に最大値，最小値があればそれを求めよ。

(1)　$y=x^2+4x-5$ $(-3\leqq x\leqq 1)$　　(2)　$y=-x^2-2x+3$ $(-1\leqq x\leqq 1)$

(3)　$y=4x^2-12x+8$ $(0\leqq x\leqq 2)$　　(4)　$y=x^2+5x+4$ $(-2\leqq x\leqq 0)$

(5)　$y=-x^2+2x-1$ $(-1\leqq x\leqq 3)$

$\boxed{3}$

関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -2 であるように，定数 c の値を定めよ。
また，そのときの最大値を求めよ。

$\boxed{4}$

(1)　$x+2y+3=0$ のとき，xy の最大値を求めよ。

(2)　$x\geqq 0$，$y\leqq 0$，$x-2y=3$ のとき，x^2+y^2 の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{5}$

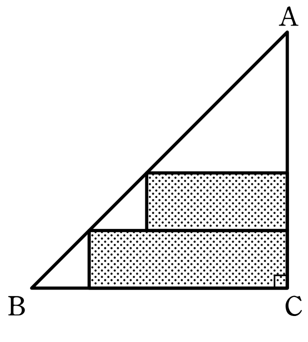
(1)　x，y の関数 $P=2x^2+y^2-4x+10y-2$ の最小値を求めよ。

(2)　x，y の関数 $Q=x^2-2xy+5y^2+6x-14y+5$ の最小値を求めよ。

なお，(1)，(2) では，最小値をとるときの x，y の値も示せ。

$\boxed{6}$

$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=6$ の直角二等辺三角形 ABC の中に，縦の長さの等しい２つの長方形が右の図のように内接している。２つの長方形の面積の和の最大値と，そのときの長方形の縦の長さを求めよ。



第３講　レベルＡ

$\boxed{1}$

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2+1$　$(-1\leqq x\leqq 3)$

(2)　$y=-x^2+4x-2$　$(0\leqq x\leqq 4)$

(3)　$y=2x^2+4x-1$　$(0\leqq x\leqq 1)$

(4)　$y=-3x^2+6x-5$　$(-1\leqq x\leqq 2)$

(5)　$y=x^2-3x+1$　$(1< x\leqq 3)$

(6)　$y=-2x^2+9x$　$(0< x< 3)$

$\boxed{2}$ [東京工芸大]

2 次関数 $y=3x^2-(3a-6)x+b$ が，$x=1$ で最小値 -2 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{3}$ [中京大]

定義域を $1\leqq x\leqq 4$ とする関数 $f(x)=ax^2-4ax+b$ の最大値が 4，最小値が -10 のとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{4}$

n が整数のとき，関数 $f(n)=-3n^2-14n+6$ の最大値とそのときの n の値を求めよ。

$\boxed{5}$ [東京情報大]

k は定数とし，2 次関数 $y=x^2+4kx+24k$ の最小値を $m(k)$ とする。

(1)　$m(k)$ を k の式で表せ。

(2)　$m(k)$ を最大にする k の値と，$m(k)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{6}$ [東京電機大]

(1)　$a>0$，$b>0$，$a+b=1$ のとき，a^3+b^3 の最小値を求めよ。

(2)　x，y，z が $x+2y+3z=6$ を満たすとき，$x^2+4y^2+9z^2$ の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

第３講　レベルＢ

$\boxed{1}$［倉敷芸術科学大］

関数 $f(x)=2x^2+ax+b$ は，$-\dfrac{a}{2} \leqq x \leqq \dfrac{a}{2}$ $(a>0)$ の範囲において，最大値が 10，最小値が 1 であるとするとき，実数の係数 a，b の値を求め，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

$\boxed{2}$

a を負の実数とする。$4x^2+12y^2-12xy+4x-18y+7=a$ を満たす x，y が隣り合う整数のとき，a の最大値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

第４講　２次関数の最大・最小（発展）例題

$\boxed{1}$ ★★☆

関数 $y=2x^2-4ax$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ ★★☆

a は定数とする。関数 $y=x^2-2x+1$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$\boxed{3}$ ★★★

a は実数の定数とする。2 次関数 $f(x)=x^2-4x+a$ の $a\leqq x\leqq a+1$ における最小値を $g(a)$ とする。

(1)　$g(a)$ を求めよ。

(2)　$g(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{4}$ ★★★

関数 $y=-2x^4-8x^2$ の最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$\boxed{5}$ ★★★

次の関数の最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)-1$　　(2)　$y=(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)-4$ $(-2\leqq x\leqq 1)$

第４講　２次関数の最大・最小（発展）例題演習

$\boxed{1}$

関数 $y=-x^2+4ax-a$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最大値を求めよ。　　(2)　最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

a は定数とする。関数 $y=x^2-4x+1$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ について

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$\boxed{3}$

関数 $f(x)=x^2-6x+a$ $(a \leqq x \leqq a+4)$ の最小値，最大値をそれぞれ $g(a)$，$G(a)$ とする。

(1)　$g(a)$，$G(a)$ をそれぞれ求めよ。

(2)　$g(a)$，$G(a)$ の最小値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{4}$

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=-2x^4-4x^2+3$　　(2)　$y=-2x^4+4x^2+3$

$\boxed{5}$

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=-(2x^2-3x)^2-3(2x^2-3x)-1$

(2)　$y=(x^2-6x)^2+12(x^2-6x)+30$　$(1 \leqq x \leqq 5)$

第４講　レベルＡ

$\boxed{1}$

a は $a>1$ を満たす定数とする。関数 $y=-2x^2+8x+1$ $(1\leqq x\leqq a)$ について

(1)　最大値を求めよ。　　(2)　最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

a は定数とする。関数 $y=-x^2-ax+a^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値を M とする。

(1)　M を a で表せ。　　(2)　$M=5$ のとき，a の値を求めよ。

$\boxed{3}$［松山大］

2 次関数 $f(x)=-x^2+2x$ の $a\leqq x\leqq a+2$ における最大値，最小値は a の関数であり，これをそれぞれ $F(a)$，$G(a)$ と表す。この関数 $F(a)$，$G(a)$ のグラフをかけ。

$\boxed{4}$

2 次関数 $y=-x^2+4ax+4a$ の最大値 m を a で表せ。また，a の関数 m の最小値と，そのときの a の値を求めよ。

$\boxed{5}$［法政大］

2 次関数 $y=x^2-ax$ の $2\leqq x\leqq 5$ における最大値と最小値の差を d とおく。ただし，a は実数の定数とする。このとき，$d=5$ となるような a の値を求めよ。

第４講　レベルＢ

$\boxed{1}$［千葉大］

a を実数とする。関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

$\boxed{2}$［福岡大］

2 次関数 $y=x^2+ax+b$ が，$0 \leqq x \leqq 3$ の範囲で最大値 1 をとり，$0 \leqq x \leqq 6$ の範囲で最大値 9 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{3}$

(1)　$0 \leqq x \leqq 4$ のとき，関数 $y=(x^2-4x+3)(-x^2+4x+2)-2x^2+8x-1$ の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ。

(2)　$f(x)=x^2-4x+5$ とする。関数 $f(f(x))$ の区間 $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{4}$

p を定数とする。関数 $y=(x^2-2x)^2+6p(x^2-2x)+3p+1$ の最小値を m とする。

(1)　最小値 m を p の式で表せ。　　(2)　m の最大値を求めよ。

第５講　２次方程式とグラフ

５　２次方程式

$\boxed{1}$　**２次方程式の解き方**

１　因数分解　数の積の性質「$AB=0$　ならば　$A=0$ または $B=0$」を用いる。

２　$a>0$ のとき，$x^2=a$ の解は　　$x=\pm\sqrt{a}$

３　**解の公式**　２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は

$b^2-4ac \geqq 0$ のとき実数解をもち　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$b=2b'$ ならば $b'^2-ac \geqq 0$ のとき実数解をもち　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

$\boxed{2}$　**２次方程式の係数と実数解**

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について，**判別式** を $D=b^2-4ac$ とすると，次のことが成り立つ。

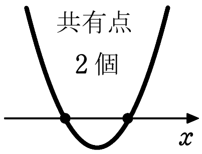
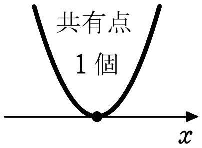
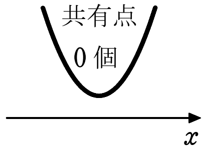
$$\left.\begin{array}{l} D>0 \Longleftrightarrow \text{異なる２つの実数解をもつ} \\ D=0 \Longleftrightarrow \text{ただ１つの実数解(重解)をもつ} \end{array}\right\} D \geqq 0 \Longleftrightarrow \text{実数解をもつ}$$

$D<0 \Longleftrightarrow$ 実数解をもたない

第５講　２次方程式とグラフ

６　２次関数のグラフと x 軸の位置関係

[1]　２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係

$D=b^2-4ac$ の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
x 軸との 位置関係	異なる2点で 交わる	接する	共有点を もたない
$a>0$ のとき グラフと x 軸との 共有点の個数			
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$-\dfrac{b}{2a}$	ない

・2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について

グラフと x 軸の共有点の x 座標 ＝ 方程式の実数解

グラフと x 軸の共有点の個数　＝ 方程式の実数解の個数

・2次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフは，x 軸と2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わる。

[発展]　放物線と直線の共有点の座標

[1]　放物線と直線の共有点

１　放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ の共有点の x 座標

$\iff$ 2次方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ の実数解

２　１において，共有点の個数と2次方程式の実数解の個数は一致する。

放物線と直線は異なる2点で交わる $\iff$ 異なる2つの実数解をもつ $(D>0)$

放物線と直線は接する $\iff$ 重解をもつ $(D=0)$

放物線と直線は共有点をもたない $\iff$ 実数解をもたない $(D<0)$

第５講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

(1)　2 次方程式 $x^2+(2k-1)x+k^2-3k-1=0$ が実数解をもつように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(2)　2 次方程式 $3x^2+8x+k=0$ が重解をもつように，定数 k の値を定め，そのときの重解を求めよ。

$\boxed{2}$ ★☆☆

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2-6x-4$　　(2)　$y=-4x^2+4x-1$

$\boxed{3}$ ★☆☆

2 次関数 $y=x^2-2kx+k^2-k+3$ のグラフについて，次の問いに答えよ。

(1)　x 軸と異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　x 軸と接するとき，定数 k の値とそのときの接点の座標を求めよ。

$\boxed{4}$ ★★☆

k は定数とする。放物線 $y=x^2-2x+2k-4$ と x 軸の共有点の個数を求めよ。

$\boxed{5}$ ★☆☆

次の放物線と直線に共有点があれば，その座標を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=x+2$　　(2)　$y=x^2-2x$，$y=2x-4$

(3)　$y=x^2+2x-1$，$y=x-2$

$\boxed{6}$ ★★☆

a は定数とする。放物線 $y=x^2-2x+a$ について

(1)　直線 $y=2x$ と接するように a の値を定めよ。

(2)　直線 $y=2x+3$ と共有点をもたないように a の値の範囲を定めよ。

第５講　例題演習

1

次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　2 次方程式 $x^2+5x+m=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ。

(2)　2 次方程式 $2x^2-3x+m-1=0$ が実数解をもたない。

(3)　2 次方程式 $3x^2+6x+2m-1=0$ が実数解をもつ。

2

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2+3x-2$

(2)　$y=-x^2+2x-1$

3

2 次関数 $y=x^2+2(k-1)x+k^2-3$ のグラフについて，次の問いに答えよ。

(1)　x 軸と共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　x 軸に接するとき，定数 k の値とそのときの接点の座標を求めよ。

4

k は定数とする。放物線 $y=2x^2-4x+2k-2$ と x 軸の共有点の個数を求めよ。

5

次の放物線と直線に共有点があれば，その座標を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=-x+6$

(2)　$y=x^2+6x+9$，$y=-2x-7$

(3)　$y=x^2+2$，$y=2x-6$

6

放物線 $y=x^2-3x+m$ が次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　直線 $y=x$ と接する。

(2)　直線 $y=4x+3$ と異なる 2 点で交わる。

第５講　レベルＡ

$\boxed{1}$

(1)　x の 2 次方程式 $(m-2)x^2-2(m+1)x+m+3=0$ が実数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(2)　x の方程式 $(m+1)x^2+2(m-1)x+2m-5=0$ がただ 1 つの実数解をもつとき，定数 m の値を求めよ。

$\boxed{2}$［慶応義塾大］

2 次方程式 $x^2+(2-4k)x+k+1=0$ が正の重解をもつとする。このとき，定数 k の値は

$k=$ ア$\boxed{}$ であり，2 次方程式の重解は $x=$ イ$\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$

(1)　2 次関数 $y=-2x^2-3x+3$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

(2)　放物線 $y=x^2-(k+2)x+2k$ が x 軸から切り取る線分の長さが 4 であるとき，定数 k の値を求めよ。

$\boxed{4}$

放物線 $y=x^2+ax+b$ が 2 直線 $y=2x$，$y=-4x+3$ の両方に接するとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{5}$［東京学芸大］

a は定数とする。2 つの関数 $y=x^2-4$ と $y=a(x+1)^2$ のグラフの共有点の個数を調べよ。

第５講　レベルＢ

$\boxed{1}$

2 つの 2 次方程式 $2x^2+kx+4=0$，$x^2+x+k=0$ が共通の実数解をもつように定数 k の値を定め，その共通解を求めよ。

$\boxed{2}$［名城大］

放物線 $y=x^2+px+q$ の頂点が直線 $y=-\dfrac{1}{2}x-3$ 上にあるとき

(1)　q のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　放物線 $y=x^2+px+q$ が原点を通過するとき，頂点の座標を求めよ。

(3)　放物線 $y=x^2+px+q$ が x 軸と異なる 2 点で交わり，かつその 2 点間の距離が 2 であるとき，頂点の座標を求めよ。