$\boxed{1}$

(解説)

X の正の約数の個数は　$(5+1)(4+1)(3+1)(1+1)=6\times5\times4\times2=^{ア}240$ (個)

Y の正の約数の個数は　$(5+1)(4+1)(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)$

$=6\times5\times4\times2\times2\times2\times2=^{イ}1920$ (個)

X の正の約数の総和は

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2+3^3+3^4)(1+5+5^2+5^3)(1+7)$$

これを S とすると，Y の正の約数の総和は

$$S\times(1+11)(1+13)(1+17)=S\times12\times14\times18=3024S$$

よって，Y の正の約数の総和は X の正の約数の総和の $^{ウ}3024$ 倍である。

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　百の位の数字は，0 以外の 5 通り。

十の位，一の位の数字は 6 通りずつあるから，3 桁の整数は全部で　$5\times6^2=180$ (個)

(2)　百の位が 1 または 2 である 3 桁の整数は　$6^2\times2=72$ (個)

30□，31□，32□，33□ の形の整数は　$6\times4=24$ (個)

ここまでで，$72+24=96$ (個) なので，小さい順に 100 番目の数は，34□ の形の数で小さい方から 4 番目，すなわち　343

(3)　□00，□01，□02，……，□05 の形の整数は，それぞれ 5 通りずつある。

一の位だけで和をとると　$(0+1+2+3+4+5)\times5=75$

10□，20□，30□，……，50□ の形の整数は，それぞれ 6 通りずつある。

百の位だけで和をとると　$(1+2+3+4+5)\times6\times100=9000$

よって，求める和は　$75+9000=9075$

$\boxed{3}$

(解説)

(1) 男性の並び方は　$4!$ 通り

女性の並び方は　$4!$ 通り

男性と女性が交互に座ればよいから，S_1 に男性が座る場合と女性が座る場合を考えて

$$4!\times4!\times2=1152 \text{（通り）}$$

(2) M_1 の両隣が F_1 と F_2 になるのは，$F_1M_1F_2$ と $F_2M_1F_1$ の 2 通りある。

この M_1，F_1，F_2 をまとめて 1 組と考えると，この 1 組と F_3，F_4 の座り方は　$3!$ 通り

また，M_2，M_3，M_4 の座り方は　$3!$ 通り

S_1 に M_1 以外の男性が座る場合と，女性が座る場合を考えて，求める座り方は

$$2\times3!\times3!\times2=144 \text{（通り）}$$

(3) (2) と同様に，M_1 の両隣が F_1 と F_3，F_1 と F_4 となる場合も 144 通りずつある。

さらに，M_1 が S_1 または S_8 に座り，隣が F_1 となる場合は，他の 6 人の並べ方を考えて　$2\times3!\times3!=72$（通り）

以上より，M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は　$1152-(144\times3+72)=648$（通り）

$\boxed{4}$

(解説)

(1) 10 個の文字のうち A が 5 個，G が 2 個あるから

$$\frac{10!}{5!2!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot1}=15120 \text{（通り）}$$

(2) 「NAGARA」と G，A，W，A の計 5 個の並べ方を考える。

同じ A が 2 個あるから　$\dfrac{5!}{2!}=60$（通り）

(3) A 5 個，G 2 個，□ 3 個を並べ，3 個の □ に左から N，R，W を入れると考え

$$\frac{10!}{5!2!3!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot1\times3\cdot2\cdot1}=2520 \text{（通り）}$$

(4) A が隣り合わない並べ方は，N，G，R，G，W を先に並べ，両端と間の計 6 か所から A の入る 5 か所を決めると考え　$\dfrac{5!}{2!}\times{}_6C_5=5\cdot4\cdot3\times6=360$（通り）

このうち G が隣り合うものを考える。

「GG」と N，R，W の 4 つの順列を考えると　$4!=24$（通り）

両端と間の 5 か所すべてに A が入るので，A は隣り合わないが，G が隣り合うものは

24 通り

よって，A も G も隣り合わないものは　$360-24=336$（通り）

5

解説

4 色の選び方は　$_{12}C_4=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=495$ (通り)

底面に 1 色を固定すると，その他の 3 つの面の塗り方は，残りの 3 色の円順列で

$(3-1)!=2$ (通り)

よって，求める塗り方の総数は　$495\times2=$ ア990 (通り)

6 色の選び方は　$_8C_6={}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ (通り)

上面に 1 色を固定すると，その対面となる下面の塗り方が　5 通り

そのおのおのに対して，4 つの側面の塗り方は，残りの 4 色の円順列で

$(4-1)!=6$ (通り)

よって，求める塗り方の総数は　$28\times5\times6=$ イ840 (通り)

6

解説

(1)　右へ 1 区画進むことを →，上へ 1 区画進むことを ↑ で表す。

最短の道順は → 4 個，↑ 4 個の順列で表されるから　$\frac{8!}{4!4!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$ (通り)

(2)　A から C まで，C から B までの道順はそれぞれ　$\frac{3!}{2!1!}=3$ (通り)，$\frac{5!}{2!3!}=10$ (通り)

よって，求める道順は　$3\times10=30$ (通り)

(3)　C から D まで，D から B までの道順はそれぞれ　$\frac{3!}{1!2!}=3$ (通り)，$2!=2$ (通り)

A から C までの道順は 3 通りであるから，求める順列は　$3\times3\times2=18$ (通り)

(4)　D を通る道順は　$\frac{6!}{3!3!}\times2=20\times2=40$ (通り)

これと (2)，(3) から，C または D を通る道順は　$30+40-18=52$ (通り)

よって，C も D も通らない道順は　$70-52=18$ (通り)

$\boxed{7}$

(解説)

$x \geqq 8$，$y \geqq 4$，$z \geqq 2$ から　　$x-8 \geqq 0$，$y-4 \geqq 0$，$z-2 \geqq 0$

ここで $x'=x-8$，$y'=y-4$，$z'=z-2$ とおくと，$x+y+z+w=18$ から

$$(x-8)+(y-4)+(z-2)+w=18-14$$

よって　$x'+y'+z'+w=4$　$(x' \geqq 0,\ y' \geqq 0,\ z' \geqq 0,\ w \geqq 0)$

よって，求める整数の組の個数は，4 個の ○ と 3 つの ｜ を 1 列に並べる順列の総数と同じであるから　　${}_7C_3=\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}=35$ (個)

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　3 個の ○ と 2 つの仕切り | を 1 列に並べて，A | B | C としたときの，A，B，C の部分にある ○ の数をそれぞれの人に配る赤玉の数とする。

このとき，3 個の ○ と 2 つの | の順列の総数が求める場合の数となるから

$${}_5C_2=\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}={}^{ア}10 \text{ (通り)}$$

(2)　すべての玉を 3 人に配る場合，青玉，白玉の配り方についても (1) と同様に 10 通りずつあるから　　$10^3={}^{イ}1000$ (通り)

ここで，玉を配られない人がいる場合を考える。

[1]　玉を配られない人が 2 人いるとき

すべての玉を 1 人に配る場合の数は　　3 通り

[2]　玉を配られない人が 1 人いるとき

赤玉のみをすべて 2 人に配る場合の数を考える。

(1) と同様にして，これは 3 個の ○ と 1 つの | の順列の総数であるから

$${}_4C_1=4 \text{ (通り)}$$

青玉，白玉の配り方についても同様に 4 通りずつあるから，すべての玉を 2 人に配る場合の数は　　$4^3=64$ (通り)

このうち，すべての玉をどちらか一方に配る配り方は 2 通りある。

また，玉を配られる 2 人の選び方は　　${}_3C_2=3$ (通り)

よって　　$(64-2) \times 3=186$ (通り)

[1]，[2] から，求める場合の数は　　$1000-(3+186)={}^{ウ}811$ (通り)