

1

関数 $f(x) = 2\sin^2 x + 4\sin x + 3\cos 2x$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $0 \leq x < 2\pi$ である。

- (1) $t = \sin x$ とするとき、 $f(x)$ を t の式で表せ。
- (2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値をすべて求めよ。
- (3) 方程式 $f(x) = a$ の相異なる解が 4 個であるような実数 a の値の範囲を求めよ。

2

a を正の実数とする。2 つの放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3a$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2$ が異なる

2 点で交わるとし、2 つの放物線によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。

- (1) a の値の範囲を求めよ。
- (2) $S(a)$ を a を用いて表せ。
- (3) $S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ。

3

n を 9 以上の自然数とする。袋の中に n 個の球が入っている。このうち 6 個は赤球で残りは白球である。この袋から 6 個の球を同時に取り出すとき、3 個が赤球である確率を P_n とする。

- (1) P_{10} を求めよ。
- (2) $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ を求めよ。
- (3) P_n が最大となる n を求めよ。

4

三角錐 $OABC$ において、点 R, S, T をそれぞれ辺 OA, AB, OC 上に $OR:RA=1:3$, $AS:SB=1:1$, $OT:TC=1:9$ となるようにとる。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき

- (1) $\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (2) 辺 BC 上の点 P を $\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BC}$ とするとき、 \overrightarrow{RP} を $t, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
- (3) 点 P が 3 点 R, S, T で決まる平面上にあるとき、(2) における t の値を求めよ。

追加問題

1

自然数 x, y, z は条件 $x \leq y \leq z$ および $xy + yz + zx = xyz$ を満たすとする。

- (1) 不等式 $x \leq 3$ を示せ。
- (2) 与えられた条件を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

2

連立不等式 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ (y - 2x - 10)(y + x + 5) \leq 0 \end{cases}$ の表す領域を D とする。

- (1) 領域 D を図示せよ。
- (2) 点 (x, y) がこの領域 D を動くとき、 $x + 2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ。また、 M, m を与える D の点を求めよ。
- (3) a を実数とする。点 (x, y) が領域 D を動くとき、 $ax + y$ が点 $(-3, 4)$ で最大値をとるような a の範囲を求めよ。