$\boxed{1}$

解答　(1)　$2-4i$　　(2)　$-3+11i$　　(3)　$-1-4i$　　(4)　$17-\sqrt{5}\,i$　　(5)　$\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$

解説

(1)　$(-3+2i)+(5-6i)=(-3+5)+(2-6)i=2-4i$

(2)　$(5-i)(-1+2i)=-5+10i+i-2i^2$

$$=-5+11i-2\cdot(-1)$$
$$=-3+11i$$

(3)　$i(-2+i)+(1-i)^2=(-2i+i^2)+(1-2i+i^2)$

$$=1-4i+2i^2=1-4i+2\cdot(-1)$$
$$=-1-4i$$

(4)　$(4+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})=(4+\sqrt{5}\,i)(3-\sqrt{5}\,i)$

$$=12-\sqrt{5}\,i-5i^2=17-\sqrt{5}\,i$$

(5)　$\dfrac{1-2i}{2-i}=\dfrac{(1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i-4i-2i^2}{4-i^2}$

$$=\frac{2-3i+2}{4+1}=\frac{4-3i}{5}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$x=6,\ y=-7$　　(2)　$x=-3$

解説

(1)　与えられた等式を変形すると

$$(2x+3y)+(x-2y)i=-9+20i$$

x，y は実数であるから，$2x+3y$，$x-2y$ も実数である。

よって　　$2x+3y=-9$，　$x-2y=20$

これを解いて　　$x=6$，$y=-7$

(2)　等式を整理すると

$$(3x^2+8x-3)+(2x^2+5x-3)i=0$$

x が実数のとき，$3x^2+8x-3$，$2x^2+5x-3$ は実数であるから

$3x^2+8x-3=0$　……①

$2x^2+5x-3=0$　……②

①，② をともに満たす実数 x を求めればよい。

① から　　$(x+3)(3x-1)=0$　　これを解いて　　$x=-3,\ \dfrac{1}{3}$

② から　　$(x+3)(2x-1)=0$　　これを解いて　　$x=-3,\ \dfrac{1}{2}$

したがって，求める x の値は　　$x=-3$

$\boxed{3}$

解答　$a=-2,\ b=-3$

解説

$(a+bi)+(2-3i)=(a+2)+(b-3)i$

これが純虚数であるとき　　$a+2=0$　かつ　$b-3\fallingdotseq 0$

よって　　$a=-2$　かつ　$b\fallingdotseq 3$

このとき

$$(a+bi)(2-3i)=(-2+bi)(2-3i)=-4+6i+2bi-3bi^2=(-4+3b)+2(b+3)i$$

これが実数であるとき　　$2(b+3)=0$

よって　　$b=-3$　　これは $b\fallingdotseq 3$ を満たす。

以上から　　$a=-2$，$b=-3$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$x=\pm 2\sqrt{6}\,i$　　(2)　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{6}\,i}{2}$

解説

(1)　$2x^2+48=0$ から　　$x^2=-24$

よって　　$x=\pm\sqrt{-24}=\pm\sqrt{24}\,i=\pm 2\sqrt{6}\,i$

(2)　方程式の両辺を 3 で割ると　　$2x^2-4x+5=0$

よって　　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot 5}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{-6}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{6}\,i}{2}$

$\boxed{5}$

解答　(前半) $a=-4$，$b=13$　(後半) 証明略

解説

$x^2+ax+b=0$ に $x=2+3i$ を代入すると

$$(2+3i)^2+a(2+3i)+b=0$$

整理すると　$(-5+2a+b)+(3a+12)i=0$

a，b は実数であるから，$-5+2a+b$，$3a+12$ も実数である。

よって　$-5+2a+b=0$，$3a+12=0$

これを解いて　　$a=-4$，$b=13$

よって　$x^2+ax+b=x^2-4x+13$

この式に $x=2-3i$ を代入すると

$$(2-3i)^2-4(2-3i)+13=-5-12i-8+12i+13=0$$

よって，$x=2-3i$ は $x^2-4x+13=0$ の解である。

別解 (後半)　$x^2-4x+13=0$ を解くと

$x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm 3i$

よって，$x=2-3i$ は $x^2-4x+13=0$ の解である。

参考　a，b の値を求めなくとも $x=2+3i$ が解ならば $x=2-3i$ も解であることを示すことができる。

$x=2+3i$ が方程式 $x^2+ax+b=0$ の解であるから，代入して

$-5+2a+b=0$ ……①，$3a+12=0$ ……②

が得られる。

$x=2-3i$ を方程式の左辺に代入すると

$$(2-3i)^2+a(2-3i)+b=(-5+2a+b)-(3a+12)i$$

①，② から　$(-5+2a+b)-(3a+12)i=0$　　よって　$(2-3i)^2+a(2-3i)+b=0$

よって　$x=2-3i$ も元の方程式の解である。

$\boxed{6}$

解答　$1+12\sqrt{2}\,i$

解説

$x=1-\sqrt{2}\,i$ から　　$x-1=-\sqrt{2}\,i$

両辺を 2 乗して　　$(x-1)^2=-2$

これを整理して　　$x^2-2x+3=0$　……①

$3x^3-8x^2+x+7$ を x^2-2x+3 で割ると

$$\begin{array}{r@{}l}
 & 3x-2 \\
x^2-2x+3 \,\big)\!\! & \overline{3x^3-8x^2+\ \ x+7} \\
 & 3x^3-6x^2+9x \\
\hline
 & -2x^2-8x+7 \\
 & -2x^2+4x-6 \\
\hline
 & -12x+13
\end{array}$$

よって　$3x^3-8x^2+x+7=(x^2-2x+3)(3x-2)-12x+13$

① と $x=1-\sqrt{2}\,i$ を代入して

$3x^3-8x^2+x+7=0-12(1-\sqrt{2}\,i)+13$

$$=1+12\sqrt{2}\,i$$

別解　$x^2-2x+3=0$ から　　$x^2=2x-3$

よって　　$3x^3-8x^2+x+7=3x(2x-3)-8(2x-3)+x+7$

$$=6x^2-24x+31$$
$$=6(2x-3)-24x+31$$
$$=-12x+13$$
$$=-12(1-\sqrt{2}\,i)+13$$
$$=1+12\sqrt{2}\,i$$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$1+7i$　　(2)　$3+4i$　　(3)　$11+\sqrt{5}\,i$　　(4)　$-\dfrac{4}{13}+\dfrac{19}{13}i$　　(5)　2

解説

(1)　$(4+5i)-(3-2i)=4+5i-3+2i=(4-3)+(5+2)i=1+7i$

(2)　$(2+i)^2=4+4i+i^2=4+4i+(-1)=3+4i$

(3)　$(2+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})=(2+\sqrt{5}\,i)(3-\sqrt{5}\,i)$

$$=2\cdot3-2\sqrt{5}\,i+3\sqrt{5}\,i-(\sqrt{5})^2i^2$$

$$=6+\sqrt{5}\,i-5\cdot(-1)=11+\sqrt{5}\,i$$

(4)　$\dfrac{2+5i}{3-2i}=\dfrac{(2+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{6+4i+15i+10i^2}{9-4i^2}=\dfrac{6+19i+10\cdot(-1)}{9-4\cdot(-1)}$

$$=\frac{-4+19i}{13}=-\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$$

(5)　$\dfrac{3+2i}{2+i}-\dfrac{i}{1-2i}=\dfrac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}-\dfrac{i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$$=\frac{6-3i+4i-2i^2}{4-i^2}-\frac{i+2i^2}{1-4i^2}$$

$$=\frac{6+i-2\cdot(-1)}{4-(-1)}-\frac{i+2\cdot(-1)}{1-4\cdot(-1)}$$

$$=\frac{8+i}{5}-\frac{i-2}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$x=-2,\ y=1$　　(2)　$x=\dfrac{1}{2},\ y=-\dfrac{5}{4}$　　(3)　$x=2$

解説

(1)　与式から　　$4x+y+7+2(x+2y)i=0$

x，y は実数であるから，$4x+y+7$ と $2(x+2y)$ も実数である。

よって　　$4x+y+7=0$ ……①，$x+2y=0$ ……②

①，② を連立して解くと　　$x=-2$，$y=1$

(2)　与式から　　$x+2yi=\dfrac{3-2i}{1+i}$

$$\frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-5i+2i^2}{1-i^2}=\frac{3-5i-2}{1+1}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

であるから　　$x+2yi=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i$

x，$2y$ は実数であるから　　$x=\dfrac{1}{2}$，$2y=-\dfrac{5}{2}$

よって　　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{5}{4}$

別解　(左辺)$=x+xi+2yi+2yi^2=x-2y+(x+2y)i$

ゆえに　　$x-2y+(x+2y)i=3-2i$

x，y は実数であるから，$x-2y$ と $x+2y$ も実数である。

よって　　$x-2y=3$，$x+2y=-2$

これを解いて　　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=-\dfrac{5}{4}$

(3)　与式を整理すると　　$x^2-x-2+(x^2-3x+2)i=0$

xは実数であるから，x^2-x-2，x^2-3x+2 は実数である。

よって　　$x^2-x-2=0$　……①

$x^2-3x+2=0$　……②

① から　　$(x+1)(x-2)=0$　　ゆえに　　$x=-1,\ 2$

② から　　$(x-1)(x-2)=0$　　ゆえに　　$x=1,\ 2$

①，② をともに満たす xの値が求める解で　$x=2$

$\boxed{3}$

解答　$x=-2$，$y=-3$

解説

$(x+yi)+(2-3i)=(x+2)+(y-3)i$

和が純虚数であるから　　$x+2=0$　かつ　$y-3\neq0$

よって　　$x=-2$　かつ　$y\neq3$

このとき

$$(x+yi)(2-3i)=(-2+yi)(2-3i)=-4+6i+2yi-3yi^2$$

$$=(-4+3y)+2(y+3)i$$

積が実数であるから　$2(y+3)=0$

よって　　$y=-3$　　　これは，$y\neq3$ を満たす。

以上から　$x=-2$，$y=-3$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$x=\pm\dfrac{2}{3}i$　　(2)　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(3)　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{61}}{6}$　　(4)　$x=\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}\,i}{2}$

解説

(1)　$9x^2+4=0$ から　　$x^2=-\dfrac{4}{9}$

よって　　$x=\pm\sqrt{-\dfrac{4}{9}}=\pm\sqrt{\dfrac{4}{9}}\,i=\pm\dfrac{2}{3}i$

(2)　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(3)　両辺に -1 を掛けると　　$3x^2-x-5=0$

よって　　$x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot3\cdot(-5)}}{2\cdot3}=\dfrac{1\pm\sqrt{61}}{6}$

(4)　$x=\dfrac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-5}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}\pm\sqrt{5}\,i}{2}$

$\boxed{5}$

解答　$a=-4$，$b=13$，$x=2+3i$

解説

$x=2-3i$ がこの方程式の解であるから

$$(2-3i)^2+a(2-3i)+b=0$$

よって　　$4-12i+9i^2+2a-3ai+b=0$

ゆえに　　$(2a+b-5)+(-3a-12)i=0$

a，b は実数であるから，$2a+b-5$，$-3a-12$ も実数である。

よって　　$2a+b-5=0$，$-3a-12=0$

これを解いて　　$a=-4$，$b=13$

このとき，方程式は　　$x^2-4x+13=0$

これを解いて　　$x=2\pm3i$

よって，求める他の解は　　$x=2+3i$

$\boxed{6}$

解答　$10+2\sqrt{2}\,i$

解説

$P(x)=x^4-4x^3+2x^2+6x-7$　とおく。

$x=1+\sqrt{2}\,i$ から　　$x-1=\sqrt{2}\,i$

両辺を 2 乗して　　$(x-1)^2=-2$

整理すると　　$x^2-2x+3=0$　……①

$P(x)$ を x^2-2x+3 で割ると，右のようになり

商 x^2-2x-5，　余り $2x+8$

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & & & 1 & -2 & -5 & & \\ \cline{4-8} 1 & -2 & 3\,\big) & 1 & -4 & 2 & 6 & -7 \\ & & & 1 & -2 & 3 & & \\ \cline{4-8} & & & & -2 & -1 & 6 & \\ & & & & -2 & 4 & -6 & \\ \cline{5-8} & & & & & -5 & 12 & -7 \\ & & & & & -5 & 10 & -15 \\ \cline{6-8} & & & & & & 2 & 8 \end{array}$$

である。よって

$$P(x)=(x^2-2x+3)(x^2-2x-5)+2x+8$$

$x=1+\sqrt{2}\,i$ のとき，① から

$$P(1+\sqrt{2}\,i)=0+2(1+\sqrt{2}\,i)+8=10+2\sqrt{2}\,i$$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$5-i$　(2)　$-\sqrt{6}(43+15i)$　(3)　$\dfrac{66-213i}{221}$　(4)　-1　(5)　1

解説

(1)　$\dfrac{(3-2i)(1+5i)}{2+3i}=\dfrac{3+13i-10i^2}{2+3i}=\dfrac{13(1+i)}{2+3i}$

$=\dfrac{13(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{13(2-i-3i^2)}{4-9i^2}=5-i$

(2)　$(\sqrt{-50}-\sqrt{72})(\sqrt{27}+\sqrt{-75})=(5\sqrt{2}\,i-6\sqrt{2})(3\sqrt{3}+5\sqrt{3}\,i)$

$=\sqrt{2}(5i-6)\times\sqrt{3}(3+5i)$

$=\sqrt{2}\sqrt{3}(-6+5i)(3+5i)$

$=\sqrt{6}(-18-15i+25i^2)$

$=-\sqrt{6}(43+15i)$

(3)　$\dfrac{4-i}{3+2i}-\dfrac{2}{4-i}=\dfrac{(4-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}-\dfrac{2(4+i)}{(4-i)(4+i)}$

$=\dfrac{12-11i+2i^2}{9-4i^2}-\dfrac{8+2i}{16-i^2}=\dfrac{10-11i}{13}-\dfrac{8+2i}{17}$

$=\dfrac{17(10-11i)-13(8+2i)}{221}=\dfrac{66-213i}{221}$

(4)　$\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{1-i^2}=\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$

よって　$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\left\{\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2}\right\}^2=\dfrac{2(1-i)^2}{4}=\dfrac{1-2i+i^2}{2}=-i$

ゆえに　$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^4=\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^2=(-i)^2=i^2=-1$

別解　$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^4=\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^2=\left\{\dfrac{(\sqrt{2})^2}{(1+i)^2}\right\}^2=\left(\dfrac{2}{1+2i+i^2}\right)^2=\left(\dfrac{2}{2i}\right)^2=\left(\dfrac{1}{i}\right)^2=\dfrac{1}{i^2}=-1$

(5)　$\dfrac{1}{\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}}=\dfrac{(1+i)(1-i)}{\left(\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}\right)(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-i^2}{(1-i)+(1+i)}=\dfrac{2}{2}=1$

$\boxed{2}$

解答　(ア)　0　(イ)　$-1+i$

解説

$i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1={}^{ア}0$

$i+i^2+i^3+i^4+\cdots\cdots+i^{30}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots\cdots+i^{24}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{28}(i+i^2)$

$=i^{28}(i+i^2)=(i^4)^7(i-1)={}^{イ}-1+i$

$\boxed{3}$

解答　$3+2i$，$-3-2i$

解説

求める複素数を $a+bi$ (a，b は実数) とすると　$(a+bi)^2=5+12i$

整理して　$a^2-b^2+2abi=5+12i$

a^2-b^2，$2ab$ は実数であるから　$a^2-b^2=5$，$2ab=12$

よって　$a^2-b^2=5$ ……①，　$ab=6$ ……②

② の両辺を 2 乗して　$a^2b^2=36$　……③

① から　$a^2=b^2+5$　　これを ③ に代入して　$(b^2+5)b^2=36$

ゆえに　$b^4+5b^2-36=0$　　すなわち　$(b^2+9)(b^2-4)=0$

$b^2\geqq0$ であるから　$b^2=4$　　よって　$b=\pm2$

② から　$b=2$ のとき　$a=3$，　$b=-2$ のとき　$a=-3$

したがって，求める複素数は　$3+2i$，$-3-2i$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$x=4$，$y=-2$　(2)　$-\dfrac{7}{5}-\dfrac{16}{5}i$

解説

(1)　$i^{30}+i^{65}=(i^2)^{15}+(i^2)^{32}\cdot i=(-1)^{15}+(-1)^{32}\cdot i=-1+i$

ゆえに，$(-1+i)(x+yi)=-2+6i$ から

$x+yi=\dfrac{2-6i}{1-i}=\dfrac{2(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$=\dfrac{2(1-3i)(1+i)}{1+1}=1-2i-3i^2$

$=4-2i$

x，y は実数であるから　$x=4$，$y=-2$

(2)　$\dfrac{x+yi}{i}+\dfrac{x-yi}{x+yi}=\dfrac{(x+yi)i}{i^2}+\dfrac{(x-yi)^2}{(x+yi)(x-yi)}$

$=y-xi+\dfrac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2}$

$=-2-4i+\dfrac{4^2-(-2)^2-2\cdot4\cdot(-2)i}{4^2+(-2)^2}$

$=-2-4i+\dfrac{3+4i}{5}$

$=-\dfrac{7}{5}-\dfrac{16}{5}i$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$k\leqq\dfrac{1}{2}$，$2\leqq k$

(2)　$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，重解は $x=\dfrac{1}{2}$；　$k=2$ のとき，重解は $x=-1$

解説

判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-1\cdot(-k^2+3k-1)=k^2-2k+1+k^2-3k+1$

$=2k^2-5k+2=(2k-1)(k-2)$

(1)　実数解をもつための条件は　$D\geqq0$

よって　$(2k-1)(k-2)\geqq0$　　ゆえに　$k\leqq\dfrac{1}{2}$，$2\leqq k$

(2)　重解をもつための条件は　$D=0$

よって　$(2k-1)(k-2)=0$　　ゆえに　$k=\dfrac{1}{2}$，2

また，重解は　$x=-\dfrac{2(k-1)}{2\cdot1}=1-k$

したがって　$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，重解は $x=\dfrac{1}{2}$

$k=2$ のとき，重解は $x=-1$

別解　(後半)　$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，方程式は　$x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$

これを解いて　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$　　よって　$x=\dfrac{1}{2}$

$k=2$ のとき，方程式は　$x^2+2x+1=0$

これを解いて　$(x+1)^2=0$　　よって　$x=-1$

$\boxed{6}$

解答　$\dfrac{4}{3}\leqq a\leqq4$

解説

$\begin{cases}x+y-a+4=0 & \cdots\cdots ①\\ x^2+y^2+a^2-4a=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

① から　$y=-x+a-4$　……①′

これを ② に代入して　$x^2+(-x+a-4)^2+a^2-4a=0$

よって　$x^2-(a-4)x+a^2-6a+8=0$　……③

x の方程式 ③ が実数解をもてば，①′ から，y も実数となる。

③ の判別式を D とすると

$D=\{-(a-4)\}^2-4(a^2-6a+8)=-3a^2+16a-16$

$=-(3a^2-16a+16)=-(3a-4)(a-4)$

求める条件は　$D\geqq0$　すなわち　$(3a-4)(a-4)\leqq0$

したがって　$\dfrac{4}{3}\leqq a\leqq4$

$\boxed{1}$

解答　$k=-4$

解説

方程式の実数解を α とすると

$$(1+i)\alpha^2+(k+i)\alpha+3+3ki=0$$

整理して　$(\alpha^2+k\alpha+3)+(\alpha^2+\alpha+3k)i=0$

α，k は実数であるから，$\alpha^2+k\alpha+3$，$\alpha^2+\alpha+3k$ も実数。

よって　$\alpha^2+k\alpha+3=0$　……①

$\alpha^2+\alpha+3k=0$　……②

①－② から　$(k-1)\alpha-3(k-1)=0$

ゆえに　$(k-1)(\alpha-3)=0$

よって　$k=1$　または　$\alpha=3$

[1]　$k=1$ のとき

①，② はともに $\alpha^2+\alpha+3=0$ となる。

これを満たす実数 α は存在しないから，不適。

[2]　$\alpha=3$ のとき

①，② はともに $12+3k=0$ となる。

ゆえに　$k=-4$

[1]，[2] から，求める k の値は　$k=-4$

$\boxed{2}$

解答　$2\leqq b\leqq 6$

解説

実数解をもつための条件は，判別式 D について

$$D=(8-a)^2-4(12-ab)\geqq 0$$

すなわち　$a^2+4(b-4)a+16\geqq 0$　……[A]

a についての２次方程式 $a^2+4(b-4)a+16=0$ の判別式を D_1 とすると，[A] がすべての実数 a に対して成り立つための条件は，a^2 の係数が正であるから　$D_1\leqq 0$

$$\frac{D_1}{4}=4(b-4)^2-16=4\{(b-4)^2-4\}=4(b-2)(b-6)$$

であるから，$(b-2)(b-6)\leqq 0$ を解いて　$2\leqq b\leqq 6$

$\boxed{3}$

解答　８個

解説

２次方程式 $x^2-ax+3=0$，$x^2+ax+2a=0$ の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1=(-a)^2-4\cdot 1\cdot 3=(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})$$

$$D_2=a^2-4\cdot 1\cdot 2a=a(a-8)$$

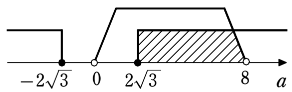
２つの２次方程式の一方が実数解をもち，他方が虚数解をもつための条件は

「$D_1\geqq 0$ かつ $D_2<0$」　または　「$D_1<0$ かつ $D_2\geqq 0$」

[1]　$D_1\geqq 0$ かつ $D_2<0$ のとき

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})\geqq 0$　かつ　$a(a-8)<0$

よって　$(a\leqq -2\sqrt{3}$　または　$2\sqrt{3}\leqq a)$　かつ　$0<a<8$



ゆえに　$2\sqrt{3}\leqq a<8$

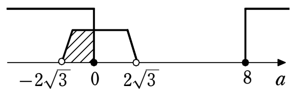
a は整数であるから

$a=4,\ 5,\ 6,\ 7$

[2]　$D_1<0$ かつ $D_2\geqq 0$ のとき

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$　かつ　$a(a-8)\geqq 0$

よって　$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$　かつ　$(a\leqq 0$　または　$8\leqq a)$



ゆえに　$-2\sqrt{3}<a\leqq 0$

a は整数であるから

$a=-3,\ -2,\ -1,\ 0$

[1]，[2] から，求める a の個数は　８個

$\boxed{1}$

解答　(1)　$-\dfrac{8}{9}$　(2)　$-\dfrac{1}{2}$　(3)　$\dfrac{28}{9}$　(4)　$-\dfrac{7}{3}$　(5)　$\dfrac{52}{9}$　(6)　$\dfrac{80}{27}$

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}$，$\alpha\beta=-\dfrac{4}{3}$

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=-\dfrac{8}{9}$

(2)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{2}{3}\div\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$

(3)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{28}{9}$

(4)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{28}{9}\div\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{28}{9}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{7}{3}$

(5)　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta=\dfrac{28}{9}-2\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{28}{9}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{52}{9}$

(6)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{80}{27}$

別解　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\dfrac{2}{3}\left\{\dfrac{28}{9}-\left(-\dfrac{4}{3}\right)\right\}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{40}{9}=\dfrac{80}{27}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$k=32$；4，8　(2)　$k=27$ のとき 3，9；$k=-64$ のとき -4，16

解説

(1)　１つの解が他の解の２倍であるから，２つの解は α，2α と表すことができる。

解と係数の関係から

$\alpha+2\alpha=12$　……①，　$\alpha\cdot 2\alpha=k$　……②

① から　$\alpha=4$　　これを ② に代入して　$k=32$

また，他の解は　$2\alpha=8$

よって　$k=32$，２つの解は 4，8

(2)　１つの解が他の解の２乗であるから，２つの解は α，α^2 と表すことができる。

解と係数の関係から

$\alpha+\alpha^2=12$　……①，　$\alpha\cdot\alpha^2=k$　……②

① から　$\alpha^2+\alpha-12=0$　　よって　$(\alpha+4)(\alpha-3)=0$

ゆえに　$\alpha=-4,\ 3$

$\alpha=-4$ のとき，② から　$k=-64$　他の解は，$\alpha^2=16$

$\alpha=3$　のとき，② から　$k=27$　他の解は，$\alpha^2=9$

よって　$k=27$　のとき，２つの解は　3，9

$k=-64$ のとき，２つの解は　-4，16

$\boxed{3}$

解答　(1)　$6x^2-5x-6=0$　(2)　$x^2-4x+13=0$

解説

(1)　２数の和は　$\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{5}{6}$，　２数の積は　$\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-1$

よって　$x^2-\dfrac{5}{6}x-1=0$　　すなわち　$6x^2-5x-6=0$

(2)　２数の和は　$(2+3i)+(2-3i)=4$，　２数の積は　$(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=13$

よって　$x^2-4x+13=0$

4

解答　$4x^2+11x+9=0$

解説

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{2}$，　$\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

よって　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{3}{2}=-\dfrac{11}{4}$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

ゆえに，α^2，β^2 を解とする２次方程式の１つは

$x^2-\left(-\dfrac{11}{4}\right)x+\dfrac{9}{4}=0$　すなわち　$x^2+\dfrac{11}{4}x+\dfrac{9}{4}=0$

両辺に４を掛けて　$4x^2+11x+9=0$

5

解答　(1)　$m>10$　(2)　$m<-\dfrac{5}{2}$

解説

２次方程式 $x^2-mx+2m+5=0$ の異なる２つの解を α，β とし，判別式を D とする。

(1)　$\alpha>0$，$\beta>0$ となるための条件は，次の①，②，③が成り立つことである。

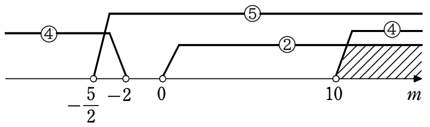
$$\begin{cases} D=(-m)^2-4(2m+5)>0 & \cdots\cdots ① \\ \alpha+\beta=m>0 & \cdots\cdots ② \\ \alpha\beta=2m+5>0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①から　$m^2-8m-20>0$　　ゆえに　$(m+2)(m-10)>0$

よって　$m<-2$，$10<m$　……④

③から　$m>-\dfrac{5}{2}$　……⑤

②，④，⑤の共通範囲を求めて　$m>10$



別解　$f(x)=x^2-mx+2m+5$ とおくと，異なる２つの解がともに正となる条件は

$D>0$，(軸) $-\dfrac{-m}{2\cdot1}>0$，$f(0)>0$

よって　$(-m)^2-4(2m+5)>0$，$m>0$，$2m+5>0$

(2)　正と負の解をもつための条件は，$\alpha\beta<0$ が成り立つことである。

ゆえに　$2m+5<0$　　よって　$m<-\dfrac{5}{2}$

参考　$\alpha\beta<0$ のとき，解と係数の関係から　$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}<0$　　よって　$ac<0$

したがって　$D=b^2-4ac>0$

別解　$f(0)<0$

1

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}$　(2)　0　(3)　-1　(4)　$\dfrac{5}{2}$　(5)　$-\dfrac{1}{2}$　(6)　-1

解説

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{-2}{2}=1$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

(1)　$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}\cdot1=\dfrac{1}{2}$

(2)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=0$

(3)　$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0-2\cdot\dfrac{1}{2}=-1$

(4)　$(1+\alpha)(1+\beta)=1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta=1+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

(5)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot1=-\dfrac{1}{2}$

別解　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=1\cdot\left(0-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

(6)　$\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}}=-1$

2

解答　(1)　$m=2$ のとき $x=1$，2；$m=-4$ のとき $x=-1$，-2

(2)　$m=8$ のとき $x=2$，4；$m=-27$ のとき $x=-3$，9

解説

(1)　２つの解は，α，$\alpha+1$ と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+(\alpha+1)=m+1$，$\alpha(\alpha+1)=2$

すなわち　$2\alpha=m$，$\alpha^2+\alpha-2=0$

$\alpha^2+\alpha-2=0$ から　$(\alpha-1)(\alpha+2)=0$　　ゆえに　$\alpha=1$，-2

$\alpha=1$ のとき　$m=2\alpha=2\cdot1=2$　　他の解は　$\alpha+1=1+1=2$

$\alpha=-2$ のとき　$m=2\alpha=2\cdot(-2)=-4$　　他の解は　$\alpha+1=-2+1=-1$

よって，$m=2$ のとき，２つの解は　1，2

$m=-4$ のとき，２つの解は　-1，-2

(2)　２つの解は，α，α^2 と表すことができる。

解と係数の関係から　$\alpha+\alpha^2=6$，$\alpha\cdot\alpha^2=m$

すなわち　$\alpha^2+\alpha-6=0$，$\alpha^3=m$

$\alpha^2+\alpha-6=0$ から　$(\alpha-2)(\alpha+3)=0$　　ゆえに　$\alpha=2$，-3

$\alpha=2$ のとき　$m=2^3=8$　　他の解は　$\alpha^2=2^2=4$

$\alpha=-3$ のとき　$m=(-3)^3=-27$　　他の解は　$\alpha^2=(-3)^2=9$

よって，$m=8$ のとき，２つの解は　2，4

$m=-27$ のとき，２つの解は　-3，9

3

解答　(1)　$x^2-2x-3=0$　(2)　$6x^2-5x+1=0$　(3)　$4x^2+2x+1=0$

解説

(1)　２数の和は　$-1+3=2$

２数の積は　$(-1)\cdot3=-3$

よって，-1，3 を解とする２次方程式は　$x^2-2x-3=0$

別解　-1，3 を解とする２次方程式は　$(x+1)(x-3)=0$

左辺を展開して　$x^2-2x-3=0$

(2)　２数の和は　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$

２数の積は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

よって，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$ を解とする２次方程式は　$x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$

両辺に６を掛けて　$6x^2-5x+1=0$

別解　$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$ を解とする２次方程式は　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=0$

左辺を展開して　$x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$

両辺に６を掛けて　$6x^2-5x+1=0$

(3)　２数の和は　$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{4}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{4}=-\dfrac{1}{2}$

２数の積は　$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{4}\cdot\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{4}=\dfrac{1-3i^2}{16}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$

よって，$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{4}$，$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{4}$ を解とする２次方程式は

$x^2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{1}{4}=0$

両辺に４を掛けて　$4x^2+2x+1=0$

4

解答　(1)　$x^2-2x-8=0$　(2)　$x^2+4x+16=0$　(3)　$x^2+x+1=0$

解説

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=4$

(1)　$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-2+4=2$，　$(\alpha+\beta)\alpha\beta=-2\cdot4=-8$

したがって，求める２次方程式は　$x^2-2x-8=0$

(2)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot4=-4$，　$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=4^2=16$

したがって，求める２次方程式は　$x^2+4x+16=0$

(3)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{(-2)^2-2\cdot4}{4}=-1$，　$\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}=1$

したがって，求める２次方程式は　$x^2+x+1=0$

5

解答　(1)　$m>8$　(2)　$0<m<2$　(3)　$m<0$

解説

$x^2-2(m-4)x+2m=0$　……①

①の判別式を D とし，２つの解を α，β とする。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2(m-4)$，$\alpha\beta=2m$

(1)　①が異なる２つの正の解をもつための必要十分条件は

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=(m-4)^2-2m>0 & \cdots\cdots ② \\ \alpha+\beta>0 & \cdots\cdots ③ \\ \alpha\beta>0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

②から　$m^2-10m+16>0$

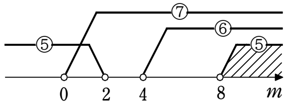
ゆえに　$(m-2)(m-8)>0$　　よって　$m<2,\ 8<m$ ……⑤

③から　$2(m-4)>0$

よって　$m>4$ ……⑥

④から　$2m>0$

よって　$m>0$ ……⑦



⑤，⑥，⑦の共通範囲を求めて　$m>8$

(2)　①が異なる２つの負の解をもつための必要十分条件は

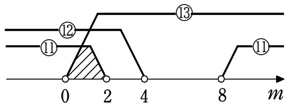
$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=(m-4)^2-2m>0 & \cdots\cdots ⑧ \\ \alpha+\beta<0 & \cdots\cdots ⑨ \\ \alpha\beta>0 & \cdots\cdots ⑩ \end{cases}$$

⑧から　$m<2,\ 8<m$ ……⑪

⑨から　$2(m-4)<0$

よって　$m<4$ ……⑫

⑩から　$m>0$ ……⑬



⑪，⑫，⑬の共通範囲を求めて　$0<m<2$

(3)　①の２つの解が異符号であるための必要十分条件は

$\alpha\beta<0$　すなわち　$2m<0$

よって　$m<0$

$\boxed{1}$

解答　$a=-2,\ 1$

解説

$x^2+ax-1=0$ の２つの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$\alpha+\beta=-a$ ……①，　$\alpha\beta=-1$ ……②

また，$x^2-a^2x-a=0$ の２つの解が $\alpha+1$，$\beta+1$ であるから，解と係数の関係により

$(\alpha+1)+(\beta+1)=a^2$ ……③，　$(\alpha+1)(\beta+1)=-a$ ……④

③から　$\alpha+\beta=a^2-2$　　①を代入して　$-a=a^2-2$

整理すると　$a^2+a-2=0$

ゆえに　$(a+2)(a-1)=0$　　よって　$a=-2,\ 1$

また，②を④に代入すると，$\alpha+\beta=-a$ となり，①と同じ式が得られる。

以上から，求める定数 a の値は　$a=-2,\ 1$

$\boxed{2}$

解答　$x+y=4$；$(x,\ y)=(2\pm\sqrt{5}\,i,\ 2\mp\sqrt{5}\,i)$（複号同順）

解説

$(x+y)^2=(x^2+y^2)+2xy=-2+2\cdot 9=16$

$x+y>0$ であるから　$x+y=4$

よって，x，y は２次方程式 $t^2-4t+9=0$ の解である。

これを解くと　$t=2\pm\sqrt{5}\,i$

したがって　$(x,\ y)=(2\pm\sqrt{5}\,i,\ 2\mp\sqrt{5}\,i)$（複号同順）

$\boxed{3}$

解答　(1)　$2<m<3$　　(2)　$m<-1$　　(3)　$m>3$　　(4)　$m>2$

解説

２次方程式 $x^2-2mx+m+2=0$ の異なる２つの解を α，β とすると

$\alpha+\beta=2m$，　$\alpha\beta=m+2$

また，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-m)^2-(m+2)=m^2-m-2=(m-2)(m+1)$$

(1)　$\alpha>1$，$\beta>1$ となるための条件は，次の①，②，③が成り立つことである。

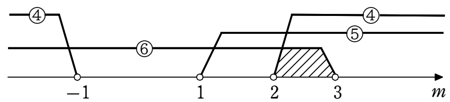
$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=(m-2)(m+1)>0 & \cdots\cdots ① \\ (\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=2m-2>0 & \cdots\cdots ② \\ (\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-m+3>0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①から　$m<-1,\ 2<m$ ……④

②から　$m>1$ ……⑤

③から　$m<3$ ……⑥

④，⑤，⑥の共通範囲を求めて　$2<m<3$



別解　$f(x)=x^2-2mx+m+2$ とおく。

異なる２つの解がともに１より大きくなる条件は

$D>0$，(軸)　$-\dfrac{-2m}{2\cdot 1}>1$，$f(1)>0$

よって　$m<-1$ または $2<m$，$m>1$，$m<3$

(2)　$\alpha\leqq 1$，$\beta\leqq 1$ となるための条件は，次の①，②，③が成り立つことである。

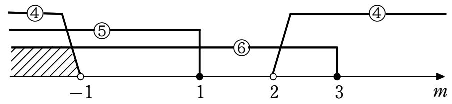
$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=(m-2)(m+1)>0 & \cdots\cdots ① \\ (\alpha-1)+(\beta-1)=2m-2\leqq 0 & \cdots\cdots ② \\ (\alpha-1)(\beta-1)=-m+3\geqq 0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①から　$m<-1,\ 2<m$ ……④

②から　$m\leqq 1$ ……⑤

③から　$m\leqq 3$ ……⑥

④，⑤，⑥の共通範囲を求めて　$m<-1$



別解　異なる２つの解がともに１以下となる条件は

$D>0$，(軸)　$-\dfrac{-2m}{2\cdot 1}<1$，$f(1)\geqq 0$

よって　$m<-1$ または $2<m$，$m<1$，$m\leqq 3$

(3)　１つの解が１より大きく，他の解が１より小さくなるための条件は

$(\alpha-1)(\beta-1)=-m+3<0$

よって　$m>3$

別解　１つの解が１より大きく，他の解が１より小さい条件は

$f(1)<0$

よって　$m>3$

(4)　異なる２つの実数解をもつような m の値の範囲は

$\dfrac{D}{4}=(m-2)(m+1)>0$　から　$m<-1,\ 2<m$ ……①

また，異なる２つの解がともに１以下となるような m の値の範囲は (2) より　$m<-1$

よって，少なくとも１つの解が１より大きくなるような m の値の範囲は

①から $m<-1$ を除いて　$m>2$

別解　少なくとも１つの解が１より大きくなるような m の値の範囲は

[1]　ともに１より大きくなるとき

(1) より　$2<m<3$

[2]　１つの解が１より大きく，他の解が１より小さいとき

(3) より　$m>3$

[3]　１つの解が１のとき

$1^2-2m\cdot 1+m+2=0$ から　$m=3$

このとき，方程式は $x^2-6x+5=0$　すなわち　$(x-1)(x-5)=0$

他の解は５（>1）であるから，条件を満たす。

[1]，[2]，[3] から，求める m の値の範囲は

$m>2$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$2x^2+4x-7=0$　　(2)　$p=\pm 2$，$q=2$

解説

(1)　解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

よって　$\left(\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta-\dfrac{1}{\beta}\right)=(\alpha+\beta)-\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2-4=-2$

$$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)=\alpha\beta-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{1}{2}-8+2+2=-\frac{7}{2}$$

したがって，求める２次方程式の１つは

$x^2+2x-\dfrac{7}{2}=0$　すなわち　$2x^2+4x-7=0$

(2)　２つの２次方程式において，解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-p$　……①，$\alpha\beta=q$　……②

$(\alpha^2+1)+(\beta^2+1)=2$　……③，$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=5$　……④

③から　$\alpha^2+\beta^2=0$　……⑤

よって　$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=0$

これに①，②を代入すると　$p^2-2q=0$　……⑥

④から　$(\alpha\beta)^2+(\alpha^2+\beta^2)+1=5$

これに②，⑤を代入すると　$q^2=4$

ゆえに　$q=\pm2$

$q=2$ のとき，⑥から $p^2=4$ となり　$p=\pm2$

$q=-2$ のとき，⑥から $p^2=-4$ となり，$p^2=-4$ を満たす実数 p は存在しない。

以上から　$p=\pm2$，$q=2$

$\boxed{1}$

解答　$(x,\ y)=(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(1,\ 5)$，$(5,\ 1)$

解説

$$\begin{cases} x+y+xy=11 & \cdots\cdots ① \\ x^2y+xy^2=30 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②から　$xy(x+y)=30$　……③

$x+y=u$，$xy=v$ とおくと，①，③から　$u+v=11$，$uv=30$

よって，u，v は $t^2-11t+30=0$ の解である。

これを解いて　$(t-5)(t-6)=0$　ゆえに　$t=5,\ 6$

よって　$(u,\ v)=(5,\ 6)$，$(6,\ 5)$

すなわち　$(x+y,\ xy)=(5,\ 6)$，$(6,\ 5)$

[1]　$x+y=5$，$xy=6$ のとき，x，y は $t^2-5t+6=0$ の解である。

これを解いて　$(t-2)(t-3)=0$　よって　$t=2,\ 3$

[2]　$x+y=6$，$xy=5$ のとき，x，y は $t^2-6t+5=0$ の解である。

これを解いて　$(t-1)(t-5)=0$　よって　$t=1,\ 5$

[1]，[2] から　$(x,\ y)=(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(1,\ 5)$，$(5,\ 1)$

$\boxed{2}$

解答　$k=2$，$(x+y-2)(x+2y-1)$

解説

$P=x^2+3xy+2y^2-3x-5y+k$ とすると

$$P=x^2+3(y-1)x+2y^2-5y+k$$

$P=0$ を x についての２次方程式と考えると，解の公式から

$$x=\frac{-3(y-1)\pm\sqrt{9(y-1)^2-4(2y^2-5y+k)}}{2}$$

$$=\frac{-3(y-1)\pm\sqrt{y^2+2y+9-4k}}{2}$$

P が x，y の１次式の積に因数分解できるためには，この解が y の１次式で表されなければならない。

よって，根号内の式 $y^2+2y+9-4k$ は完全平方式でなければならないから，

$y^2+2y+9-4k=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=1^2-(9-4k)=4k-8=0$　ゆえに　$k=2$

このとき　$x=\dfrac{-3(y-1)\pm\sqrt{(y+1)^2}}{2}=\dfrac{-3y+3\pm(y+1)}{2}$

すなわち　$x=-y+2,\ -2y+1$

よって　$P=\{x-(-y+2)\}\{x-(-2y+1)\}=(x+y-2)(x+2y-1)$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=a,\ b$　(2)　0

解説

(1)　$(x-a)(x-b)-2x+1=0$ の解が α，β であるから，等式

$$(x-a)(x-b)-2x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$$

が成り立つ。

よって　$(x-\alpha)(x-\beta)+2x-1=(x-a)(x-b)$

ゆえに，$(x-\alpha)(x-\beta)+2x-1=0$ の解は　$x=a,\ b$

別解　第１の方程式から　$x^2-(a+b+2)x+ab+1=0$

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=a+b+2$ ……①，$\alpha\beta=ab+1$ ……②

第２の方程式から　$x^2-(\alpha+\beta-2)x+\alpha\beta-1=0$

①，②から　$x^2-(a+b)x+ab=0$

ゆえに　$(x-a)(x-b)=0$　よって　$x=a,\ b$

(2)　$(x-1)(x-2)+(x-2)x+x(x-1)=0$ の２つの解が α，β であるから，次の等式が成り立つ。

$$(x-1)(x-2)+(x-2)x+x(x-1)=3(x-\alpha)(x-\beta)$$

両辺に $x=0,\ 1,\ 2$ を代入すると，それぞれ

$$2=3\alpha\beta,\ -1=3(1-\alpha)(1-\beta),\ 2=3(2-\alpha)(2-\beta)$$

ゆえに　$\alpha\beta=\dfrac{2}{3}$，$(\alpha-1)(\beta-1)=-\dfrac{1}{3}$，$(\alpha-2)(\beta-2)=\dfrac{2}{3}$

よって，求める式の値は　$\dfrac{3}{2}-3+\dfrac{3}{2}=0$

$\boxed{4}$

解答　$a=3$，$b=11$；整数解は $x=1,\ 11$

解説

２つの整数解を α，β $(\alpha\leqq\beta)$ とする。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=4a$，$\alpha\beta=\dfrac{ab}{3}$　……①

α，β は整数，a，b は素数であるから，① により

$a=3$　または　$b=3$　また　$\alpha>0$，$\beta>0$

[1]　$a=3$ のとき　$\alpha+\beta=12$，$\alpha\beta=b$

$\alpha\beta=b$ で，b は素数であるから　$\alpha=1$，$\beta=b$

よって　$1+b=12$　ゆえに　$b=11$，$\beta=11$

[2]　$b=3$ のとき　$\alpha+\beta=4a$，$\alpha\beta=a$

$\alpha\beta=a$ で，a は素数であるから　$\alpha=1$，$\beta=a$

よって　$1+a=4a$　このとき，$a=\dfrac{1}{3}$ となり不適。

以上から　$a=3$，$b=11$；整数解は　$x=1,\ 11$

1

解答　(1)　40　　(2)　8

解説

(1)　$P(x)=x^3+2x^2-3x+4$ とする。

求める余りは　$P(3)=3^3+2\cdot3^2-3\cdot3+4=27+18-9+4=40$

(2)　$P(x)=8x^3+4x^2-10x+3$ とする。

求める余りは　$P\left(-\frac{1}{2}\right)=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3$

$=-1+1+5+3=8$

2

解答　(1)　$a=4$　　(2)　$a=10$

解説

(1)　$P(x)=x^3-3x^2+a$ とする。

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが２となるための条件は

$P(1)=2$　すなわち　$1^3-3\cdot1^2+a=2$

よって　$a=4$

(2)　$P(x)=2x^3-3x^2+ax+6$ とする。

$P(x)$ が $2x+1$ で割り切れるための条件は　$P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

すなわち　$2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+a\left(-\frac{1}{2}\right)+6=0$

よって　$a=10$

3

解答　(1)　商 $3x^2-7x+14$，余り -25　　(2)　商 x^2-x+2，余り -9

(3)　商 x^2-2x+1，余り 0

解説

(1)

$$\begin{array}{rrrr|r}
3 & -1 & 0 & 3 & -2 \\
 & -6 & 14 & -28 & \\
\hline
3 & -7 & 14 & -25 &
\end{array}$$

商 $3x^2-7x+14$，余り -25

(2)

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & -1 & -3 & -3 \\
 & -3 & 3 & -6 & \\
\hline
1 & -1 & 2 & -9 &
\end{array}$$

商 x^2-x+2，余り -9

(3)

$$\begin{array}{rrrr|r}
2 & -7 & 8 & -3 & \frac{3}{2} \\
 & 3 & -6 & 3 & \\
\hline
2 & -4 & 2 & 0 &
\end{array}$$

ゆえに　$2x^3-7x^2+8x-3=\left(x-\frac{3}{2}\right)(2x^2-4x+2)=(2x-3)(x^2-2x+1)$

よって　商 x^2-2x+1，余り 0

4

解答　(1)　$(x+1)(x+2)(x-4)$　　(2)　$(2x-3)(x^2+2x+3)$

(3)　$(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$

解説

(1)　与式を $P(x)$ とすると　$P(-1)=-1-1+10-8=0$

ゆえに，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

よって　$P(x)=(x+1)(x^2-2x-8)$

$=(x+1)(x+2)(x-4)$

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & -1 & -10 & -8 & -1 \\
 & -1 & 2 & 8 & \\
\hline
1 & -2 & -8 & 0 &
\end{array}$$

(2)　$P(x)=2x^3+x^2-9$ とすると

$P\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{4}+\frac{9}{4}-9=0$

よって，$P(x)$ は $2x-3$ を因数にもつ。

右の割り算から　$P(x)=(2x-3)(x^2+2x+3)$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2+2x+3 \\
2x-3\,\big) & 2x^3+x^2\quad\;-9 \\
 & 2x^3-3x^2 \\
\hline
 & \quad 4x^2 \\
 & \quad 4x^2-6x \\
\hline
 & \qquad 6x-9 \\
 & \qquad 6x-9 \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

(3)　$P(x)=x^4+6x^3+7x^2-6x-8$ とすると

$P(1)=1+6+7-6-8=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$P(x)=(x-1)(x^3+7x^2+14x+8)$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^3+7x^2+14x+8 \\
x-1\,\big) & x^4+6x^3+7x^2-6x-8 \\
 & x^4-x^3 \\
\hline
 & \quad 7x^3+7x^2 \\
 & \quad 7x^3-7x^2 \\
\hline
 & \qquad 14x^2-6x \\
 & \qquad 14x^2-14x \\
\hline
 & \qquad\quad 8x-8 \\
 & \qquad\quad 8x-8 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}$$

ここで，$Q(x)=x^3+7x^2+14x+8$ とすると

$Q(-1)=-1+7-14+8=0$

よって，$Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

右の割り算から

$Q(x)=(x+1)(x^2+6x+8)=(x+1)(x+2)(x+4)$

$P(x)=(x-1)Q(x)$ であるから

$P(x)=(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2+6x+8 \\
x+1\,\big) & x^3+7x^2+14x+8 \\
 & x^3+x^2 \\
\hline
 & \quad 6x^2+14x \\
 & \quad 6x^2+6x \\
\hline
 & \qquad 8x+8 \\
 & \qquad 8x+8 \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

5

解答　$-2x+3$

解説

$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$

等式の両辺に $x=2$，-3 を代入すると

$P(2)=2a+b$，$P(-3)=-3a+b$

また，$x-2$ で割った余りが -1，$x+3$ で割った余りが 9 であるから

$P(2)=-1$，　$P(-3)=9$

よって　$2a+b=-1$，$-3a+b=9$

これを解くと　$a=-2$，$b=3$

したがって，求める余りは　$-2x+3$

6

解答　x

解説

x^{99} を x^2-1 すなわち $(x+1)(x-1)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$x^{99}=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$

この両辺に $x=-1$，1 を代入すると　$(-1)^{99}=-a+b$，$1^{99}=a+b$

すなわち　$-1=-a+b$，$1=a+b$　　これを解くと　$a=1$，$b=0$

よって，求める余りは　x

7

解答　$-4x^2+10x+5$

解説

$P(x)$ を 3 次式 $(x+1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x+1)^2(x-2)Q(x)+R(x)$　……①　($R(x)$ は 2 次以下の整式)

$(x+1)^2(x-2)Q(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れるから，$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りは，$R(x)$ を $(x+1)^2$ で割った余りと等しい。

よって，$R(x)$ は次のように表される。

$R(x)=a(x+1)^2+18x+9$　(a は定数)

ゆえに，等式①は，次のように表される。

$P(x)=(x+1)^2(x-2)Q(x)+a(x+1)^2+18x+9$

よって　$P(2)=9a+45$

$P(x)$ を $x-2$ で割った余りは 9 であるから　$P(2)=9$

ゆえに　$9a+45=9$　　すなわち　$a=-4$

したがって，求める余りは　$-4(x+1)^2+18x+9=-4x^2+10x+5$

$\boxed{1}$

解答　(1)　9　　(2)　0

解説

(1)　$P(x)=x^3+3x^2-2x+1$ とすると，求める余りは

$$P(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-2(-2)+1=-8+12+4+1=9$$

(2)　$P(x)=3x^3-10x^2+1$ とすると，求める余りは

$$P\left(\frac{1}{3}\right)=3\left(\frac{1}{3}\right)^3-10\left(\frac{1}{3}\right)^2+1=\frac{1}{9}-\frac{10}{9}+1=0$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a=-7$　　(2)　$a=-4$　　(3)　$a=2,\ b=-6$

解説

(1)　$P(x)$ が $x+3$ で割り切れるための条件は

$P(-3)=0$　すなわち　$(-3)^3+a(-3)+6=0$

よって　$-3a-21=0$　　ゆえに　$a=-7$

(2)　$P(x)$ を $2x+1$ で割ったときの余りが 4 になるための条件は

$P\left(-\frac{1}{2}\right)=4$　すなわち　$4\left(-\frac{1}{2}\right)^3+a\left(-\frac{1}{2}\right)^2-5\left(-\frac{1}{2}\right)+3=4$

よって　$\frac{a}{4}+5=4$　　ゆえに　$a=-4$

(3)　$P(x)$ が $x+3$ で割り切れるための条件は

$P(-3)=0$　すなわち　$(-3)^3+a(-3)^2+b(-3)-9=0$

よって　$3a-b-12=0$　……①

$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りが -5 となるための条件は

$P(2)=-5$　すなわち　$2^3+a\cdot 2^2+b\cdot 2-9=-5$

よって　$2a+b+2=0$　……②

①，② を連立して解くと　$a=2,\ b=-6$

$\boxed{3}$

解答　(1)　商 $2x^2-2x-1$，余り 4　　(2)　商 $5x^2-3x+6$，余り -15

(3)　商 x^2+3x-2，余り 1

解説

(1)

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -4 & 1 & 5 & 1 \\ & 2 & -2 & -1 & \\ \hline 2 & -2 & -1 & \boxed{4} & \end{array}$$

よって　商 $2x^2-2x-1$，余り 4

(2)

$$\begin{array}{rrrr|r} 5 & 7 & 0 & -3 & -2 \\ & -10 & 6 & -12 & \\ \hline 5 & -3 & 6 & \boxed{-15} & \end{array}$$

よって　商 $5x^2-3x+6$，余り -15

(3)　整式 A を $x-\frac{1}{2}$ で割る組立除法は

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 5 & -7 & 3 & \frac{1}{2} \\ & 1 & 3 & -2 & \\ \hline 2 & 6 & -4 & \boxed{1} & \end{array}$$

したがって　$2x^3+5x^2-7x+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+6x-4)+1$

$=(2x-1)(x^2+3x-2)+1$

よって　商 x^2+3x-2，余り 1

$\boxed{4}$

解答　(1)　$(x+1)(x-2)(x-3)$　　(2)　$(x+1)(x+2)(2x+3)$

(3)　$(2x+1)(x^2-3x+4)$　　(4)　$(x-2)(2x-1)(x^2+x+1)$

解説

(1)　$P(x)=x^3-4x^2+x+6$ とすると

$P(-1)=(-1)^3-4(-1)^2+(-1)+6=-1-4-1+6=0$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつから

$P(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x+1)(x-2)(x-3)$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -4 & 1 & 6 & -1 \\ & -1 & 5 & -6 & \\ \hline 1 & -5 & 6 & 0 & \end{array}$$

(2)　$P(x)=2x^3+9x^2+13x+6$ とおくと

$P(-1)=2(-1)^3+9(-1)^2+13(-1)+6=0$

ゆえに，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

右のように割り算を行うと

$P(x)=(x+1)(2x^2+7x+6)$

したがって

$2x^3+9x^2+13x+6$

$=(x+1)(2x^2+7x+6)$

$=(x+1)(x+2)(2x+3)$

$$\begin{array}{r@{\,}l} & 2x^2+7x+6 \\ x+1\,) & \overline{2x^3+9x^2+13x+6} \\ & \underline{2x^3+2x^2} \\ & 7x^2+13x \\ & \underline{7x^2+\ 7x} \\ & 6x+6 \\ & \underline{6x+6} \\ & 0 \end{array}$$

(3)　$P(x)=2x^3-5x^2+5x+4$ とすると

$P\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3-5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4$

$=-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}-\frac{5}{2}+4=0$

よって，$P(x)$ は $x+\frac{1}{2}$ を因数にもつから

$P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-6x+8)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2(x^2-3x+4)$

$=(2x+1)(x^2-3x+4)$

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & -5 & 5 & 4 & -\frac{1}{2} \\ & -1 & 3 & -4 & \\ \hline 2 & -6 & 8 & 0 & \end{array}$$

(4)　与式を $P(x)$ とすると

$P(2)=32-24-4-6+2=0$

ゆえに，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

よって　$P(x)=(x-2)(2x^3+x^2+x-1)$

$Q(x)=2x^3+x^2+x-1$ とすると

$Q\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1=0$

ゆえに，$Q(x)$ は $x-\frac{1}{2}$ を因数にもつ。

よって　$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x+2)=(2x-1)(x^2+x+1)$

したがって　$P(x)=(x-2)(2x-1)(x^2+x+1)$

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 2 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

$\boxed{5}$

解答　$-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$

解説

$P(x)$ を 2 次式 $(x-1)(2x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x-1)(2x+1)Q(x)+ax+b$　……①

$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 3 であるから　$P(1)=3$

① の両辺に $x=1$ を代入すると　$P(1)=a+b$

よって　$a+b=3$　……②

また，$P(x)$ を $2x+1$ で割ったときの余りが 4 であるから　$P\left(-\frac{1}{2}\right)=4$

① の両辺に $x=-\frac{1}{2}$ を代入すると　$P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{a}{2}+b$

よって　$-\frac{a}{2}+b=4$　……③

②，③ を解くと　$a=-\frac{2}{3},\ b=\frac{11}{3}$

したがって，求める余りは　$-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$

$\boxed{6}$

解答　x

解説

$P(x)=x^{2017}$ ……① とする。

$P(x)$ を x^2+x すなわち $x(x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=x(x+1)Q(x)+ax+b$　……②

① から　$P(0)=0,\ P(-1)=-1$

よって，② から　$b=0,\ -a+b=-1$

ゆえに　$a=1,\ b=0$

したがって，求める余りは　x

$\boxed{7}$

解答　x^2+2x-4

解説

$P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする。

このときの余りは，2 次以下の整式または 0 であるから，

ax^2+bx+c（$a,\ b,\ c$ は定数）とおける。

よって　$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$

更に，$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると余りが $4x-5$ であるから

$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2+4x-5$　……①

と表される。

$P(x)$ を $x+2$ で割ると余りが -4 であるから　$P(-2)=-4$

また，① から　$P(-2)=9a-13$

よって　$9a-13=-4$　　ゆえに　$a=1$

したがって，求める余りは　$(x-1)^2+4x-5$　すなわち　x^2+2x-4

別解　$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると

$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+4x-5$　……①

$P(x)$ を $x+2$ で割ると余りが -4 であるから　$P(-2)=-4$

また，① から　$P(-2)=9Q_1(-2)-13$

よって　$9Q_1(-2)-13=-4$　　ゆえに　$Q_1(-2)=1$

よって，$R(x)$ を整式として

$Q_1(x)=(x+2)R(x)+1$

と表される。これを ① に代入して

$$P(x)=(x-1)^2\{(x+2)R(x)+1\}+4x-5$$
$$=(x-1)^2(x+2)R(x)+(x-1)^2+4x-5$$
$$=(x-1)^2(x+2)R(x)+x^2+2x-4$$

ゆえに，求める余りは　x^2+2x-4

$\boxed{1}$

解答　(1)　5　(2)　$\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$　(3)　$-\frac{1}{3}x^2+2x+\frac{7}{3}$

解説

(1)　$P(x)$ を $x^2-4=(x-2)(x+2)$ で割った商を $Q_1(x)$ とすると

$$P(x)=(x-2)(x+2)Q_1(x)+2x+1 \quad \cdots\cdots ①$$

よって　$P(2)=2\cdot2+1=5$

(2)　$P(x)$ を $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ で割った商を $Q_2(x)$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+x+3 \quad \cdots\cdots ②$$

$P(x)$ を $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ で割った商を $Q_3(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q_3(x)+ax+b$$

よって　$P(1)=a+b$，$P(-2)=-2a+b$

① から　$P(-2)=2\cdot(-2)+1=-3$

② から　$P(1)=1+3=4$

ゆえに　$-2a+b=-3$，$a+b=4$

これを解いて　$a=\frac{7}{3}$，$b=\frac{5}{3}$

よって，余りは　$\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}$

(3)　$P(x)$ を $x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x+2)(x-2)$ で割った商を $Q_4(x)$，余りを px^2+qx+r とすると

$$P(x)=(x-1)(x+2)(x-2)Q_4(x)+px^2+qx+r$$

よって　$P(1)=p+q+r$

$P(-2)=4p-2q+r$

$P(2)=4p+2q+r$

① から　$P(-2)=-3$，$P(2)=5$

② から　$P(1)=4$

ゆえに　$p+q+r=4$

$4p-2q+r=-3$

$4p+2q+r=5$

これらの連立方程式を解いて　$p=-\frac{1}{3}$，$q=2$，$r=\frac{7}{3}$

よって，余りは　$-\frac{1}{3}x^2+2x+\frac{7}{3}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a=3$，$b=2$　(2)　$nx-n$

解説

(1)　$f(x)$ は $x-1$ で割り切れるから　$f(1)=0$

よって　$1-a+b=0$　ゆえに　$b=a-1 \quad \cdots\cdots ①$

したがって　$f(x)=x^3-ax+a-1$

$$=(x-1)(x^2+x+1-a)$$

$g(x)=x^2+x+1-a$ とすると　$g(1)=0$

よって　$3-a=0$　ゆえに　$a=3$

これを ① に代入して　$b=2$

(2)　x^n-1 を 2 次式 $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$x^n-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$$

両辺に $x=1$ を代入すると

$0=a+b$　よって　$b=-a$

ゆえに　$x^n-1=(x-1)^2Q(x)+ax-a$

$$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$$

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)$ であるから

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+a$$

両辺に $x=1$ を代入すると

$$1+1+\cdots\cdots+1+1=a$$

よって　$a=n$　ゆえに　$b=-a=-n$

したがって，求める余りは　$nx-n$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$-2x+1$　(2)　x^2-2x

解説

(1)　$P(x)$ を x^2-1 すなわち $(x+1)(x-1)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x+1)(x-1)Q_1(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ①$$

条件から　$P(1)=-1$，$P(-1)=3$

① から　$P(1)=a+b$，$P(-1)=-a+b$

よって　$a+b=-1$，$-a+b=3$

この連立方程式を解いて　$a=-2$，$b=1$

したがって，求める余りは　$-2x+1$

(2)　$P(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x-1)^2(x+1)Q_2(x)+px^2+qx+r \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，$(x-1)^2(x+1)Q_2(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるから，$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは，px^2+qx+r を $(x-1)^2$ で割ったときの余りに等しい。

$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが定数であるとき，その定数を c とすると

$$px^2+qx+r=p(x-1)^2+c$$

② から　$P(x)=(x-1)^2(x+1)Q_2(x)+p(x-1)^2+c \quad \cdots\cdots ③$

条件から　$P(1)=-1$，$P(-1)=3$

③ から　$P(1)=c$，$P(-1)=4p+c$

ゆえに　$c=-1$，　$4p+c=3$　よって　$p=1$

したがって，求める余りは　$1\cdot(x-1)^2-1$　すなわち　x^2-2x

1

解答　(ア)　1　(イ)　1　(ウ)　2　(エ)　3

解説

$P(x)$ を x^2-1 で割ったときの商を $Q(x)$，x^2+1 で割ったときの商を $R(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x^2-1)Q(x)+x+2$

$P(x)=(x^2+1)R(x)+3x+4$

ゆえに

$P(1)=3$　よって　$a+b+c+d=3$　……①

$P(-1)=1$　よって　$-a+b-c+d=1$　……②

$P(i)=4+3i$　よって　$ai^3+bi^2+ci+d=4+3i$

すなわち　$(-b+d)+(-a+c)i=4+3i$　……③

a，b，c，d は実数であるから，③ より　$-b+d=4$，$-a+c=3$　……④

また，①＋②，①－② から　$2b+2d=4$，$2a+2c=2$

すなわち　$b+d=2$，$a+c=1$　……⑤

④，⑤ を解いて　$a=-{}^{ア}1$，$b=-{}^{イ}1$，$c={}^{ウ}2$，$d={}^{エ}3$

2

解答　(1)　n が偶数のとき $-n^2+5n-4$，n が奇数のとき $2(n-1)x-n^2+3n-2$

(2)　$n=1$，4

解説

(1)　$P(x)$ を 2 次式 x^2-1 で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと，次の等式が成り立つ。

$x^{3n}+(3n-2)x^{2n}+(2n-3)x^n-n^2=(x^2-1)Q(x)+ax+b$　……①

[1]　n が偶数のとき

① に $x=1$ を代入すると

$1+(3n-2)+(2n-3)-n^2=a+b$

① に $x=-1$ を代入すると

$1+(3n-2)+(2n-3)-n^2=-a+b$

これを解くと　$a=0$，$b=-n^2+5n-4$

よって，余りは　$-n^2+5n-4$

[2]　n が奇数のとき

① に $x=1$ を代入すると

$1+(3n-2)+(2n-3)-n^2=a+b$

① に $x=-1$ を代入すると

$-1+(3n-2)-(2n-3)-n^2=-a+b$

これを解くと

$a=2n-2=2(n-1)$，$b=-n^2+3n-2$

よって，余りは　$2(n-1)x-n^2+3n-2$

(2)　[1]　n が偶数のとき

$-n^2+5n-4=0$　すなわち　$(n-1)(n-4)=0$

n は偶数であるから　$n=4$

[2]　n が奇数のとき

$2(n-1)x-n^2+3n-2=0$

よって　$2(n-1)=0$　かつ　$-n^2+3n-2=-(n-1)(n-2)=0$

ゆえに　$n=1$

以上から　$n=1$，4

3

解答　x^3+2x^2+4x+4

解説

整式 $P(x)$ を 4 次式 $(x^2+1)(x^2+x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$P(x)=(x^2+1)(x^2+x+1)Q(x)+R(x)$　$R(x)$ は 3 次以下

$P(x)$ を x^2+1，x^2+x+1 で割ったときの余りは，$R(x)$ を x^2+1，x^2+x+1 で割ったときの余りにそれぞれ等しいから，求める整式は $R(x)$ [3 次以下の式] である。

$R(x)$ を x^2+1 で割ったときの商は，1 次式または定数であり，条件から

$R(x)=(x^2+1)(ax+b)+3x+2$

同様に　$R(x)=(x^2+x+1)(ax+c)+2x+3$　と書ける。

よって　$(x^2+1)(ax+b)+3x+2=(x^2+x+1)(ax+c)+2x+3$

これは x についての恒等式である。

両辺を展開して整理すると

$ax^3+bx^2+(a+3)x+b+2=ax^3+(a+c)x^2+(a+c+2)x+c+3$

係数を比較して　$b=a+c$，$a+3=a+c+2$，$b+2=c+3$

これを解くと　$a=1$，$b=2$，$c=1$

したがって，求める整式は

$R(x)=(x^2+1)(x+2)+3x+2=x^3+2x^2+4x+4$

4

解答　(1)　略　(2)　略

解説

$P(x)=(x-1)(x^{2n}-1)(x^{2n}+1)$

$=(x-1)(x^n-1)(x^n+1)(x^{2n}+1)$

$Q(x)=(x^2-1)(x^2+1)(x^n-1)$

$=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^n-1)$

(1)　n が正の奇数のとき，$(-1)^n=-1$ であるから

$x=-1$ のとき　$x^n+1=0$，　$x=\pm i$ のとき　$x^{2n}+1=0$

よって，x^n+1 は $x+1$ を，$x^{2n}+1$ は x^2+1 を因数にもつから，$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れる。

(2)　n が正の偶数のとき，$(-1)^n=1$ であるから

$x=-1$ のとき　$x^n+1=2$，$x^{2n}+1=2$

よって，$(x^n+1)(x^{2n}+1)$ は $x+1$ を因数にもたないから，$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れない。

1

解答　(1)　$x=5$，$\dfrac{-5\pm5\sqrt{3}\,i}{2}$　(2)　$x=\pm2$，$\pm3i$　(3)　$x=2$，$1\pm2i$

(4)　$x=5$，$-1\pm\sqrt{11}\,i$

解説

(1)　移項すると　$x^3-125=0$

左辺を因数分解して　$(x-5)(x^2+5x+25)=0$

よって　$x-5=0$　または　$x^2+5x+25=0$

ゆえに　$x=5$，$\dfrac{-5\pm5\sqrt{3}\,i}{2}$

(2)　$x^4+5x^2-36=0$ から　$(x^2+9)(x^2-4)=0$

よって　$x^2+9=0$　または　$x^2-4=0$

ゆえに　$x=\pm2$，$\pm3i$

(3)　$P(x)=x^3-4x^2+9x-10$ とすると　$P(2)=8-16+18-10=0$

よって，$P(x)$ は $x-2$ で割り切れるから，$P(x)$ を因数分解すると

$P(x)=(x-2)(x^2-2x+5)$

$P(x)=0$ から　$x-2=0$　または　$x^2-2x+5=0$

したがって　$x=2$，$1\pm2i$

(4)　$P(x)=(x-2)(x-1)x-3\cdot4\cdot5$ とすると　$P(5)=3\cdot4\cdot5-3\cdot4\cdot5=0$

また　$P(x)=x^3-3x^2+2x-60$

$P(x)$ は $x-5$ で割り切れるから，$P(x)$ を因数分解すると

$P(x)=(x-5)(x^2+2x+12)$

$P(x)=0$ から　$x-5=0$　または　$x^2+2x+12=0$

よって　$x=5$，$-1\pm\sqrt{11}\,i$

2

解答　$a=-4$，$b=20$；他の解 $x=5$

解説

$P(x)=x^3-5x^2+ax+b$ とおくと

$P(-2)=0$ から　$(-2)^3-5\cdot(-2)^2+a\cdot(-2)+b=0$

よって　$-2a+b-28=0$　……①

$P(2)=0$ から　$2^3-5\cdot2^2+a\cdot2+b=0$

よって　$2a+b-12=0$　……②

①，② を解いて　$a=-4$，$b=20$

ゆえに　$P(x)=x^3-5x^2-4x+20$

$P(-2)=0$，$P(2)=0$ から，$P(x)$ は $(x+2)(x-2)$ で割り切れる。

よって　$P(x)=(x+2)(x-2)(x-5)$　したがって　$(x+2)(x-2)(x-5)=0$

ゆえに，他の解は　$x=5$

3

解答　$a=0$，$b=1$，他の解 $x=-2$，$1-2i$

解説

$1+2i$ が解であるから

$(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+10=0$

整理すると　$(-3a+b-1)+2(2a+b-1)i=0$

$-3a+b-1$，$2(2a+b-1)$ は実数であるから　$-3a+b-1=0$，$2(2a+b-1)=0$

これを解いて　$a=0$，$b=1$

このとき，方程式は　$x^3+x+10=0$

左辺を因数分解すると　$(x+2)(x^2-2x+5)=0$

これを解いて　$x=-2$，$1\pm 2i$

したがって，他の解は　$x=-2$，$1-2i$

別解　方程式の係数は実数であるから，$1+2i$ と共役な複素数 $1-2i$ も解である。

よって，方程式の左辺は $\{x-(1+2i)\}\{x-(1-2i)\}$ すなわち x^2-2x+5 で割り切れる。

左辺 $x^3+ax^2+bx+10$ を x^2-2x+5 で割ると

商は　$x+a+2$　余りは　$(2a+b-1)x-5a$

余りが 0 であるとき　$2a+b-1=0$，$-5a=0$

よって　$a=0$，$b=1$

このとき，方程式は　$(x+2)(x^2-2x+5)=0$

これを解いて　$x=-2$，$1\pm 2i$

したがって，他の解は　$x=-2$，$1-2i$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$2t^2-9t-5=0$　(2)　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$

解説

(1)　$x=0$ は解ではないから，方程式の両辺を x^2 で割ると

$$2x^2-9x-1-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

よって　$2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$ であるから　$2(t^2-2)-9t-1=0$

ゆえに　$2t^2-9t-5=0$　……①

(2)　① から　$(t-5)(2t+1)=0$　よって　$t=5$，$-\dfrac{1}{2}$

[1]　$t=5$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=5$

両辺に x を掛けて整理すると　$x^2-5x+1=0$

これを解くと　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

[2]　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}$

両辺に $2x$ を掛けて整理すると　$2x^2+x+2=0$

これを解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$

したがって，解は　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　0　(2)　-1　(3)　-2

解説

ω は $x^3=1$ の解であるから　$\omega^3=1$

よって　$\omega^3-1=0$　すなわち　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega\neq 1$ であるから　$\omega^2+\omega+1=0$

(1)　$\omega^{14}+\omega^7+1=(\omega^3)^4\cdot\omega^2+(\omega^3)^2\cdot\omega+1=1^4\cdot\omega^2+1^2\cdot\omega+1$

$$=\omega^2+\omega+1=0$$

(2)　$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^4+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^3\cdot\omega+1}{\omega^2}=\dfrac{\omega+1}{\omega^2}$

ここで，$\omega^2+\omega+1=0$ から　$\omega+1=-\omega^2$

よって　$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

別解　$\omega^2+\dfrac{1}{\omega^2}=\omega^2+\dfrac{\omega}{\omega^3}=\omega^2+\omega=-1$

(3)　$\omega^2+\omega+1=0$ から　$\omega^2+1=-\omega$

よって　$\dfrac{\omega^5+3\omega+1}{\omega^2+1}=\dfrac{\omega^3\cdot\omega^2+3\omega+1}{\omega^2+1}=\dfrac{\omega^2+3\omega+1}{\omega^2+1}=\dfrac{(\omega^2+1)+3\omega}{\omega^2+1}$

$$=\frac{-\omega+3\omega}{-\omega}=\frac{2\omega}{-\omega}=-2$$

$\boxed{6}$

解答　(1)　順に 1，$\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$　(2)　-2　(3)　-5　(4)　2

解説

(1)　α，β，γ が方程式 $2x^3-2x^2+3x+1=0$ の解であるから，次の等式が成り立つ。

$$2x^3-2x^2+3x+1=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\quad\cdots\cdots ①$$

よって　$2x^3-2x^2+3x+1=2x^3-2(\alpha+\beta+\gamma)x^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-2\alpha\beta\gamma$

これは x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較すると

$$\alpha+\beta+\gamma=1,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{3}{2},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{1}{2}$$

(2)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=1^2-2\cdot\dfrac{3}{2}=-2$

(3)　α は方程式の解であるから

$2\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha+1=0$　ゆえに　$\alpha^3=\alpha^2-\dfrac{3}{2}\alpha-\dfrac{1}{2}$

同様に　$\beta^3=\beta^2-\dfrac{3}{2}\beta-\dfrac{1}{2}$，　$\gamma^3=\gamma^2-\dfrac{3}{2}\gamma-\dfrac{1}{2}$

よって　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\left(\alpha^2-\dfrac{3}{2}\alpha-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\beta^2-\dfrac{3}{2}\beta-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\gamma^2-\dfrac{3}{2}\gamma-\dfrac{1}{2}\right)$

$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\frac{3}{2}(\alpha+\beta+\gamma)-\frac{3}{2}=-2-\frac{3}{2}\cdot 1-\frac{3}{2}=-5$$

別解　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$$=1\cdot\left(-2-\frac{3}{2}\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$$

(4)　$\alpha+\beta+\gamma=1$ から

$$\alpha+\beta=1-\gamma,\quad \beta+\gamma=1-\alpha,\quad \gamma+\alpha=1-\beta$$

したがって　(与式)$=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$$=1-1+\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$$

別解　$\alpha+\beta+\gamma=1$ から

$$\alpha+\beta=1-\gamma,\quad \beta+\gamma=1-\alpha,\quad \gamma+\alpha=1-\beta$$

したがって　(与式)$=(1-\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$

① の両辺に $x=1$ を代入して　$2\cdot 1^3-2\cdot 1^2+3\cdot 1+1=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

よって　$4=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$　ゆえに　$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=2$

したがって　(与式)$=2$

1

解答　(1)　$x=-3,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$　　(2)　$x=-1,\ 1,\ \pm\sqrt{2}\,i$

(3)　$x=-1,\ 2\pm2\sqrt{2}$　　(2)　$x=-1,\ \dfrac{1}{2},\ -1\pm i$

解説

(1)　移項すると　$x^3+27=0$

左辺を因数分解して　$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

よって　$x+3=0$　または　$x^2-3x+9=0$

ゆえに　$x=-3,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{3}\,i}{2}$

(2)　$x^4+x^2-2=0$ から　$(x^2-1)(x^2+2)=0$

よって　$(x+1)(x-1)(x^2+2)=0$

ゆえに　$x+1=0$　または　$x-1=0$　または　$x^2+2=0$

$x^2=-2$ から　$x=\pm\sqrt{-2}=\pm\sqrt{2}\,i$

したがって　$x=-1,\ 1,\ \pm\sqrt{2}\,i$

(3)　$P(x)=x^3-3x^2-8x-4$ とすると

$$P(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-4=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつから

$$P(x)=(x+1)(x^2-4x-4)$$

$P(x)=0$ から　$x+1=0$　または　$x^2-4x-4=0$

ゆえに　$x=-1,\ 2\pm2\sqrt{2}$

(4)　$P(x)=2x^4+5x^3+5x^2-2$ とすると

$$P(-1)=2(-1)^4+5(-1)^3+5(-1)^2-2=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

ゆえに　$P(x)=(x+1)(2x^3+3x^2+2x-2)$

2	5	5	0	−2	−1
	−2	−3	−2	2	
2	3	2	−2	0	

また，$Q(x)=2x^3+3x^2+2x-2$ とすると

$$Q\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}-2=0$$

よって，$Q(x)$ は $x-\dfrac{1}{2}$ を因数にもつ。

2	3	2	−2	$\frac{1}{2}$
	1	2	2	
2	4	4	0	

ゆえに　$Q(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(2x^2+4x+4)$

$$=(2x-1)(x^2+2x+2)$$

よって　$(x+1)(2x-1)(x^2+2x+2)=0$

ゆえに　$x+1=0$　または　$2x-1=0$　または　$x^2+2x+2=0$

$x+1=0$ から　$x=-1$

$2x-1=0$ から　$x=\dfrac{1}{2}$

$x^2+2x+2=0$ から　$x=-1\pm i$

したがって　$x=-1,\ \dfrac{1}{2},\ -1\pm i$

2

解答　$a=2,\ b=-5$，他の解 $x=-3$

解説

$x=-1,\ 2$ が解であるから

$$(-1)^3+a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)-6=0,\ 2^3+a\cdot2^2+b\cdot2-6=0$$

整理すると　$a-b=7,\ 2a+b=-1$

これを解いて　$a=2,\ b=-5$

このとき，方程式は　$x^3+2x^2-5x-6=0$

左辺を因数分解すると　$(x+1)(x-2)(x+3)=0$

したがって，他の解は　$x=-3$

別解　他の解を $x=\alpha$ とおくと，条件から，次の等式が成り立つ。

$$x^3+ax^2+bx-6=(x+1)(x-2)(x-\alpha)$$

右辺を展開して整理すると

$$x^3+ax^2+bx-6=x^3-(\alpha+1)x^2+(\alpha-2)x+2\alpha$$

両辺の係数を比較すると

$$a=-\alpha-1,\ b=\alpha-2,\ -6=2\alpha$$

これを解いて　$\alpha=-3,\ a=2,\ b=-5$

3

解答　$a=-6,\ b=13$，他の解は $2,\ 2-i$

解説

(解1)　$2+i$ が解であるから　$(2+i)^3+a(2+i)^2+b(2+i)-10=0$

整理して　$3a+2b-8+(4a+b+11)i=0$

$3a+2b-8,\ 4a+b+11$ は実数であるから

$$3a+2b-8=0,\ 4a+b+11=0$$

これを解いて　$a=-6,\ b=13$

このとき，方程式は　$x^3-6x^2+13x-10=0$

左辺を因数分解すると　$(x-2)(x^2-4x+5)=0$

これを解いて　$x=2,\ 2\pm i$

したがって，他の解は　$2,\ 2-i$

(解2)　方程式の係数は実数であるから，$2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

よって，方程式の左辺は $\{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\}$ すなわち x^2-4x+5 で割り切れる。

左辺 $x^3+ax^2+bx-10$ を x^2-4x+5 で割ると，

商は　$x+a+4$，　余りは　$(4a+b+11)x-5(a+6)=0$

余りが0であるとき　$4a+b+11=0,\ -5(a+6)=0$

よって　$a=-6,\ b=13$

このとき，方程式は　$(x^2-4x+5)(x-2)=0$　　これを解いて　$x=2,\ 2\pm i$

したがって，他の解は　$2,\ 2-i$

参考　「3次方程式の解と係数の関係」を利用して，次のように解くこともできる。

方程式の係数は実数であるから，$2+i$ と共役な複素数 $2-i$ も解である。

もう1つの解を p とすると，解と係数の関係により

$$p+(2+i)+(2-i)=-a$$

$$(2+i)p+(2-i)p+(2+i)(2-i)=b$$

$$(2+i)(2-i)p=10$$

これを解いて　$p=2,\ a=-6,\ b=13$

したがって，他の解は　$2,\ 2-i$

4

解答　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ 2\pm\sqrt{3}$

解説

$x=0$ は方程式の解でないから，方程式の両辺を x^2 で割ると

$$x^2-7x+14-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

よって　$x^2+\dfrac{1}{x^2}-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+14=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=t^2-2$ であるから　$(t^2-2)-7t+14=0$

ゆえに　$t^2-7t+12=0$　　よって　$(t-3)(t-4)=0$

したがって　$t=3,\ 4$

[1]　$t=3$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=3$

両辺に x を掛けて整理すると　$x^2-3x+1=0$

これを解くと　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

[2]　$t=4$ のとき　$x+\dfrac{1}{x}=4$

両辺に x を掛けて整理すると　$x^2-4x+1=0$

これを解くと　$x=2\pm\sqrt{3}$

したがって，解は　$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ 2\pm\sqrt{3}$

5

解答　(1)　-1　(2)　0　(3)　3

解説

(1)　ω は方程式 $x^2+x+1=0$，$x^3=1$ の解であるから

$$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$$

よって　$\omega^7+\omega^8=(\omega^3)^2\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

(2)　$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1=\dfrac{\omega+1+\omega^2}{\omega^2}=0$

(3)　$\omega^2+\omega+1=0$ から，$\omega^2=-\omega-1$ となり

$$(\omega+2\omega^2)^2+(2\omega+\omega^2)^2=\{\omega+2(-\omega-1)\}^2+(2\omega-\omega-1)^2$$

$$=(-\omega-2)^2+(\omega-1)^2$$

$$=2\omega^2+2\omega+5$$

$$=2(-\omega-1)+2\omega+5=3$$

6

解答　(1)　$\dfrac{2}{7}$　(2)　13　(3)　24　(4)　77　(5)　3　(6)　1

解説

解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=3,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\quad \alpha\beta\gamma=-7$$

(1)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-2}{-7}=\dfrac{2}{7}$

(2)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot(-2)=13$

(3)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$$=3\{13-(-2)\}+3\cdot(-7)=45-21=24$$

(4)　$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$

ここで　$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=(-2)^2-2\cdot(-7)\cdot 3=46$

よって　$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=13^2-2\cdot 46=169-92=77$

(5)　$x^3-3x^2-2x+7=0$ の 3 つの解が α，β，γ であるから

$x^3-3x^2-2x+7=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$　……①

① の両辺に $x=1$ を代入して

$1^3-3\cdot 1^2-2\cdot 1+7=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

よって　$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=3$

別解　$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=1-3+(-2)-(-7)=3$

(6)　$\alpha+\beta+\gamma=3$ から　$\alpha+\beta=3-\gamma$，$\beta+\gamma=3-\alpha$，$\gamma+\alpha=3-\beta$

したがって　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$

① の両辺に $x=3$ を代入して　$3^3-3\cdot 3^2-2\cdot 3+7=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$

よって　$(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)=1$　すなわち　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=1$

別解　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$

$=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=27-9\cdot 3+3\cdot(-2)-(-7)=1$

$\boxed{1}$

解答　$a=0$，-4，$\dfrac{1}{2}$

解説

与えられた 3 次方程式の左辺を a について整理すると

$(x^2-1)a+x^3+x^2=0$

$(x+1)(x-1)a+x^2(x+1)=0$

ゆえに　$(x+1)\{x^2+(x-1)a\}=0$

よって　$(x+1)(x^2+ax-a)=0$

したがって　$x+1=0$　または　$x^2+ax-a=0$

この 3 次方程式が 2 重解をもつのは，次の [1] または [2] の場合である。

[1]　$x^2+ax-a=0$ が $x\neq -1$ の重解をもつ。

判別式を D とすると　$D=0$　かつ　$-\dfrac{a}{2\cdot 1}\neq -1$

$D=a^2-4\cdot 1\cdot(-a)=a(a+4)$

$D=0$ とすると　$a=0$，-4

これは $a\neq 2$ を満たす。

[2]　$x^2+ax-a=0$ の解の 1 つが -1 で，他の解が -1 でない。

-1 が解であるための条件は　$(-1)^2+a(-1)-a=0$

これを解いて　$a=\dfrac{1}{2}$

このとき，方程式は　$(x+1)\left(x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\right)=0$

したがって　$(x+1)^2(2x-1)=0$

ゆえに，$x=-1$ は 2 重解である。

以上から　$a=0$，-4，$\dfrac{1}{2}$

$\boxed{2}$

解答　$a=-\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{4}{5}$，$\alpha=-\dfrac{4}{5}$

解説

条件から　$x^3+2ax^2+ax+b=(x-1)^2(x-\alpha)$

右辺を展開すると　$x^3+2ax^2+ax+b=x^3-(\alpha+2)x^2+(2\alpha+1)x-\alpha$

両辺の各項の係数を比較して

$2a=-(\alpha+2)$，$a=2\alpha+1$，$b=-\alpha$

これを解いて　$a=-\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{4}{5}$，$\alpha=-\dfrac{4}{5}$

$\boxed{3}$

解答　(ア)　5　(イ)　-15　(ウ)　-75

解説

3 次方程式の解と係数の関係により

$\alpha+\beta+\gamma=0$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$，$\alpha\beta\gamma=-5$

よって　$\alpha+\beta=-\gamma$，$\beta+\gamma=-\alpha$，$\gamma+\alpha=-\beta$

ゆえに　$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)\cdot(-\alpha)\cdot(-\beta)$

$=-\alpha\beta\gamma=-(-5)$

$={}^{ア}5$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=0+3\cdot(-5)={}^{イ}-15$

また，$\alpha^3=3\alpha-5$，$\beta^3=3\beta-5$，$\gamma^3=3\gamma-5$ であるから

$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=\alpha^2(3\alpha-5)+\beta^2(3\beta-5)+\gamma^2(3\gamma-5)$

$=3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-5(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

$=3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-5\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$

$=3\cdot(-15)-5\{0^2-2\cdot(-3)\}$

$={}^{ウ}-75$

別解　(イ) について，(ウ) と同様に次数を下げる方法で解いてもよい。

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(3\alpha-5)+(3\beta-5)+(3\gamma-5)$

$=3(\alpha+\beta+\gamma)-15=3\cdot 0-15$

$={}^{イ}-15$

$\boxed{4}$

解答　$x^3-3x-7=0$

解説

3 次方程式の解と係数の関係から

$\alpha+\beta+\gamma=3$，　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$，　$\alpha\beta\gamma=5$

$(\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma-1)=(\alpha+\beta+\gamma)-3=3-3=0$

$(\alpha-1)(\beta-1)+(\beta-1)(\gamma-1)+(\gamma-1)(\alpha-1)$

$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-2(\alpha+\beta+\gamma)+3$

$=0-2\cdot 3+3=-3$

また，$x^3-3x^2-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ が成り立つ。

この両辺に $x=1$ を代入して　$-7=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

よって　$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=7$

ゆえに，求める 3 次方程式は　$x^3-3x-7=0$

別解　$x-1=X$ とおくと，$x=X+1$ は $x^3-3x^2-5=0$ を満たすから

$(X+1)^3-3(X+1)^2-5=0$　整理すると　$X^3-3X-7=0$

よって　$x^3-3x-7=0$

$\boxed{1}$

解答　-27

解説

$x^3-1=0$ から　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

よって　$x=1$　または　$x^2+x+1=0$

$x^2+x+1=0$ の解の１つを ω とおくと，他の解は ω^2 となる。

また　$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

$A^2=\{(a-b)(a-c)(b-c)\}^2$ は，a，b，c の３文字のうち，どの２つの文字を入れ替えても符号は同じである。

ゆえに，$a=1$，$b=\omega$，$c=\omega^2$ としてよい。

$$\begin{aligned}A&=(1-\omega)(1-\omega^2)(\omega-\omega^2)=(1-\omega-\omega^2+\omega^3)(\omega-\omega^2)\\&=(1-\omega-\omega^2+1)(\omega-\omega^2)=\{2-(\omega^2+\omega)\}(\omega-\omega^2)\\&=\{2-(-1)\}(\omega-\omega^2)=3(\omega-\omega^2)\end{aligned}$$

$\omega^2=-(\omega+1)$ であるから　$A=3\{\omega+(\omega+1)\}=3(2\omega+1)$

よって　$A^2=\{3(2\omega+1)\}^2=9(4\omega^2+4\omega+1)$

$$=9\{4(\omega^2+\omega+1)-3\}=9(4\cdot0-3)=-27$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a=-3$，$b=-6$，$c=5$　(2)　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$，$\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

解説

(1)　$x=0$ は①の解ではないから，①の両辺を x^2 で割ると

$$x^2-6x-1+\frac{18}{x}+\frac{9}{x^2}=0$$

すなわち　$x^2+\dfrac{9}{x^2}-6\left(x-\dfrac{3}{x}\right)-1=0$

ゆえに　$\left(x-\dfrac{3}{x}\right)^2-6\left(x-\dfrac{3}{x}\right)+5=0$

よって，$y=x-\dfrac{3}{x}$ とおくと，y についての２次方程式 $y^2-6y+5=0$ が得られる。

したがって　$a=-3$，$b=-6$，$c=5$

(2)　$y^2-6y+5=0$ から　$(y-1)(y-5)=0$

これを解いて　$y=1$，5

[1]　$y=1$ のとき　$x-\dfrac{3}{x}=1$

$x^2-x-3=0$ であるから　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

[2]　$y=5$ のとき　$x-\dfrac{3}{x}=5$

$x^2-5x-3=0$ であるから　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

ゆえに，①の解は　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$，$\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{2}$

$\boxed{3}$

解答　割り切れる

解説

$f(x)=(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ とおく．

$x^2+x+1=0$ の１つの解を ω とすると，他の解は ω^2 となる．

$\omega^2+\omega+1=0$ であるから　$\omega^3=\omega(-\omega-1)=-(\omega^2+\omega+1)+1=1$

よって　$f(\omega)=(\omega^{100}+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1$

$$\begin{aligned}&=\{\omega\cdot(\omega^3)^{33}+1\}^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1\\&=(\omega+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1\\&=(-\omega^2)^{100}+(-\omega)^{100}+1\\&=\omega^{200}+\omega^{100}+1\\&=\omega^2\cdot(\omega^3)^{66}+\omega\cdot(\omega^3)^{33}+1\\&=\omega^2+\omega+1=0\end{aligned}$$

同様に　$f(\omega^2)=\{(\omega^2)^{100}+1\}^{100}+\{(\omega^2)^2+1\}^{100}+1$

$$\begin{aligned}&=(\omega^{200}+1)^{100}+(\omega^4+1)^{100}+1\\&=(\omega^2+1)^{100}+(\omega+1)^{100}+1\\&=\omega^2+\omega+1=0\end{aligned}$$

よって，$(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は　$(x-\omega)(x-\omega^2)=x^2+x+1$ で割り切れる．

1

【解答】 $-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

【解説】

$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{1+2\sqrt{3}\,i+3i^2}{4}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ から

$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)$

$\qquad=\dfrac{(\sqrt{3}\,i)^2-1^2}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1$

$2014=3\times671+1$ から $\quad\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{2014}=\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3\right\}^{671}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

$\qquad=(-1)^{671}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

【別解】 $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{2014}=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{2014}=\cos\dfrac{2014}{3}\pi+i\sin\dfrac{2014}{3}\pi$

$\qquad=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\qquad=-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

【注意】 別解は，数学 III で学習する「複素数平面」の内容を利用している。

2

【解答】 (ア) -2 (イ) $-2\sqrt{3}$ (ウ) 8 (エ) 0

(オ) n が 3 の倍数であること

【解説】

$(-1+\sqrt{3}\,i)^2=1-2\sqrt{3}\,i+3i^2=-2-2\sqrt{3}\,i$

よって，$(-1+\sqrt{3}\,i)^2$ の実部は ${}^{ア}-2$，虚部は ${}^{イ}-2\sqrt{3}$ である。

また $\quad(-1+\sqrt{3}\,i)^3=(-1+\sqrt{3}\,i)^2(-1+\sqrt{3}\,i)$

$\qquad=-2(1+\sqrt{3}\,i)(-1+\sqrt{3}\,i)=8$

よって，$(-1+\sqrt{3}\,i)^3$ の実部は ${}^{ウ}8$，虚部は ${}^{エ}0$ である。

ゆえに，k を自然数とすると，$n=3k$ のとき $\quad(-1+\sqrt{3}\,i)^{3k}=8^k$

このとき，実部は 8^k，虚部は 0 でともに整数である。

また，$n=3k+1$，$3k+2$ のとき

$(-1+\sqrt{3}\,i)^{3k+1}=(-1+\sqrt{3}\,i)^{3k}(-1+\sqrt{3}\,i)$

$\qquad=8^k(-1+\sqrt{3}\,i)=-8^k+8^k\sqrt{3}\,i$

$(-1+\sqrt{3}\,i)^{3k+2}=(-1+\sqrt{3}\,i)^{3k}(-1+\sqrt{3}\,i)^2$

$\qquad=8^k(-2-2\sqrt{3}\,i)=-2\cdot8^k-2\cdot8^k\sqrt{3}\,i$

よって，$n=3k+1$，$3k+2$ のとき，実部と虚部がともに整数となることはない。

また，$n=1$，2 のときも実部と虚部はともに整数ではない。

したがって，$(-1+\sqrt{3}\,i)^n$ の実部と虚部がともに整数となるために自然数 n が満たすべき必要十分条件は ${}^{オ}n$ が 3 の倍数であることである。

3

【解答】 略

【解説】

x の 2 次方程式

$\quad x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1=0$ …… ①，$\quad x^2+2(\tan\theta)x+3=0$ …… ②

の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とすると

$\quad\dfrac{D_1}{4}=\cos^2\theta+\cos\theta-1=\left(\cos\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$ …… ③

$\quad\dfrac{D_2}{4}=\tan^2\theta-3$

[1] $D_2<0$ のとき ② は虚数解をもつ。

[2] $D_2\geqq0$ すなわち $\tan^2\theta\geqq3$ のとき

$0^\circ\leqq\theta<90^\circ$ より，$\tan\theta\geqq0$ であるから $\quad\tan\theta\geqq\sqrt{3}$

$0^\circ\leqq\theta<90^\circ$ の範囲で解くと $\quad 60^\circ\leqq\theta<90^\circ$ $\quad$ このとき $\quad 0<\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

③ から $\quad\dfrac{D_1}{4}\leqq\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{4}$

よって，$D_1<0$ であるから，① は虚数解をもつ。

[1]，[2] から，与えられた 4 次方程式は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

4

【解答】 (ア) -2 (イ) 2 (ウ) 2

【解説】

(1) $x^2+2px+3p^2=8$ を x の 2 次方程式とみて，その判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=p^2-(3p^2-8)=8-2p^2=-2(p+2)(p-2)$$

x が実数であるための条件は

$\quad D\geqq0$ すなわち $\quad-2(p+2)(p-2)\geqq0$

これを解いて $\quad{}^{ア}-2\leqq p\leqq{}^{イ}2$ …… ①

(2) $x^2+2px+3p^2=8$ を x の 2 次方程式とみて解くと

$$x=-p\pm\sqrt{8-2p^2}\quad\cdots\cdots ②$$

p は整数であるから，① より p のとりうる値は $\quad-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$

② は，$p=-2$ のとき $x=2$ $\qquad p=-1$ のとき $x=1\pm\sqrt{6}$

$p=0$ のとき $x=\pm2\sqrt{2}$ $\qquad p=1$ のとき $x=-1\pm\sqrt{6}$

$p=2$ のとき $x=-2$

よって，整数の組 $(x,\ p)$ は $(2,\ -2)$，$(-2,\ 2)$ の ${}^{ウ}2$ 通りある。

5

【解答】 (1) $k=\dfrac{3}{4}$，$\alpha=-\dfrac{3}{2}$ $\quad$ (2) $x=-\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{3}{2}-2i$

【解説】

(1) $\alpha^2+(3+2i)\alpha+k(2+i)^2=0$ から $\quad(\alpha^2+3\alpha+3k)+(2\alpha+4k)i=0$

$\alpha^2+3\alpha+3k$，$2\alpha+4k$ は実数であるから

$\quad\alpha^2+3\alpha+3k=0$ …… ①，$2\alpha+4k=0$ …… ②

② から $\quad\alpha=-2k$

これを ① に代入して $\quad(-2k)^2+3\cdot(-2k)+3k=0$

すなわち $\quad k(4k-3)=0$

$k\neq0$ であるから $\quad k=\dfrac{3}{4}$ $\qquad$ このとき $\quad\alpha=-\dfrac{3}{2}$

(2) $k=\dfrac{3}{4}$ であるから $\quad x^2+(3+2i)x+\dfrac{3}{4}(2+i)^2=0$

すなわち $\quad x^2+(3+2i)x+\dfrac{9}{4}+3i=0$

$x=-\dfrac{3}{2}$ がこの等式を満たすことを利用して，左辺を因数分解すると

$\quad\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}+2i\right)=0$

よって，等式を満たす複素数は $\quad x=-\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{3}{2}-2i$

6

【解答】 $a=-2$，0

【解説】

2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+4=0$ …… ① の判別式を D とすると，条件から

$\quad\dfrac{D}{4}=(a+1)^2-4<0$

よって $\quad(a+3)(a-1)<0$ から $\quad-3<a<1$ …… ②

また，① の虚数解を α とおくと $\alpha^2-2(a+1)\alpha+4=0$ から

$\quad\alpha^2=2(a+1)\alpha-4$

したがって

$\quad\alpha^3=\alpha\cdot\alpha^2=\alpha\{2(a+1)\alpha-4\}=2(a+1)\alpha^2-4\alpha$

$\qquad=2(a+1)\{2(a+1)\alpha-4\}-4\alpha=4(a+1)^2\alpha-8(a+1)-4\alpha$

$\qquad=\{4(a+1)^2-4\}\alpha-8(a+1)$

条件より，a，α^3 は実数であり，α は虚数であるから

$\quad 4(a+1)^2-4=0$

ゆえに，$(a+1)^2=1$ から $\quad a=-2$，0

これらはともに ② を満たす。

したがって $\quad a=-2$，0

7

【解答】 $0\leqq t<4$

【解説】

方程式は，異なる 2 つの実数解をもつから，判別式を D とすると

$\quad D=p^2-4(p^2+p-1)=-(3p^2+4p-4)$

$\qquad=-(p+2)(3p-2)>0$

よって $\quad(p+2)(3p-2)<0$

ゆえに $\quad-2<p<\dfrac{2}{3}$ …… ①

また，解と係数の関係から $\quad\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=p^2+p-1$

よって $\quad t=(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$

$\qquad=p^2+p-1-p+1=p^2$

ゆえに，① の範囲において $\quad 0\leqq t<4$

8

【解答】 (1) $\dfrac{3^n-1}{2}x+\dfrac{3-3^n}{2}$ $\quad$ (2) $a=-2$，余り 1

【解説】

(1) x^n を x^2-4x+3 すなわち $(x-1)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$

とすると，次の等式が成り立つ。

$$x^n=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$$

両辺に $x=1$ を代入すると　$a+b=1$

$x=3$ を代入すると　$3a+b=3^n$

この連立方程式を解いて　$a=\dfrac{3^n-1}{2}$，$b=\dfrac{3-3^n}{2}$

したがって，求める余りは　$\dfrac{3^n-1}{2}x+\dfrac{3-3^n}{2}$

(2)　$f(x)$ を x^2-3x+2 すなわち $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは $2x-1$ であるから，このときの商を $Q_1(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$f(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+2x-1$$

この等式の両辺に $x=1$，2 を代入すると

$f(1)=1$，　$f(2)=3$　……①

また，$f(x)$ を x^2-5x+6 すなわち $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りは $ax+7$ であるから，このときの商を $Q_2(x)$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$f(x)=(x-2)(x-3)Q_2(x)+ax+7$$

この等式の両辺に $x=2$，3 を代入すると

$f(2)=2a+7$，　$f(3)=3a+7$　……②

更に，$f(x)$ を x^2-4x+3 すなわち $(x-1)(x-3)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$，余りを $bx+c$ とすると，次の等式が成り立つ。

$$f(x)=(x-1)(x-3)Q_3(x)+bx+c$$

この等式の両辺に $x=1$，3 を代入すると

$f(1)=b+c$，$f(3)=3b+c$　……③

①，②，③ から　$b+c=1$，$2a+7=3$，$3b+c=3a+7$

この連立方程式を解いて　$a=-2$，$b=0$，$c=1$

したがって，求める余りは　1

9

解答　(1)　$a=-1$ のとき $x=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$；$a=1$ のとき $x=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(2)　$-\dfrac{1}{4}<a<2$，$2<a$　　(3)　$a=-\dfrac{1}{4}$，2

解説

$f(x)=x^3-(a+1)x+a$ とおく。

$f(1)=1^3-(a+1)\cdot1+a=0$ から，$f(x)$ は $x-1$を因数にもつ。

$$f(x)=(x-1)(x^2+x-a)$$

よって，① は　$(x-1)(x^2+x-a)=0$

(1)　[1]　$a=-1$ のとき，① は　$(x-1)(x^2+x+1)=0$

よって，① の解は　$x=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

[2]　$a=1$ のとき，① は　$(x-1)(x^2+x-1)=0$

よって，① の解は　$x=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(2)　① の異なる実数解の個数が 3 個となるためには，$x^2+x-a=0$ が 1 でない異なる 2 つの実数解をもてばよい。

$x^2+x-a=0$ において $x=1$ とすると，$1+1-a=0$ から

$a=2$　　よって　$a\neq2$　……②

また，$x^2+x-a=0$ の判別式を D とすると

$$D=1^2-4\cdot1\cdot(-a)=4a+1$$

よって，$x^2+x-a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，$D=4a+1>0$ から

$a>-\dfrac{1}{4}$ ……③

②，③ から，求める a の条件は　$-\dfrac{1}{4}<a<2$，$2<a$

(3)　① の異なる実数解の個数が 2 個となるためには，次の条件 [1]，[2] のどちらか一方を満たせばよい。

[1]　$x^2+x-a=0$ が 1 でない重解をもつ

[2]　$x^2+x-a=0$ が $x=1$ と 1 でない解を 1 つずつもつ

[1] の場合

(2) から　$D=4a+1=0$ かつ $a\neq2$

$4a+1=0$ から　$a=-\dfrac{1}{4}$

これは $a\neq2$ を満たす。

[2] の場合

(2) から　$D=4a+1>0$ かつ $a=2$

$a=2$ のとき $D=4\cdot2+1=9$ となり，$D>0$ を満たす。

[1]，[2] から，求める a の条件は　$a=-\dfrac{1}{4}$，2

1

解答　$a=1$，$\dfrac{5}{3}$

解説

方程式は，異なる 2 つの実数解をもつから，判別式を D とすると

$$D=a^2-4(a-1)^2=-3a^2+8a-4$$
$$=-(3a-2)(a-2)>0$$

ゆえに　$(3a-2)(a-2)<0$　　よって　$\dfrac{2}{3}<a<2$　……①

次に，方程式の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=(a-1)^2$$

ゆえに　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-a)^2-4(a-1)^2$

$=-3a^2+8a-4>0$

$|\alpha-\beta|$ が整数であるとき，$(\alpha-\beta)^2$ も整数である。

よって，$-3a^2+8a-4$ が整数の平方になる場合を考える。

$b=-3a^2+8a-4$ とすると　$b=-3\left(a-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$

① の範囲における b のとりうる値の範囲は　$0<b\leqq\dfrac{4}{3}$

b が整数の平方となるのは，$b=1$ のときである。

ゆえに　$-3a^2+8a-4=1$　　整理して　$3a^2-8a+5=0$

よって　$(a-1)(3a-5)=0$　　したがって　$a=1$，$\dfrac{5}{3}$

これはともに ① を満たす。

2

解答　$\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

解説

$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$　……①

① を y について整理すると　$3y^2+(4x+5)y+2x^2+4x-4=0$　……②

座標平面上の点 $(x,\ y)$ が ① を満たすということは，① を満たす実数 x，y があるということであり，y についての 2 次方程式 ② が実数解をもつことと同値である。

そのための必要十分条件は，② の判別式を D とすると，$D\geqq0$ である。

$$D=(4x+5)^2-4\cdot3\cdot(2x^2+4x-4)=-8x^2-8x+73$$

$D\geqq0$ から　$-8x^2-8x+73\geqq0$　　よって　$8x^2+8x-73\leqq0$

これを解くと　$\dfrac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

よって，x のとりうる最大の値は　$\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

3

解答　略

解説

①，② の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とする。

$a>0$ であるから　$D_1=1+4a>0$，　$D_2=a^2+4>0$

よって，①，② はいずれも異なる 2 つの実数解をもつ。

① の 2 つの解を α，β とすると　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-a$

また，$\alpha^2=\alpha+a$，$\beta^2=\beta+a$ が成り立つ。

② の左辺について，$f(x)=x^2+ax-1$ とすると

$$\begin{aligned}f(\alpha)f(\beta)&=(\alpha^2+a\alpha-1)(\beta^2+a\beta-1)\\&=\{(a+1)\alpha+a-1\}\{(a+1)\beta+a-1\}\\&=(a+1)^2\alpha\beta+(a^2-1)(\alpha+\beta)+(a-1)^2\\&=(a+1)^2\cdot(-a)+(a^2-1)\cdot 1+(a-1)^2=-a(a^2+3)\end{aligned}$$

条件 $a>0$ から　　$f(\alpha)f(\beta)<0$

よって，放物線 $y=f(x)$ は $\alpha<x<\beta$ の範囲で x 軸と交点を 1 つもつ。

したがって，② の解のうち 1 つだけが ① の解の間にある。

$\boxed{4}$

$\boxed{\text{解答}}$　-8

(解説)

$\alpha=1+\sqrt{3}\,i$，$\beta=1-\sqrt{3}\,i$ のとき　　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=4$

よって，α，β は 2 次方程式 $x^2-2x+4=0$ の 2 つの解である。

ゆえに　　$\alpha^2-2\alpha+4=0$，　$\beta^2-2\beta+4=0$　……①

したがって，① から

$\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}+2\alpha^n+4\alpha^{n-1}=\alpha^{n-1}(\alpha^3-\alpha^2+2\alpha+4)=\alpha^{n-1}(\alpha+1)(\alpha^2-2\alpha+4)=0$

$\alpha^3-2\alpha^2+5\alpha-2=\alpha(\alpha^2-2\alpha+4)+\alpha-2=\alpha-2=-\beta$

$\beta^2-4\beta+8=(\beta^2-2\beta+4)-2\beta+4=0-2(\beta-2)=2\alpha$

よって，値を求める式を P とすると　　$P=\left(\dfrac{2\alpha}{-\beta}\right)^3=-\dfrac{8\alpha^3}{\beta^3}$

ここで，① より $\alpha^2=2\alpha-4$ であるから

$\alpha^3=\alpha\cdot\alpha^2=\alpha(2\alpha-4)=2\alpha^2-4\alpha=2(2\alpha-4)-4\alpha=-8$

同様に　　　$\beta^3=-8$

したがって　　$P=-\dfrac{8\cdot(-8)}{-8}=-8$

$\boxed{\text{参考}}$　$x=1\pm\sqrt{3}\,i$ のとき，$x+2\neq 0$ であるから，$x^2-2x+4=0$ の両辺に $x+2$ を掛けると　　$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

すなわち　　$x^3+8=0$

よって，α，β は -8 の 3 乗根で　　$\alpha^3=-8$，$\beta^3=-8$

$\boxed{5}$

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　$\alpha^3=14-3\alpha$　　(2)　略

(解説)

(1)　$$\begin{aligned}\alpha^3&=(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3\\&=(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})^3-(\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3\\&\qquad-3\times\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\times\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\times(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})\\&=(5\sqrt{2}+7)-(5\sqrt{2}-7)-3\times\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}\times\alpha\\&=14-3\times\sqrt[3]{(5\sqrt{2})^2-7^2}\times\alpha=14-3\times\sqrt[3]{1}\times\alpha\\&=14-3\alpha\end{aligned}$$

(2)　(1) より　　$\alpha^3+3\alpha-14=0$

よって，α は 3 次方程式 $x^3+3x-14=0$ の実数解である。

$x^3+3x-14=0$ から　　$(x-2)(x^2+2x+7)=0$

ここで，$x^2+2x+7=0$ の判別式を D とすると　　$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot 7=-6<0$

ゆえに，$x^2+2x+7=0$ は実数解をもたない。

よって，3 次方程式 $x^3+3x-14=0$ の実数解は $x=2$ だけである。

したがって，$\alpha=2$ であるから，α は整数である。

$\boxed{6}$

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　$\omega^2+\omega^4=-1$，$\omega^5+\omega^{10}=-1$

(2)　k を正の整数とすると $n=3k-2$，$3k-1$ のとき -1，$n=3k$ のとき 2

(3)　略

(解説)

(1)　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ から　　$2\omega+1=\sqrt{3}\,i$

両辺を 2 乗すると　　$(2\omega+1)^2=-3$

整理すると　　$\omega^2+\omega+1=0$　……①

両辺に $\omega-1$ を掛けると　　$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

よって　　$\omega^3-1=0$　　　すなわち　　$\omega^3=1$　……②

①，② より　　$\omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

$\omega^5+\omega^{10}=\omega^3\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

(2)　①，② より，k を正の整数とすると

[1]　$n=3k-2$ のとき

$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k-2}+\omega^{6k-4}=(\omega^3)^{k-1}\cdot\omega+(\omega^3)^{2k-2}\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

[2]　$n=3k-1$ のとき

$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k-1}+\omega^{6k-2}=(\omega^3)^{k-1}\cdot\omega^2+(\omega^3)^{2k-1}\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

[3]　$n=3k$ のとき

$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k}+\omega^{6k}=(\omega^3)^k+(\omega^3)^{2k}=1+1=2$

[1]～[3] から，k を正の整数とすると

$n=3k-2$，$3k-1$ のとき　　$\omega^n+\omega^{2n}=-1$

$n=3k$ のとき　　$\omega^n+\omega^{2n}=2$

(3)　$(\omega+2)^n$，$(\omega^2+2)^n$ をそれぞれ二項定理により展開すると

$$\begin{aligned}(\omega+2)^n&=\omega^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\omega^{n-1}\cdot 2+{}_n\mathrm{C}_2\cdot\omega^{n-2}\cdot 2^2\\&\qquad+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot\omega\cdot 2^{n-1}+2^n\quad\cdots\cdots③\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\omega^2+2)^n&=(\omega^2)^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot(\omega^2)^{n-1}\cdot 2+{}_n\mathrm{C}_2\cdot(\omega^2)^{n-2}\cdot 2^2\\&\qquad+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot\omega^2\cdot 2^{n-1}+2^n\quad\cdots\cdots④\end{aligned}$$

③+④ より

$$\begin{aligned}&(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n\\&=\{\omega^n+(\omega^2)^n\}+{}_n\mathrm{C}_1\cdot 2\cdot\{\omega^{n-1}+(\omega^2)^{n-1}\}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot(\omega+\omega^2)+2\cdot 2^n\\&=(\omega^n+\omega^{2n})+2\cdot{}_n\mathrm{C}_1\cdot(\omega^{n-1}+\omega^{2(n-1)})+\cdots\cdots+2^{n-1}\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot(\omega+\omega^2)+2^{n+1}\end{aligned}$$

ここで (2) から，$\omega^n+\omega^{2n}$，$\omega^{n-1}+\omega^{2(n-1)}$，……，$\omega+\omega^2$ は 2 または -1 であり，整数である。

また，${}_n\mathrm{C}_1$，${}_n\mathrm{C}_2$，……，${}_n\mathrm{C}_{n-1}$ も整数である。

よって，n を正の整数とするとき，$(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$ は整数である。

$\boxed{7}$

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　略　　(2)　$p=3$

(解説)

(1)　$x^3+nx^2+n^2x=p$ ……①　とする。

① は $x=\alpha$ を解にもつから　　$\alpha(\alpha^2+n\alpha+n^2)=p$

右辺の p は 2 以上の整数で，α は正の整数，$\alpha^2+n\alpha+n^2$ は整数であるから，α は素数 p の正の約数である。

よって　　　　$\alpha=1$　または　$\alpha=p$

$\alpha=p$ のとき　　　$p^2+np+n^2=1$　……②

ところが，p は 2 以上であるから

$$n^2+pn+p^2=\left(n+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{3}{4}p^2\geqq\frac{3}{4}p^2\geqq 3$$

これは ② の右辺が 1 であることに矛盾する。

したがって　　$\alpha=1$

(2)　実数係数の 3 次方程式が虚数解 $k+\sqrt{2}\,i$ をもつから，それと共役な複素数 $k-\sqrt{2}\,i$ もこの方程式の解である。

$x=1$ も解であるから，3 次方程式の解と係数の関係により

$1+(k+\sqrt{2}\,i)+(k-\sqrt{2}\,i)=-n$　……①

$1\cdot(k+\sqrt{2}\,i)+(k+\sqrt{2}\,i)(k-\sqrt{2}\,i)+(k-\sqrt{2}\,i)\cdot 1=n^2$　……②

$1\cdot(k+\sqrt{2}\,i)(k-\sqrt{2}\,i)=p$　すなわち　$k^2+2=p$　……③

① から　　$2k+1=-n$　すなわち　$n=-(2k+1)$　……④

② から　　$k^2+2k+2=n^2$　……⑤

④，⑤ から n を消去して整理すると　　$3k^2+2k-1=0$

ゆえに　　$(k+1)(3k-1)=0$　　　よって　　$k=-1$，$\dfrac{1}{3}$

③ から，$k=-1$ のとき　　$p=3$（素数となり適する）

$k=\dfrac{1}{3}$ のとき　　$p=\dfrac{19}{9}$（整数でないから不適）

したがって，求める p の値は　　$p=3$

$\boxed{8}$

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　$a+b+c=0$　　(2)　$c=a-1$　　(3)　$b=7$

(解説)

(1)　$x^3f(x)=(x-1)g(x)$ から

$x^3(ax^2+bx+c)=(x-1)g(x)$　……①

① に $x=1$ を代入すると　$a+b+c=0$　……②

(2)　② から　$c=-a-b$　……③

① に代入すると　$x^3(ax^2+bx-a-b)=(x-1)g(x)$

よって　$x^3\{a(x+1)(x-1)+b(x-1)\}=(x-1)g(x)$

両辺を $x-1$ で割ると　$x^3(ax+a+b)=g(x)$　……④

④ に $x=1$ を代入すると　$2a+b=g(1)$

$g(1)=1$ であるから　$2a+b=1$

よって　$b=1-2a$　……⑤

⑤ を ③ に代入して　$c=-a-(1-2a)=a-1$

(3)　④ から　$g(x)-1=x^3(ax+a+b)-1$

⑤ を代入すると

$$\begin{aligned}g(x)-1&=x^3(ax+a+1-2a)-1=ax^4-(a-1)x^3-1\\&=(x-1)(ax^3+x^2+x+1)\end{aligned}$$

よって，$g(x)-1$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき，ax^3+x^2+x+1 は $x-1$ で割り切れる。

ゆえに，$h(x)=ax^3+x^2+x+1$ とすると　$h(1)=0$

よって　$a\cdot 1^3+1^2+1+1=0$　　ゆえに　$a=-3$

このとき，⑤ から　$b=7$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{4}$　　(2)　$a=2$，$b=2$　　(3)　$\alpha^3=8$，$\beta^3=8$

(4)　n が 3 の倍数のとき $c(n)=\dfrac{i}{2}$，n が 3 の倍数でないとき $c(n)=-i$

解説

(1)　解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=4$

よって　$\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\dfrac{(-2)^2-2\cdot 4}{4^2}=-\dfrac{1}{4}$

(2)　$\dfrac{\beta}{\alpha}$ が $2x^2+ax+b=0$ の解であるから　　$2\cdot\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}+a\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}+b=0$

よって　$2\beta^2+a\alpha\beta+b\alpha^2=0$　……①

α，β は $x^2+2x+4=0$ の解であるから　　$\alpha^2=-2\alpha-4$，$\beta^2=-2\beta-4$

① に代入して　$2(-2\beta-4)+a\alpha\beta+b(-2\alpha-4)=0$

$\alpha\beta=4$，$\beta=-2-\alpha$ を代入して　　$-4(-2-\alpha)-8+4a-2b\alpha-4b=0$

α について整理して　　$4a-4b+(4-2b)\alpha=0$

a，b は実数，α は虚数であるから　　$4a-4b=0$，$4-2b=0$

よって　$a=2$，$b=2$

(3)　$\alpha^3=\alpha^2\cdot\alpha=(-2\alpha-4)\cdot\alpha=-2\alpha^2-4\alpha=-2(-2\alpha-4)-4\alpha=8$

同様に　$\beta^3=8$

(4)　$c(n)=\dfrac{1}{\left\{i-\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n\right\}\left\{i-\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^n\right\}}=\dfrac{1}{-1-\left\{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n+\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^n\right\}i+\left(\dfrac{\alpha\beta}{4}\right)^n}$

$\alpha\beta=4$ から　　$c(n)=-\dfrac{1}{\left\{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n+\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^n\right\}i}$

(3) から　　$\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^3=1$，$\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^3=1$

[1]　$n=3k$ (k は自然数) のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k}=\left\{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3\right\}^k=1$$

同様に　$\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^n=1$

よって　$c(n)=-\dfrac{1}{(1+1)i}=-\dfrac{1}{2i}=\dfrac{i}{2}$

[2]　$n=3k+1$ (k は 0 以上の整数) のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k+1}=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k}\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$$

同様に　$\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^n=\dfrac{\beta}{2}$

よって　$c(n)=-\dfrac{1}{\left\{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)+\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\right\}i}=-\dfrac{1}{\dfrac{\alpha+\beta}{2}i}=\dfrac{1}{i}=-i$

[3]　$n=3k+2$ (k は 0 以上の整数) のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k+2}=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3k}\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

同様に　$\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^n=\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2$

よって　$c(n)=-\dfrac{1}{\left\{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2\right\}i}=-\dfrac{1}{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{4}i}$

$=-\dfrac{1}{\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{4}i}=\dfrac{1}{i}=-i$

[1]～[3] から　　n が 3 の倍数のとき　　$c(n)=\dfrac{i}{2}$

n が 3 の倍数でないとき　　$c(n)=-i$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略　　(4)　$n=4$，解は $x=2$ (重解)

解説

(1)　$\alpha\beta-(\alpha+\beta-1)=\alpha\beta-\alpha-\beta+1=(\alpha-1)(\beta-1)$

$\alpha\geqq1$，$\beta\geqq1$ より，$\alpha-1\geqq0$，$\beta-1\geqq0$ であるから　　$(\alpha-1)(\beta-1)\geqq0$

したがって　　$\alpha\beta\geqq\alpha+\beta-1$

(2)　解と係数の関係により　　$p+q=m$　……①，　$pq=k$　……②

① より　　$q=m-p$

m，p は整数であるから，q も整数である。

p，q が整数であるから，② より k も整数である。

(3)　2 次方程式 $x^2-n^2x+n=0$ ……③ が整数の解 p をもつと仮定する。

③ の x の係数は整数であるから，(2) より，③ のもう 1 つの解 q も整数である。

また，③ において，解と係数の関係により　　$p+q=n^2$　……④，　$pq=n$　……⑤

$p+q=n^2>0$，$pq=n>0$ より　　$p>0$，$q>0$

p，q は整数であるから　　$p\geqq1$，$q\geqq1$

よって，(1) より　　$pq\geqq p+q-1$

これに ④，⑤ を代入して　　$n\geqq n^2-1$　　　したがって　　$n^2-n-1\leqq0$

これを解いて　　$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leqq n\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

n は自然数であるから　　$n=1$

これを ④ に代入すると　　$p+q=1$

これは $p\geqq1$，$q\geqq1$ に矛盾する。

したがって，2 次方程式 ③ は整数の解をもたない。

(4)　2 次方程式 $x^2-(n-2)^2x+n=0$ ……⑥ が整数の解 p をもつとする。

⑥ の x の係数は整数であるから，(2) より，⑥ のもう 1 つの解 q も整数である。

また，⑥ において，解と係数の関係により

$p+q=(n-2)^2$　……⑦，　$pq=n$　……⑧

$p+q=(n-2)^2\geqq0$，$pq=n>0$ より　　$p>0$，$q>0$

p，q は整数であるから　　$p\geqq1$，$q\geqq1$

よって，(1) より　　$pq\geqq p+q-1$

これに ⑦，⑧ を代入して　　$n\geqq(n-2)^2-1$　　　したがって　　$n^2-5n+3\leqq0$

これを解いて　　$\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}\leqq n\leqq\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$

n は自然数であるから　　$n=1$，2，3，4

$p\geqq1$，$q\geqq1$ より　　$p+q\geqq2$

したがって，⑦ より　　$(n-2)^2\geqq2$

$n=1$，2，3，4 のうち，これを満たす自然数は $n=4$ のみである。

$n=4$ のとき，⑥ は　　$x^2-4x+4=0$

これを解くと $x=2$ となり，2 次方程式 ⑥ は整数解をもつ。

したがって，求める n の値と 2 次方程式の解は　$n=4$，解は $x=2$ (重解)

3

解答 (1) $(a,\ b)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left[(a,\ b)=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right.$ でもよい$\left.\right]$

(2) $(y,\ z)=(3,\ 4)$ $[(y,\ z)=(4,\ 3)$ でもよい$]$　(3) $x=-7,\ \frac{7\pm\sqrt{3}i}{2}$

解説

(1) 等式の両辺に $x=1,\ y=1,\ z=1$ を代入すると　$0=3(2a+1)^2$

ゆえに　$a=-\frac{1}{2}$ ……①

また，両辺に $x=0,\ y=0,\ z=1$ を代入すると　$1=a^2+b^2$

① から　$b^2+\frac{1}{4}=1$　　よって　$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ②

したがって，①，② が $(a,\ b)$ の必要条件である。ここで

$$\{x+(a+bi)y+(a-bi)z\}\{x+(a-bi)y+(a+bi)z\}$$
$$=\{x+(y+z)a+(y-z)bi\}\{x+(y+z)a-(y-z)bi\}$$
$$=\{x+(y+z)a\}^2-(y-z)^2(bi)^2$$
$$=x^2+2a(y+z)x+a^2(y+z)^2+b^2(y-z)^2\quad (=P \text{ とする})$$

であり，P に ①，② を代入すると

$$P=x^2-(y+z)x+\frac{(y+z)^2+3(y-z)^2}{4}=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$

ゆえに，与えられた等式の右辺は

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

よって，すべての実数 $x,\ y,\ z$ に対して与えられた等式は成り立つ。

したがって，求める 1 組の $(a,\ b)$ は

$$(a,\ b)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \left[(a,\ b)=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{でもよい}\right]$$

(2) 1 組求めればよいから，$yz=12$ を満たす正の整数で $y<z$ のものについて考えると

$(y,\ z)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4)$

$y^3+z^3=91$ を満たすものは　$(y,\ z)=(3,\ 4)$

これが求める 1 組である。　$[(y,\ z)=(4,\ 3)$ でもよい$]$

(3) (1) の等式において，$y=3,\ z=4$ とすると

$$x^3-36x+91=(x+7)\left\{x+3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$
$$\times\left\{x+3\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right\}$$
$$=(x+7)\left(x-\frac{7+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{3}i}{2}\right)$$

よって，求める解は　$x=-7,\ \frac{7\pm\sqrt{3}i}{2}$

4

解答 (1) x　(2) x

解説

(1) 条件から，剰余の定理により　$P(1)=1,\ P(2)=2,\ P(3)=3$ …… ①

$P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りは 0 または 2 次以下の整式であるから

ax^2+bx+c とおけて，商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$$

よって，① から　$a+b+c=1,\ 4a+2b+c=2,\ 9a+3b+c=3$

これを解いて　$a=0,\ b=1,\ c=0$

したがって，求める余りは　x

(2) $Q(x)=P(x)-x$ とおくと

$$Q(1)=P(1)-1=0,\ Q(2)=P(2)-2=0,\ \cdots\cdots,\ Q(n)=P(n)-n=0$$

よって，$Q(x)$ は $(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n)$ で割り切れるから

$$Q(x)=P(x)-x=(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n)S(x)$$

とおける。

ゆえに　$P(x)=(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n)S(x)+x$

したがって，求める余りは　x

5

解答 $(a,\ b,\ c)=(-1,\ 0,\ -1),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-3,\ 4,\ -3),\ (3,\ 4,\ 3),$
$(2,\ 2,\ 2),\ (1,\ 0,\ 1)$

解説

方程式 $f(x)=0$ の整数解の 1 つを $x=n$ とすると

$$n(n^3+an^2+bn+c)=-1$$

$a,\ b,\ c,\ n$ はすべて整数であるから　$n=\pm1$

[1] $f(x)=0$ が $x=1$ を重解にもつとき $f(x)=(x-1)^2(x^2+px+1)$ と表される。

よって　$f(x)=x^4+(p-2)x^3-2(p-1)x^2+(p-2)x+1$ …… ①

ゆえに，$a,\ b,\ c$ は整数であるから p は整数。

また　$x^2+px+1=0$ は虚数解をもつ。

よって　$D=p^2-4<0$　かつ　p は整数。

ゆえに　$p=\pm1,\ 0$

① から，$p=1$ のとき　$a=c=-1,\ b=0$

$p=0$ のとき　$a=c=-2,\ b=2$

$p=-1$ のとき　$a=c=-3,\ b=4$

[2] $f(x)=0$ が $x=\pm1$ を解にもつとき $f(x)=(x^2-1)(x^2+qx-1)$ と表される。

このとき，$x^2+qx-1=0$ は虚数解をもたない。

よって，不適。

[3] $f(x)=0$ が $x=-1$ を重解にもつとき $f(x)=(x+1)^2(x^2+rx+1)$ と表される。

よって　$f(x)=x^4+(r+2)x^3+2(r+1)x^2+(r+2)x+1$ …… ②

[1] と同様にして　$r=\pm1,\ 0$

② から $r=1$ のとき　$a=c=3,\ b=4$

$r=0$ のとき　$a=b=c=2$

$r=-1$ のとき　$a=c=1,\ b=0$

以上から　$(a,\ b,\ c)=(-1,\ 0,\ -1),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-3,\ 4,\ -3),\ (3,\ 4,\ 3),$
$(2,\ 2,\ 2),\ (1,\ 0,\ 1)$

6

解答 (1) $a=0$ のとき $z=-1$，$a\neq0$ のとき $z=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$　(2) $a\geqq-\frac{1}{4}$

(3) $a>0$

解説

(1) [1] $a=0$ のとき　$z+1=0$ から　$z=-1$

[2] $a\neq0$ のとき

$z+1-\frac{a}{z}=0$ の両辺に z を掛けて　$z^2+z-a=0$

よって　$z=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

したがって　$a=0$ のとき　$z=-1$,

$a\neq0$ のとき　$z=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

(2) $z=x+yi$ ($x,\ y$ は実数) とおく。

$\overline{z}+1-\frac{a}{z}=0$ の両辺に z を掛けて　$z\overline{z}+z-a=0$

すなわち　$x^2+y^2+x+yi-a=0$

整理して　$x^2+y^2+x-a+yi=0$

$x,\ y,\ a$ は実数であるから　$x^2+y^2+x-a=0,\quad y=0$

よって　$x^2+x-a=0$ …… ①

$z\neq0$ であるから，① が $x\neq0$ である実数解を少なくとも 1 つもつような a の値の範囲が求めるものである。

$x=0$ は ① の重解ではないから，判別式を D とすると

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-a)\geqq0$　　ゆえに　$a\geqq-\frac{1}{4}$

(3) $z(\overline{z})^2+\overline{z}-\frac{a}{z}=0$ の両辺に z を掛けて　$(z\overline{z})^2+z\overline{z}-a=0$

$z\overline{z}$ は実数であるから，X を実数として，$z\overline{z}=X$ とおく。

すなわち　$X^2+X-a=0$ …… ②

$z\neq0$ により，$X=z\overline{z}>0$ であるから，② が正の実数解をもつような a の値の範囲が求めるものである。

② が実数解をもつための条件は，判別式を D とすると

$D=1+4a\geqq0$　　ゆえに　$a\geqq-\frac{1}{4}$ …… ③

このとき，2 つの実数解を $\alpha,\ \beta$ とすると，$\alpha+\beta=-1<0$ より，$\alpha,\ \beta$ がともに正であることはないから，正の実数解をもつためには

$\alpha\beta=-a<0$　すなわち　$a>0$ …… ④

③，④ の共通範囲をとって　$a>0$

7

解答 (1) 略　(2) 略　(3) 略

解説

(1) $\alpha=a+bi,\ \beta=c+di$ ($a,\ b,\ c,\ d$ は実数) とし，$\alpha\beta=0$ とすると

$$(a+bi)(c+di)=0$$

よって　$(ac-bd)+(ad+bc)i=0$

$ac-bd,\ ad+bc$ は実数であるから　$ac-bd=0$ かつ $ad+bc=0$

[1] $a=0$ のとき　$bd=0$ かつ $bc=0$

ゆえに　$b=0$ または $c=d=0$

[2] $a\neq0$ のとき，$c=\frac{bd}{a}$ であるから

$ad+b\cdot\frac{bd}{a}=0$　　すなわち　$\frac{d(a^2+b^2)}{a}=0$

$a\neq0$ より $a^2+b^2\neq0$ であるから　$d=0$

ゆえに　$c=0$

[1]，[2] から，$\alpha\beta=0$ ならば，$\alpha=0$ または $\beta=0$ である。

(別証)「$\alpha\beta=0$ ならば，$\alpha=0$ または $\beta=0$」を ① とする。

[1] $\alpha=0$ のとき，① は成り立つ。

[2] $\alpha\neq0$ のとき，複素数 $\frac{1}{\alpha}$ が存在するから，$\alpha\beta=0$ ならば

$$\beta=\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\right)\beta=\frac{1}{\alpha}(\alpha\beta)=\frac{1}{\alpha}\cdot0=0$$

[1]，[2] から，① は成り立つ。

(2) $\alpha=a+bi$ (a，b は実数) とすると

$$\alpha^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$$

よって，α^2 が正の実数ならば　$a^2-b^2>0$ かつ $ab=0$

$ab=0$ から　$a=0$ または $b=0$

[1] $a=0$ のとき

$a^2-b^2>0$ は $-b^2>0$ となり，不適。

[2] $a\neq0$ のとき

$ab=0$ から　$b=0$

このとき，$a^2-b^2=a^2>0$ である。

よって　$\alpha=a$ (実数)

[1]，[2] から，α^2 が正の実数ならば，α は実数である。

(別証) $\alpha^2=r$ (r は正の実数) とすると　$\alpha^2-r=0$

r は正の実数であるから　$(\alpha+\sqrt{r})(\alpha-\sqrt{r})=0$

(1) より　$\alpha+\sqrt{r}=0$ または $\alpha-\sqrt{r}=0$

ゆえに　$\alpha=-\sqrt{r}$ または $\alpha=\sqrt{r}$

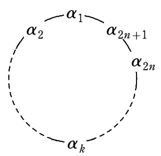
$-\sqrt{r}$ と $\sqrt{r}$ は実数であるから，α は実数である。

(3) 正の実数 $\alpha_1\alpha_2$，……，$\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}$，$\alpha_{2n+1}\alpha_1$ のすべての積 $(\alpha_1\cdots\cdots\alpha_{2n}\alpha_{2n+1})^2$ は，正の実数である。

よって，(2) により，$\alpha_1\cdots\cdots\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}$ は実数である。

この実数を P とする。

次に，α_1，α_2，……，α_k，……，α_{2n+1} を右の図のように円形に並べる。



このとき，どの α_k ($1\leqq k\leqq 2n+1$) についても α_k 以外の数は $2n$ 個あり，α_k の隣から順に 2 個ずつをとって掛けた積は，仮定からすべて正の実数である。

よって，α_k を除く $2n$ 個の複素数の積は正の実数であり，これを Q_k とすると，$\frac{P}{Q_k}=\alpha_k$ は実数である。

したがって，α_1，α_2，……，α_{2n+1} はすべて実数である。

$\boxed{8}$

解答　略

解説

[A] $P(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った商と余りが，それぞれ，$P(x)$ を $(x-c)(x-d)$ で割った商と余りに一致する

[B] $a=c$，$b=d$

とする。

[B] $\Longrightarrow$ [A] は明らかに成り立つ。

次に，[A] $\Longrightarrow$ [B] を示す。

[A] のとき，商を $x-e$，余りを $mx+n$ とすると

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-e)+mx+n,$$
$$P(x)=(x-c)(x-d)(x-e)+mx+n$$

と表される。

よって　$(x-a)(x-b)(x-e)=(x-c)(x-d)(x-e)$

$\{(x-a)(x-b)-(x-c)(x-d)\}(x-e)=0$

これが x の恒等式であり，$x\neq e$ のとき

$(x-a)(x-b)-(x-c)(x-d)=0$

x について整理すると

$\{(a+b)-(c+d)\}x-(ab-cd)=0$

これが，$x\neq e$ のとき常に成り立つための条件は

$a+b=c+d$　かつ　$ab=cd$

$a+b=c+d=u$，$ab=cd=v$ とおくと，a と b，c と d はともに t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの解である。

$a<b$ および $c<d$ であるから　$a=c$，$b=d$

したがって，[A] $\Longrightarrow$ [B] が成り立つ。

以上から，[A] $\Longleftrightarrow$ [B] が成り立つ。

$\boxed{9}$

解答　$a=-4$，$b=4$

解説

$x^3+ax^2+bx-1=0$ ……①　とする。

$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，α，β，γ のどれかは整数であるから，整数解は $x=1$ または $x=2$ である。

一方，整数解を $x=n$ とすると　$n^3+an^2+bn-1=0$

よって　$n(n^2+an+b)=1$

n，n^2+an+b は整数で，$n>0$ であるから　$n=1$

ゆえに，① は $x=1$ を解にもつ。

よって　$1+a+b-1=0$　　ゆえに　$b=-a$ ……②

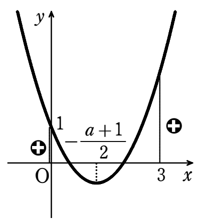
このとき　$x^3+ax^2+bx-1=x^3+ax^2-ax-1$

$$=(x-1)\{x^2+(a+1)x+1\}$$

条件から，$x^2+(a+1)x+1=0$ は $0<x<3$ において，$x=1$ でない異なる 2 つの実数解をもつ。

$f(x)=x^2+(a+1)x+1$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{cases} D=(a+1)^2-4\cdot1\cdot1>0 & \cdots\cdots ③ \\ f(0)=1>0 & \cdots\cdots ④ \\ f(3)=9+3(a+1)+1>0 & \cdots\cdots ⑤ \\ \text{軸について}\quad 0<-\dfrac{a+1}{2}<3 & \cdots\cdots ⑥ \\ f(1)=1+a+1+1\neq0 & \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$



③ から　$(a+3)(a-1)>0$　よって　$a<-3$，$1<a$

④ は常に成り立つ。⑤ から　$a>-\frac{13}{3}$

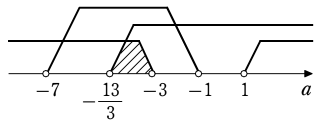
⑥ から　$-7<a<-1$　　⑦ から　$a\neq-3$

共通範囲を求めて　$-\frac{13}{3}<a<-3$

a は整数であるから　$a=-4$

このとき，② から　$b=4$

ゆえに　$a=-4$，$b=4$



$\boxed{10}$

解答　略

解説

$P(x)$ を 2 次式 $Q(x)$ で割ったときの商を $f(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=Q(x)f(x)+ax+b$$

と表せる。ただし，$P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れないから

$$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$$

ここで　$\{P(x)\}^2=\{Q(x)f(x)+ax+b\}^2$

$$=\{Q(x)f(x)\}^2+2Q(x)f(x)(ax+b)+(ax+b)^2$$

$\{P(x)\}^2$ が $Q(x)$ で割り切れるから，$(ax+b)^2$ が 2 次式 $Q(x)$ で割り切れる。

よって　$(ax+b)^2=kQ(x)$　(k は定数)

$Q(x)$ は 2 次式で，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ であるから，$k\neq0$ であり，$a\neq0$ となる。

したがって　$Q(x)=\frac{1}{k}(ax+b)^2=\frac{a^2}{k}\left(x+\frac{b}{a}\right)^2$

よって，$Q(x)=0$ は重解 $x=-\frac{b}{a}$ をもつ。

別解　$Q(x)=0$ の解を α，β とすると，$Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ($a\neq0$) と表せる。

ここで，$\alpha\neq\beta$ と仮定する。

$\{P(x)\}^2$ が $Q(x)$ で割り切れるから，$\{P(x)\}^2=a(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$ を満たす整式 $g(x)$ が存在する。

$\{P(\alpha)\}^2=0$，$\{P(\beta)\}^2=0$ であるから　$P(\alpha)=0$，$P(\beta)=0$

よって，$\alpha\neq\beta$ のとき，$P(x)$ は $x-\alpha$，$x-\beta$ を因数にもち，$P(x)$ が $Q(x)$ で割り切れることになるが，これは矛盾である。

したがって　$\alpha=\beta$　　すなわち，$Q(x)=0$ は重解をもつ。