中2甲陽　GW課題　※5/6定期試験講習時に小テストを実施します。

$\boxed{1}$

次の式を，分母を有理化して簡単にせよ。

(1) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$　(2) $\dfrac{6}{3-\sqrt{7}}$　(3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$　(5) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$\boxed{2}$

(1) 次の (ア) ~ (ウ) の場合について，$\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{a^2}$ の根号をはずし簡単にせよ。

（ア） $a \geqq 0$　（イ） $-2 \leqq a < 0$　（ウ） $a < -2$

(2) 次の式の根号をはずし簡単にせよ。

$$\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{16x^2-24x+9}\quad\left(ただし\ -2<x<\frac{3}{4}\right)$$

$\boxed{3}$

次の式の 2 重根号をはずして簡単にせよ。

(1) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$　(2) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$　(3) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$　(4) $\sqrt{9-3\sqrt{5}}$

$\boxed{4}$

$x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，$x+y$，xy，x^2+y^2，x^3+y^3，x^3-y^3 の値を求めよ。

$\boxed{5}$

$a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $2a^2-2a-1$　(2) a^8

$\boxed{6}$

A を含む 5 人の男子生徒，B を含む 5 人の女子生徒の計 10 人から 5 人を選ぶ。次のような方法は何通りあるか。

(1) 全員から選ぶ選び方

(2) 男子 2 人，女子 3 人を選ぶ選び方

(3) 男子から A を含む 2 人，女子から B を含む 3 人を選ぶ選び方

(4) 男子 2 人，女子 3 人を選んで 1 列に並べる並べ方

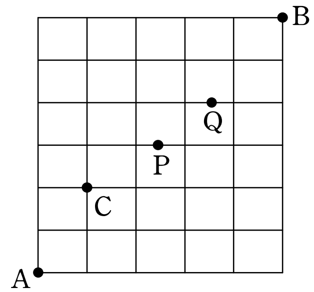
$\boxed{7}$

(1) 正十二角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_{12}$ の頂点を結んで得られる三角形の総数は ア$\boxed{\quad}$ 個，頂点を結んで得られる直線の総数は イ$\boxed{\quad}$ 本である。

(2) 平面上において，4 本だけが互いに平行で，どの 3 本も同じ点で交わらない 10 本の直線の交点の個数は全部で ウ$\boxed{\quad}$ 個ある。

$\boxed{8}$

右の図のように，道路が碁盤の目のようになった街がある。地点 A から地点 B までの長さが最短の道を行くとき，次の場合は何通りの道順があるか。



(1) 全部の道順　(2) 地点 C を通る。

(3) 地点 P は通らない。

(4) 地点 P と地点 Q の両方を通らない。

$\boxed{9}$

(1) $x+y+z=9$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ を満たす整数 x，y，z の組 (x, y, z) は，全部で何組あるか。

(2) $x+y+z=12$ を満たす正の整数 x，y，z の組 (x, y, z) は，全部で何組あるか。

$\boxed{1}$

(解説)

(1) $(与式)=\dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2}-\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2}=\dfrac{3\sqrt{6}}{6}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}=\dfrac{2\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

(2) $(与式)=\dfrac{6(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\dfrac{6(3+\sqrt{7})}{9-7}=3(3+\sqrt{7})=9+3\sqrt{7}$

(3) $(与式)=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}-\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{5-2\sqrt{6}}{3-2}-\dfrac{8+2\sqrt{15}}{5-3}=5-2\sqrt{6}-(4+\sqrt{15})=1-2\sqrt{6}-\sqrt{15}$

(4) $(与式)=\dfrac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\{(1+\sqrt{6})+\sqrt{7}\}\{(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}\}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}$

$=\dfrac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{25-24}=\dfrac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}+5-2\sqrt{6}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{6}-\sqrt{7})\sqrt{6}}{2(\sqrt{6})^2}+5-2\sqrt{6}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}+\dfrac{12(5-2\sqrt{6})}{12}$

$=\dfrac{66-23\sqrt{6}-\sqrt{42}}{12}$

(5) $(与式)=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}}$

$=\dfrac{\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{3}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{3}\}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}{2\sqrt{6}}=\dfrac{2+\sqrt{10}}{\sqrt{6}}$

$=\dfrac{(2+\sqrt{10})\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2}=\dfrac{2\sqrt{6}+2\sqrt{15}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1) $P=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{a^2}$ とおくと　$P=|a+2|+|a|$

(ア) $a\geqq 0$ のとき　$a+2>0$,　$a\geqq 0$

よって　$P=(a+2)+a=2a+2$

(イ) $-2\leqq a<0$ のとき　$a+2\geqq 0$,　$a<0$

よって　$P=(a+2)-a=a+2-a=2$

(ウ) $a<-2$ のとき　$a+2<0$,　$a<0$

よって　$P=-(a+2)-a=-a-2-a=-2a-2$

(2) $(与式)=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(4x-3)^2}=|x+2|-|4x-3|$

$-2<x<\dfrac{3}{4}$ のとき　$x+2>0$，$4x-3<0$

よって　$(与式)=(x+2)-\{-(4x-3)\}=x+2+4x-3=5x-1$

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{6+2\sqrt{2^2\cdot 2}}=\sqrt{(4+2)+2\sqrt{4\cdot 2}}$

$=\sqrt{4}+\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{8-\sqrt{48}}=\sqrt{8-\sqrt{2^2\cdot 12}}=\sqrt{(6+2)-2\sqrt{6\cdot 2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot 1}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

(4) $\sqrt{9-3\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{18-6\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{18-2\sqrt{3^2\cdot 5}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{(15+3)-2\sqrt{15\cdot 3}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{2}$

$\boxed{4}$

(解説)

$$x+y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(5+2\sqrt{15}+3)+(5-2\sqrt{15}+3)}{5-3}=8$$

$$xy=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=1$$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot1=62$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=8^3-3\cdot1\cdot8=488$$

また　$x-y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$$=\frac{(5+2\sqrt{15}+3)-(5-2\sqrt{15}+3)}{5-3}=2\sqrt{15}$$

よって　$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=2\sqrt{15}(62+1)=126\sqrt{15}$

別解　$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$$=(2\sqrt{15})^3+3\cdot1\cdot2\sqrt{15}$$

$$=120\sqrt{15}+6\sqrt{15}=126\sqrt{15}$$

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　$a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ から　$2a-1=-\sqrt{3}$

両辺を 2 乗して　$(2a-1)^2=3$　ゆえに　$4a^2-4a-2=0$

したがって　$2a^2-2a-1=0$

(2)　(1) から　$a^2=a+\dfrac{1}{2}$

$a^8=(a^4)^2$ であるから，a^4 について

$$a^4=(a^2)^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=a^2+a+\frac{1}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)+a+\frac{1}{4}=2a+\frac{3}{4}$$

よって　$a^8=(a^4)^2=\left(2a+\dfrac{3}{4}\right)^2=4a^2+3a+\dfrac{9}{16}$

$$=4\left(a+\frac{1}{2}\right)+3a+\frac{9}{16}=7a+\frac{41}{16}$$

$a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ を代入して，求める式の値は

$$7\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{41}{16}=\frac{56(1-\sqrt{3})+41}{16}=\frac{97-56\sqrt{3}}{16}$$

別解　$a^4=2a+\dfrac{3}{4}$ を求めるところまでは同じ。

$$a^4=2a+\frac{3}{4}=2\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}=\frac{7-4\sqrt{3}}{4}$$

よって　$a^8=(a^4)^2=\left(\dfrac{7-4\sqrt{3}}{4}\right)^2=\dfrac{(7-4\sqrt{3})^2}{4^2}=\dfrac{97-56\sqrt{3}}{16}$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　10 人から 5 人を選ぶ選び方であるから

$${}_{10}C_5=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=252\ (通り)$$

(2)　男子 5 人から 2 人を選ぶ選び方は　${}_5C_2$ 通り

その おのおのについて，女子 5 人から 3 人を選ぶ選び方は　${}_5C_3$ 通り

よって，求める方法は　${}_5C_2\times{}_5C_3=({}_5C_2)^2=\left(\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}\right)^2=100$ (通り)

(3)　A を除く 4 人の男子から 1 人を選ぶ選び方は　${}_4C_1$ 通り

そのおのおのについて，B を除く 4 人の女子から 2 人を選ぶ選び方は　${}_4C_2$ 通り

よって，求める方法は　${}_4C_1\times{}_4C_2=4\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=24$ (通り)

(4)　(2) の 100 通りの選び方のおのおのについて，5 人を 1 列に並べる並べ方は ${}_5P_5$ 通り

あるから　$100\times{}_5P_5=100\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=12000$ (通り)

$\boxed{7}$

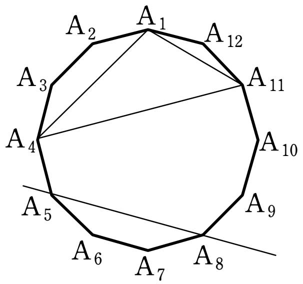
(解説)

(1)　(ア)　正十二角形の 12 個の頂点は，どの 3 点も同じ直線上にないから，3 点で 1 つの三角形が得られる。

ゆえに　$_{12}C_3=220$ (個)

(イ)　頂点はどの 3 点も同じ直線上にないから，2 点で 1 本の直線が得られる。

ゆえに　$_{12}C_2=66$ (本)



(2)　(ウ)　10 本の直線がどれも平行でないとすると，交点は　$_{10}C_2$ 個

実際には，4 本の直線が平行であるから，平行な 4 本の直線で交点が $_4C_2$ 個減る。

ゆえに　$_{10}C_2-{}_4C_2=45-6=39$ (個)

別解　(ウ)　平行な 4 直線以外の 6 本の直線は，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も同じ点で交わらないから，これら 6 本の直線の交点の個数は　$_6C_2$ 個

また，平行な 4 直線のうちの 1 本とそれと平行でない 6 本の直線の交点は 6 個ある。

したがって，求める交点の総数は　$_6C_2+6\times4=15+24=39$ (個)

$\boxed{8}$

(解説)

右へ 1 区画進むことを →，上へ 1 区画進むことを ↑ で表す。

(1)　最短の道順は → 5 個，↑ 6 個の順列で表されるから

$$\frac{11!}{5!6!}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=462 \text{ (通り)}$$

(2)　A から C までの道順，C から B までの道順はそれぞれ

$$\frac{3!}{1!2!}=3 \text{ (通り)},\ \frac{8!}{4!4!}=70 \text{ (通り)}$$

よって，求める道順は　$3\times70=210$ (通り)

(3)　P を通る道順は　$\dfrac{5!}{2!3!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=10\times10=100$ (通り)

よって，求める道順は　$462-100=362$ (通り)

(4)　Q を通る道順は　$\dfrac{7!}{3!4!}\times\dfrac{3!}{1!2!}=35\times3=105$ (通り)

P と Q の両方を通る道順は　$\dfrac{5!}{2!3!}\times\dfrac{3!}{1!2!}=10\times3=30$ (通り)

よって，P または Q を通る道順は　$100+105-30=175$ (通り)

ゆえに，求める道順は　$462-175=287$ (通り)

別解　[(1) ～ (3) の組合せによる考え方]

(1)　$5+6=11$ 個の場所から，→ 5 個が入る場所を選ぶと考えて

$$_{11}C_5=\frac{11!}{5!6!}=462 \text{ (通り)}$$

(2)　A から C までは　$_3C_1$ 通り

C から B までは　$_8C_4$ 通り

よって，求める道順は　$_3C_1\times{}_8C_4=3\times70=210$ (通り)

(3)　P を通る道順は　$_5C_2\times{}_5C_2=10\times10=100$ (通り)

よって，求める道順は　$462-100=362$ (通り)

$\boxed{9}$

(解説)

(1)　異なる 3 種類のものから，重複を許して 9 個取る組合せの総数であるから

$$_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55 \text{ (組)}$$

(2)　$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおくと　$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$

このとき，$x+y+z=12$ から　$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=12$

よって　$X+Y+Z=9$，$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$　……[A]

求める正の整数解の組の個数は，[A] を満たす 0 以上の整数解 X，Y，Z の組の個数に等しいから，(1) の結果より　55 組

別解　12 個の ○ を並べる：○○○○○○○○○○○○

このとき，○ と ○ の間の 11 か所から 2 つを選んで仕切りを入れ　A｜B｜C

としたときの，A，B，C の部分にある ○ の数をそれぞれ x，y，z とすると，解が 1 つ決まるから　$_{11}C_2=55$ (組)