1

解答 $\dfrac{5}{2}$

解説

$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$ から (与式)$= \sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ + \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

別解 $\cos 15^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ$, $\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$ から

(与式)$= (\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ) + (\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ) + \cos^2 45^\circ = 1 + 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

2

解答 (1) $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{1}{2}$

(2) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$，$\cos\theta = -\dfrac{2}{5}$，$\tan\theta = -\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

解説

(1) 等式 $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$$

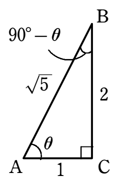
ここで，θ は鋭角であるから　$\cos\theta > 0$

よって　$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

ゆえに　$\sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

また　$\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{2}$

別解 右の図のような，BC$=2$，CA$=1$，$\angle$B$=90^\circ - \theta$，$\angle$C$=90^\circ$ の直角三角形ABCを考えると



$$\text{AB} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

よって　$\sin\theta = \dfrac{\text{BC}}{\text{AB}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

$\cos\theta = \dfrac{\text{CA}}{\text{AB}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

また　$\tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{\text{CA}}{\text{BC}} = \dfrac{1}{2}$

(2) 等式 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$ から

$$\cos\theta = -\cos(180^\circ - \theta) = -\frac{2}{5}$$

等式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　$\sin\theta \geqq 0$

よって　$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{21}{25}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \div \left(-\dfrac{2}{5}\right) = -\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

3

解答 (1) $\dfrac{52}{9}$　(2) $4 \leqq a \leqq \dfrac{23}{4}$

解説

(1) $4\cos x + 5\sin^2 x = a$ から

$$4\cos x + 5(1 - \cos^2 x) = a$$

よって　$-5\cos^2 x + 4\cos x + 5 = a$

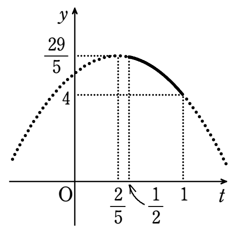
したがって，$\cos x = \dfrac{1}{3}$ となるとき　$a = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + 4\cdot\dfrac{1}{3} + 5 = \dfrac{52}{9}$

(2) $\cos x = t$ とおくと，$0^\circ \leqq x \leqq 60^\circ$ のとき $\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ であり，x の値と t の値は1対1に対応する。

このとき，方程式は　$-5t^2 + 4t + 5 = a$

よって，$y = -5t^2 + 4t + 5$ $\left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$ ……① のグラフと直線 $y = a$ が共有点をただ1つもつような a の範囲が求めるものである。

$-5t^2 + 4t + 5 = -5\left(t - \dfrac{2}{5}\right)^2 + \dfrac{29}{5}$ より，①のグラフは右の図の実線部分である。



また，$t = \dfrac{1}{2}$ のとき　$y = \dfrac{23}{4}$

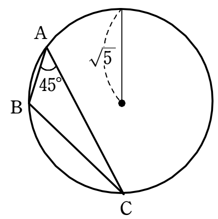
よって，求める a の範囲は　$4 \leqq a \leqq \dfrac{23}{4}$

4

解答 AB$=\sqrt{2}$，BC$=\sqrt{10}$，CA$=4$

解説

△ABCの外接円の半径が $\sqrt{5}$ であるから，△ABCにおいて正弦定理により



$$2\sqrt{5} = \frac{\text{AB}}{\sin\angle\text{BCA}} = \frac{\text{BC}}{\sin\angle\text{CAB}}$$

よって　AB$= 2\sqrt{5}\sin\angle$BCA$= 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}$,

BC$= 2\sqrt{5}\sin\angle$CAB$= 2\sqrt{5}\sin 45^\circ$

$= 2\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{10}$

また，△ABCにおいて余弦定理により　$\text{BC}^2 = \text{CA}^2 + \text{AB}^2 - 2\text{CA}\cdot\text{AB}\cos 45^\circ$

すなわち　$(\sqrt{10})^2 = \text{CA}^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\text{CA}\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

整理すると　$\text{CA}^2 - 2\text{CA} - 8 = 0$　　よって　$(\text{CA}+2)(\text{CA}-4) = 0$

CA>0 であるから　CA$=4$

5

解答 (1) $b=2$，$A=30^\circ$，$C=105^\circ$　(2) $a=3\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，$C=15^\circ$

(3) $b=\dfrac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$，$c=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$，$A=45^\circ$

(4) $b=4(\sqrt{3}+1)$，$c=4\sqrt{2}$，$B=105^\circ$

(5) $A=30^\circ$，$B=60^\circ$，$C=90^\circ$　(6) $A=30^\circ$，$B=135^\circ$，$C=15^\circ$

解説

(1) 余弦定理により　$b^2 = (1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ = 4$

$b>0$ であるから　$b = \sqrt{4} = 2$

余弦定理により　$\cos A = \dfrac{2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})} = \dfrac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　$A = 30^\circ$

よって　$C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

参考 b を求めた後で A を求めるのに正弦定理を用いる方法もある。

正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin A} = \dfrac{2}{\sin 45^\circ}$

よって　$\sin A = \dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{2} = \dfrac{1}{2}$

ここで，$\sqrt{2} < 2$ より $a < b$ であるから，$A < B$ である。ゆえに，A は鋭角であるから　$A = 30^\circ$

以下同様。

(2) 余弦定理により　$a^2 = (2\sqrt{3})^2 + (3-\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\cos 120^\circ = 18$

$a>0$ であるから　$a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

余弦定理により　$\cos B = \dfrac{(3-\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ゆえに　$B = 45^\circ$

よって　$C = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$

参考 a を求めた後で B を求めるのに正弦定理を用いる方法もある。

正弦定理により　$\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}$

よって　$\sin B = \dfrac{2\sqrt{3}\sin 120^\circ}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$A = 120^\circ$ より B は鋭角であるから　$B = 45^\circ$

以下同様。

(3) $A = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{5}{\sin 45^\circ} = \dfrac{b}{\sin 75^\circ} = \dfrac{c}{\sin 60^\circ}$

よって　$b = \dfrac{5\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 5\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2} = \dfrac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$

$c = \dfrac{5\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

(4) $B = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{8}{\sin 45^\circ} = \dfrac{b}{\sin 105^\circ} = \dfrac{c}{\sin 30^\circ}$

よって　$b = \dfrac{8\sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} = \dfrac{8\sin(180^\circ - 75^\circ)}{\sin 45^\circ} = \dfrac{8\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 8\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2}$

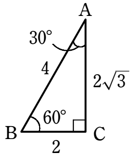
$= 4(\sqrt{3}+1)$

$c = \dfrac{8\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 8\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

(5) 余弦定理により　$\cos A = \dfrac{(2\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　よって　$A = 30^\circ$

$$\cos B=\frac{4^2+2^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot4\cdot2}=\frac{1}{2}\qquad よって\quad B=60°$$

ゆえに　$C=180°-(30°+60°)=90°$



別解　$a:b:c=1:\sqrt{3}:2$ から　$A=30°$，$B=60°$，$C=90°$

(6)　余弦定理により

$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot2\cdot(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{6-2\sqrt{3}}{2\cdot2(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\cdot2(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　$A=30°$

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

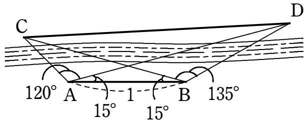
よって　$B=135°$　　ゆえに　$C=180°-(30°+135°)=15°$

6

解答　(1)　15°　(2)　$\sqrt{2}$　(3)　$\sqrt{5}$

解説

(1)　$\angle\mathrm{BDA}=180°-(\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{ABD})$
$=180°-\angle\mathrm{BAD}$
$-(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{CBD})$
$=180°-15°-(15°+135°)$
$=15°$



(2)　$\angle\mathrm{ACB}=180°-(\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{ABC})$
$=180°-(\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{DAC})-\angle\mathrm{ABC}=180°-(15°+120°)-15°=30°$

よって，△ABC において，正弦定理により　$\dfrac{1}{\sin30°}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin135°}$

したがって　$\mathrm{BC}=\dfrac{\sin135°}{\sin30°}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}$

(3)　(1) より，△ABD は二等辺三角形であるから　BD＝AB＝1

△BCD において，余弦定理により

$$\mathrm{CD}^2=(\sqrt{2})^2+1^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot1\cos135°=2+1-2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=5$$

CD＞0 であるから　$\mathrm{CD}=\sqrt{5}$

7

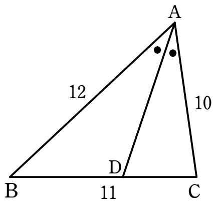
解答　$3\sqrt{10}$

解説

AD は ∠A の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC＝12：10＝6：5

よって　$\mathrm{BD}=\dfrac{6}{6+5}\mathrm{BC}=\dfrac{6}{11}\cdot11=6$



△ABD において，余弦定理により

$\mathrm{AD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cos B$　……①

△ABC において，余弦定理により

$$\cos B=\frac{12^2+11^2-10^2}{2\cdot12\cdot11}=\frac{165}{2\cdot12\cdot11}=\frac{5}{8}$$

① に代入して　$\mathrm{AD}^2=12^2+6^2-2\cdot12\cdot6\cdot\dfrac{5}{8}=90$

AD＞0 であるから　$\mathrm{AD}=3\sqrt{10}$

8

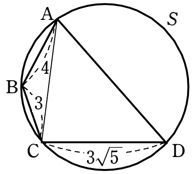
解答　（ア）$3\sqrt{5}$　（イ）$\dfrac{9\sqrt{55}}{11}$　（ウ）$\dfrac{5\sqrt{11}}{18}$　（エ）$5\sqrt{5}$　（オ）$\dfrac{25\sqrt{11}}{4}$

解説

△ABC において，余弦定理から

$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}$

$=4^2+3^2-2\cdot4\cdot3\cdot\left(-\dfrac{5}{6}\right)=45$



AC＞0 であるから　$\mathrm{AC}=\sqrt{45}={}^{ア}3\sqrt{5}$

円 S の半径を R とする。

△ABC において，正弦定理から　$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2R$

よって　$R=\dfrac{\mathrm{AC}}{2\sin\angle\mathrm{ABC}}$　……①

ここで，$\sin\angle\mathrm{ABC}>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{11}{36}}=\frac{\sqrt{11}}{6}$$

ゆえに，① から　$R=\dfrac{3\sqrt{5}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{\sqrt{11}}={}^{イ}\dfrac{9\sqrt{55}}{11}$

四角形 ABCD は円 S に内接するから

$$\cos\angle\mathrm{ADC}=\cos(180°-\angle\mathrm{ABC})=-\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{5}{6}$$

AD＝x とおくと，△ACD において，余弦定理から

$\mathrm{AC}^2=x^2+\mathrm{CD}^2-2\cdot x\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{ADC}$

すなわち　$45=x^2+(3\sqrt{5})^2-2x\cdot3\sqrt{5}\cdot\dfrac{5}{6}$

したがって　$x^2-5\sqrt{5}\,x=0$

$x(x-5\sqrt{5})=0$

$x>0$ であるから　$x=5\sqrt{5}$

すなわち　$\mathrm{AD}={}^{エ}5\sqrt{5}$

また，△ACD において，正弦定理から　$\dfrac{\mathrm{AD}}{\sin\angle\mathrm{ACD}}=2R$

よって　$\sin\angle\mathrm{ACD}=\dfrac{\mathrm{AD}}{2R}=\dfrac{5\sqrt{5}}{2\cdot\dfrac{9\sqrt{55}}{11}}=\dfrac{55}{18\sqrt{11}}={}^{ウ}\dfrac{5\sqrt{11}}{18}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{5}\cdot3\sqrt{5}\cdot\dfrac{5\sqrt{11}}{18}$

$={}^{オ}\dfrac{25\sqrt{11}}{4}$

9

解答　正三角形

解説

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理から

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$

これを $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C-\sin B\sin C$ に代入して

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2-\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}$$

両辺に $4R^2$ を掛けて　$a^2=b^2+c^2-bc$　……①

余弦定理から　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

これを $a\cos B=b\cos A$ に代入して

$$a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

すなわち　$\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$

両辺に $2c$ を掛けて　$c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2$

よって　$a^2=b^2$

$a>0$，$b>0$ であるから　$a=b$

$a=b$ を ① に代入して　$b^2=b^2+c^2-bc$

よって　$c(b-c)=0$　　$c>0$ であるから　$b=c$

したがって，$a=b=c$ であるから，△ABC は正三角形である。

10

解答　(1)　$a>2$　(2)　$2<a<4$　(3)　順に $\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

解説

(1)　$a-1<a<a+1$ であるから，三角形が存在するための条件は

$a-1+a>a+1$

これを解いて　$a>2$　……①

(2)　鈍角三角形となるための条件は　$(a+1)^2>(a-1)^2+a^2$

ゆえに　$a^2-4a<0$　　すなわち　$a(a-4)<0$

よって　$0<a<4$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$2<a<4$　……③

(3)　1 つの内角が 120° である三角形は鈍角三角形であり，最大の長さ $a+1$ の辺に対する角が鈍角である。

したがって，余弦定理により

$(a+1)^2=(a-1)^2+a^2-2a(a-1)\cos120°$

ゆえに　$(a+1)^2=(a-1)^2+a^2+a(a-1)$

よって　$2a^2-5a=0$　　すなわち　$a=0$，$\dfrac{5}{2}$

③ を満たすものは　$a=\dfrac{5}{2}$

このとき，三角形の 3 辺の長さは　$\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2}$，$\dfrac{7}{2}$

外接円の半径を R とすると，正弦定理により　$\dfrac{\dfrac{7}{2}}{\sin120°}=2R$

ゆえに　$R=\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$

また，内接円の半径を r とすると，三角形の面積について

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\sin120°=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right)r$$

ゆえに　$\dfrac{15\sqrt{3}}{16}=\dfrac{15}{4}r$　　よって　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

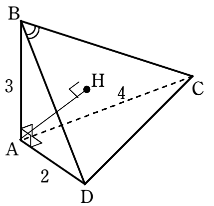
章末問題A

$\boxed{11}$

解答　(1) $\dfrac{9\sqrt{13}}{65}$　(2) $\sqrt{61}$　(3) $\dfrac{12\sqrt{61}}{61}$

解説

(1) 直角三角形 ABC，ACD，ADB において，
三平方の定理により



$$\mathrm{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$
$$\mathrm{CD}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$\mathrm{DB}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

よって，△BCD において，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{DBC}=\frac{25+13-20}{2\cdot5\cdot\sqrt{13}}=\frac{9}{5\sqrt{13}}=\frac{9\sqrt{13}}{65}$$

(2) $0°<\angle\mathrm{DBC}<180°$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{DBC}=\sqrt{1-\left(\frac{9}{5\sqrt{13}}\right)^2}=\sqrt{\frac{244}{25\cdot13}}=\frac{2\sqrt{61}}{5\sqrt{13}}$$

よって　$\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot\sqrt{13}\cdot\dfrac{2\sqrt{61}}{5\sqrt{13}}=\sqrt{61}$

(3) 四面体 ABCD の底面を △BCD と考えると，四面体の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{AH}$$

一方，△ACD を底面と考えると

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ACD}\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\right)\cdot3=4$$

よって，$\dfrac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{AH}=4$ から　$\mathrm{AH}=4\cdot\dfrac{3}{\sqrt{61}}=\dfrac{12\sqrt{61}}{61}$

章末問題B

$\boxed{1}$

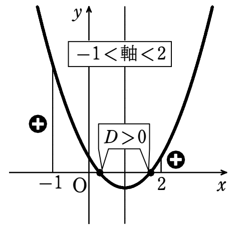
解答　$90°<\theta<120°$

解説

判別式を D とし，$f(x)=x^2-(\cos\theta)x+\cos\theta$ とする。

2 次方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<2$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつための条件は，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $-1<x<2$ の部分と，異なる 2 点で交わることである。

したがって，次の [1]～[4] が同時に成り立つ。



また，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき　$-1\leqq\cos\theta\leqq1$　……①

[1]　$D=(-\cos\theta)^2-4\cos\theta=\cos\theta(\cos\theta-4)>0$

常に $\cos\theta-4<0$ であるから　$\cos\theta<0$　……②

[2]　放物線の軸は直線 $x=\dfrac{\cos\theta}{2}$ で，この軸について

$-1<\dfrac{\cos\theta}{2}<2$　すなわち　$-2<\cos\theta<4$

これは常に成り立つ。

[3]　$f(-1)>0$ から　$1+2\cos\theta>0$

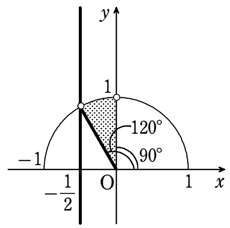
したがって　$\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$　……③

[4]　$f(2)>0$ から　$4-\cos\theta>0$

これは常に成り立つ。

①，②，③の共通範囲を求めて　$-\dfrac{1}{2}<\cos\theta<0$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$90°<\theta<120°$



$\boxed{2}$

解答　$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，証明略

解説

$\begin{cases}\sin\alpha=2\cos\beta & \cdots\cdots ①\\ \sin\beta=2\cos\alpha & \cdots\cdots ②\end{cases}$ とする.

$0°<\alpha<180°$，$0°<\beta<180°$ から　$\sin\alpha>0$，$\sin\beta>0$

①，②から　$\cos\beta>0$，$\cos\alpha>0$

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ であるから　$4\cos^2\alpha+\dfrac{1}{4}\sin^2\alpha=1$

よって　$16\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=4$

ゆえに　$16(1-\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha=4$　したがって　$\sin^2\alpha=\dfrac{4}{5}$

$\sin\alpha>0$ から　$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

また，$\cos\alpha>0$ から　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

したがって　$\cos\beta=\dfrac{1}{2}\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\beta=2\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

ゆえに，$\sin\alpha=\sin\beta$，$\cos\alpha=\cos\beta$，$0°<\alpha<180°$，$0°<\beta<180°$ から　$\alpha=\beta$

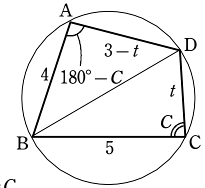
$\boxed{3}$

解答　(1) $\cos C=\dfrac{3t}{t+12}$　(2) $S=\sqrt{-2t^2+6t+36}$

(3) $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$

解説

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから



$$A=180°-C$$

△ABD，△BCD において，それぞれ余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=4^2+(3-t)^2-2\cdot4\cdot(3-t)\cos(180°-C)$$
$$=t^2-6t+25+8(3-t)\cos C$$
$$\mathrm{BD}^2=5^2+t^2-2\cdot5\cdot t\cos C=t^2+25-10t\cos C$$

よって　$t^2-6t+25+8(3-t)\cos C=t^2+25-10t\cos C$

整理して　$2(t+12)\cos C=6t$

$0<t<3$ であるから　$\cos C=\dfrac{3t}{t+12}$

(2) $0°<C<180°$ より，$\sin C>0$ であるから

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\left(\frac{3t}{t+12}\right)^2}=\sqrt{\frac{(t+12)^2-9t^2}{(t+12)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{4(-2t^2+6t+36)}}{\sqrt{(t+12)^2}}=\frac{2\sqrt{-2t^2+6t+36}}{t+12}$$

また　$\sin A=\sin(180°-C)=\sin C$

したがって　$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot4(3-t)\sin A+\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot t\sin C$

$$=\frac{1}{2}(12+t)\sin C=\frac{1}{2}(12+t)\cdot\frac{2\sqrt{-2t^2+6t+36}}{t+12}$$
$$=\sqrt{-2t^2+6t+36}$$

(3) $S=\sqrt{-2t^2+6t+36}=\sqrt{-2(t^2-3t)+36}=\sqrt{-2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{81}{2}}$ と変形できる。

$0<t<3$ の範囲において，$-2t^2+6t+36$ が最大となるとき S は最大となる。

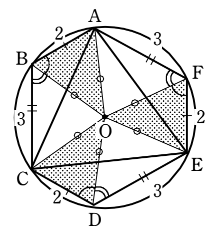
よって，$0<t<3$ の範囲において，S は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{\dfrac{81}{2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$ をとる。

$\boxed{4}$

解答　(1) 120°　(2) $\dfrac{37\sqrt{3}}{4}$

解説

(1) 円の中心を O とすると



$$\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{OCD}\equiv\triangle\mathrm{OEF}$$
$$\triangle\mathrm{OBC}\equiv\triangle\mathrm{ODE}\equiv\triangle\mathrm{OFA}$$

よって　$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{CDE}=\angle\mathrm{EFA}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{CDE}\equiv\triangle\mathrm{EFA}$　……①

よって，AC＝CE＝EA であり，△ACE は正三角形である。

四角形 ABCE は円に内接しているから

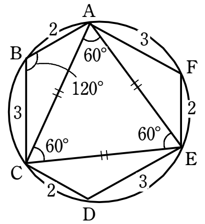
$$\angle\mathrm{ABC}=180°-\angle\mathrm{AEC}=180°-60°=120°$$

(2) 六角形 ABCDEF の面積を S とすると

$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{CDE}+\triangle\mathrm{EFA}+\triangle\mathrm{ACE}$

(1) から　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin 120^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$



ここで，① から

$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{CDE}=\triangle\mathrm{EFA}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

また，△ABC において余弦定理により

$$\mathrm{AC}^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 120^\circ=13-12\left(-\frac{1}{2}\right)=19$$

よって　$\mathrm{AC}=\sqrt{19}$

△ACE は1辺の長さが $\sqrt{19}$ の正三角形であるから

$$\triangle\mathrm{ACE}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AE}\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{19})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{19\sqrt{3}}{4}$$

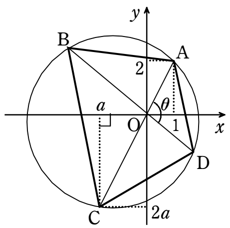
よって　$S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times 3+\dfrac{19\sqrt{3}}{4}=\dfrac{37\sqrt{3}}{4}$

5

解答　(1)　$\mathrm{OC}=-\sqrt{5}\,a$，証明略　(2)　$S=\dfrac{5}{2}(a-1)^2\sin\theta$　(3)　-3

解説

(1)　直線 OA の方程式は $y=2x$ であるから，点 C の y 座標は　$y=2a$



よって　$\mathrm{OC}^2=(-a)^2+(-2a)^2=5a^2$

ゆえに　$\mathrm{OC}=\sqrt{5}|a|=-\sqrt{5}\,a$

また，円周角の定理から

$\angle\mathrm{OBC}=\angle\mathrm{OAD}$，$\angle\mathrm{OCB}=\angle\mathrm{ODA}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{OBC}\backsim\triangle\mathrm{OAD}$

条件より $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}$ であるから　$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$

(2)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OD}=\sqrt{5}$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=-\sqrt{5}\,a$ であるから

$$S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OCD}+\triangle\mathrm{ODA}$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin(180^\circ-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin\theta$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{OD}\sin(180^\circ-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OA}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\{\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{5}\,a)\cdot 2+(-\sqrt{5}\,a)^2+(\sqrt{5})^2\}\sin\theta$$
$$=\frac{5}{2}(a-1)^2\sin\theta$$

(3)　$\theta=30^\circ$ から　$S=\dfrac{5}{2}(a-1)^2\sin 30^\circ=\dfrac{5}{4}(a-1)^2$

$20\leqq S\leqq 40$ から　$20\leqq\dfrac{5}{4}(a-1)^2\leqq 40$

ゆえに　$16\leqq(a-1)^2\leqq 32$

よって　$4\leqq|a-1|\leqq 4\sqrt{2}$　……①

$a<0$ より $|a-1|=-(a-1)$ であるから，① は

$4\leqq-(a-1)\leqq 4\sqrt{2}$

ゆえに　$1-4\sqrt{2}\leqq a\leqq-3$

よって，a のとりうる値の最大値は　-3

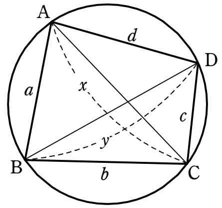
6

解答　(1)　$x=\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$，$y=\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$　(2)　略

解説

(1)　四角形 ABCD は円に内接するから

$D=180^\circ-B$



△ABC において，余弦定理により

$x^2=a^2+b^2-2ab\cos B$　……①

△CDA において，余弦定理により

$x^2=c^2+d^2-2cd\cos D$

$=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-B)$

$=c^2+d^2+2cd\cos B$　……②

①，② から　$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B$

よって　$\cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$

これを ① に代入して

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$
$$=a^2+b^2-\frac{ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)(ab+cd)-ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd}$$

ここで

(分子)$=(a^2+b^2)ab+(a^2+b^2)cd-ab(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)$

$=(a^2+b^2)cd+ab(c^2+d^2)=cda^2+b(c^2+d^2)a+b^2cd$

$=(ac+bd)(ad+bc)$

よって　$x^2=\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$

$x>0$ であるから　$x=\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$　……③

yについても同様で，③ において，a を b，b を c，c を d，d を a におき換えればよいから

$$y=\sqrt{\frac{(bd+ca)(ba+cd)}{bc+da}}=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

(2)　(1) の結果から

$$xy=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$
$$=\sqrt{(ac+bd)^2}$$

a，b，c，d はすべて正であるから　$xy=ac+bd$

7

解答　(1)　12　(2)　$\sqrt{10}$　(3)　$20\sqrt{2}$　(4)　順に $3\sqrt{2}$，72π

解説

(1)　△ABC において，余弦定理から

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}}=\frac{6^2+(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5})^2}{2\cdot 6\cdot 4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

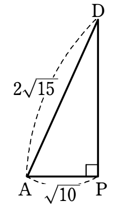
よって，$\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ であり，求める面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=12$$

(2)　線分 AP の長さは △ABC の外接円の半径であるから，正弦定理により

$$\mathrm{AP}=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin\angle\mathrm{BAC}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{10}$$

(3)　△DPA は $\angle\mathrm{DPA}=90^\circ$ の直角三角形であるから



$\mathrm{DP}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{15})^2-(\sqrt{10})^2}$

$=5\sqrt{2}$

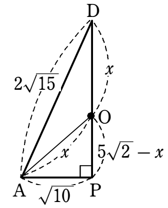
よって，四面体 ABCD の体積は

$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DP}=\dfrac{1}{3}\cdot 12\cdot 5\sqrt{2}$

$=20\sqrt{2}$

(4)　球 S の中心を O とする。

点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすと，点 H は △ABC の外接円の中心 P と一致する。よって，3 点 D，O，P はこの順で一直線上にある。



△OPA は直角三角形であるから，球 S の半径を x とおくと

$x^2=(\sqrt{10})^2+(5\sqrt{2}-x)^2$

展開して整理すると　$10\sqrt{2}\,x=60$

よって　$x=3\sqrt{2}$

さらに，球 S の表面積は

$4\pi x^2=4\pi\cdot(3\sqrt{2})^2=72\pi$

8

解答　(1)　$15\sqrt{7}$　(2)　$2\sqrt{6}$

解説

(1)　三平方の定理により

$$\mathrm{EF}=\sqrt{\mathrm{AF}^2-\mathrm{AE}^2}=\sqrt{8^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$
$$\mathrm{EH}=\sqrt{\mathrm{AH}^2-\mathrm{AE}^2}=\sqrt{10^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$
$$\mathrm{FH}=\sqrt{\mathrm{EF}^2+\mathrm{EH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{6})^2+(3\sqrt{10})^2}=3\sqrt{16}=12$$

△AFH において，余弦定理により

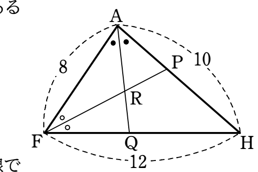
$$\cos\angle\mathrm{FAH}=\frac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{AH}^2-\mathrm{FH}^2}{2\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}}=\frac{8^2+10^2-12^2}{2\cdot 8\cdot 10}=\frac{1}{8}$$

$\sin\angle\mathrm{FAH}>0$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{FAH}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{FAH}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

よって　$\triangle\mathrm{AFH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}\sin\angle\mathrm{FAH}=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=15\sqrt{7}$

(2)　△AFH において，FP は ∠AFH の二等分線であるから　$\mathrm{AP}:\mathrm{PH}=\mathrm{FA}:\mathrm{FH}=8:12=2:3$



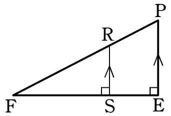
よって　$\triangle\mathrm{AEP}=\dfrac{2}{2+3}\triangle\mathrm{AEH}$

$=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}=6$

また，△AFP において，AR は ∠FAP の二等分線であるから　$\mathrm{FR}:\mathrm{RP}=\mathrm{AF}:\mathrm{AP}=8:\dfrac{2}{2+3}\cdot 10=2:1$

△FPE で，辺 EF 上に RS∥PE となる点 S をとると

$$\mathrm{FS:SE=FR:RP}=2:1$$



ゆえに　$\mathrm{SE}=\dfrac{1}{2+1}\cdot\mathrm{FE}=\dfrac{1}{3}\cdot3\sqrt{6}=\sqrt{6}$

したがって，求める四面体 EAPR の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{AEP}\cdot\mathrm{ES}=\frac{1}{3}\cdot6\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$$

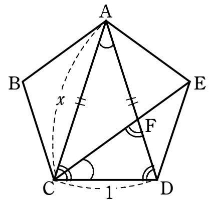
$\boxed{1}$

解答　(ア) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(イ) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　(ウ) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　(エ) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　(オ) $\dfrac{1}{12}$

解説

1 辺の長さが 1 の正三角形の高さは

$$1\cdot\sin60^\circ={}^{ア}\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\mathrm{AC}=x$ とすると　$\mathrm{AD}=x$

また，2 つの二等辺三角形 CDF と AEF は合同であるから　$\mathrm{CD=CF=AE=AF}=1$

ここで，△ACD∽△CDF であるから

$$\mathrm{AC:CD=CD:DF}$$

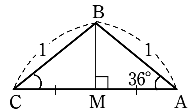
ゆえに　$x:1=1:(x-1)$　よって　$x(x-1)=1$

整理すると　$x^2-x-1=0$

$x>1$ より　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　すなわち　$\mathrm{AC}={}^{イ}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

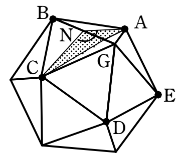
正五角形の 1 つの内角は 108° であるから，二等辺三角形 ABCにおいて　$\angle\mathrm{BAC}=(180^\circ-108^\circ)\div2=36^\circ$

線分 AC の中点を M とすると



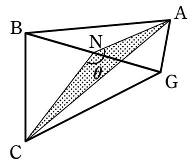
$$\cos36^\circ=\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{AC}}{1}={}^{ウ}\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

ここで，右の図の正二十面体において，ABCDE は正五角形である。



線分 BG の中点を N とすると，正三角形 ABG，CBG について　AN⊥BG，CN⊥BG

$\mathrm{AN=CN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{AC}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であるから，△ACN において余弦定理により



$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2}}={}^{エ}-\frac{\sqrt{5}}{3}$$

4 つの平面 ABG，BCG，ABC，ACG で囲まれた部分の体積を求める。

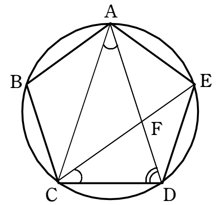
線分 BG は平面 ACN に垂直であるから，求める体積は 2 つの四面体 ACNG，ACNB の体積の和である。

よって，求める体積 V は　$\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{ACN}\cdot(\mathrm{BN+NG})$

ここで，$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$

ゆえに　$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cdot1=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{2}{3}={}^{オ}\dfrac{1}{12}$

参考　(△ACD∽△CDF の証明)



正五角形 ABCDE の外接円について，等しい長さの弧に対する円周角は等しいから

$$\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{DCE}$$

さらに，∠ADC＝∠CDF であるから，2 組の角が等しいことより　△ACD∽△CDF

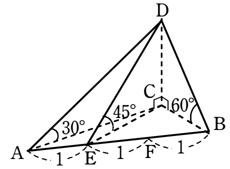
$\boxed{2}$

解答　(1) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　(2) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

解説

(1)　$\mathrm{CD}=x$ とおくと

$$\mathrm{AC}=\sqrt{3}\,x,\ \mathrm{CE}=x,\ \mathrm{BC}=\frac{x}{\sqrt{3}}$$

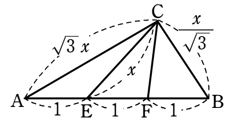


△ACE に余弦定理を適用すると

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3}\,x)^2+1^2-x^2}{2\cdot\sqrt{3}\,x\cdot1}=\frac{2x^2+1}{2\sqrt{3}\,x}\quad\cdots\cdots①$$

△ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3}\,x)^2+3^2-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\cdot\sqrt{3}\,x\cdot3}=\frac{8x^2+27}{18\sqrt{3}\,x}\quad\cdots\cdots②$$



①，② から　$9(2x^2+1)=8x^2+27$

ゆえに　$x^2=\dfrac{9}{5}$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$　すなわち　$\mathrm{CD}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

(2)　$\mathrm{AC}=\sqrt{3}\,x=\sqrt{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$

また，① から　$\cos A=\dfrac{2\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2+1}{2\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{23}{6\sqrt{15}}$

よって，△ACF に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{CF}^2=\left(\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)^2+2^2-2\cdot\frac{3\sqrt{15}}{5}\cdot2\cdot\frac{23}{6\sqrt{15}}=\frac{27}{5}+4-\frac{46}{5}=\frac{1}{5}$$

$\mathrm{CF}>0$ であるから　$\mathrm{CF}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

三平方の定理から　$\mathrm{DF}=\sqrt{\mathrm{CD}^2+\mathrm{CF}^2}=\sqrt{\dfrac{9}{5}+\dfrac{1}{5}}=\sqrt{2}$

よって　$\cos\angle\mathrm{DFC}=\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{DF}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\div\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

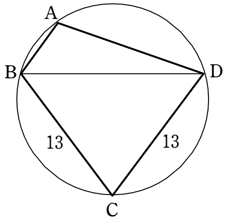
$\boxed{3}$

解答　AB＝4，DA＝14 または AB＝14，DA＝4

解説

△BCD において，余弦定理により

$$BD^2=13^2+13^2-2\cdot13\cdot13\cos C$$
$$=338(1-\cos C)\quad\cdots\cdots①$$



△BCD において，正弦定理により

$$\frac{BD}{\sin C}=2\times\frac{65}{8}$$

よって　$BD=\frac{65}{4}\sin C\quad\cdots\cdots②$

①，② から　$\left(\frac{65}{4}\sin C\right)^2=338(1-\cos C)$

ゆえに　$25(1-\cos^2 C)=32(1-\cos C)$

よって　$25(1+\cos C)(1-\cos C)=32(1-\cos C)$

$\cos C\fallingdotseq 1$ であるから　$25(1+\cos C)=32$

よって　$\cos C=\frac{7}{25}$　① から　$BD=\sqrt{338\left(1-\frac{7}{25}\right)}=\frac{78}{5}$

$AB=x$ とおくと，四角形 ABCD の周の長さが 44 であるから

$x+13+13+DA=44$　ゆえに　$DA=18-x$

△ABD において，余弦定理により

$$BD^2=AB^2+DA^2-2AB\cdot DA\cos A\quad\cdots\cdots③$$

$A+C=180°$ であるから　$\cos A=\cos(180°-C)=-\cos C=-\frac{7}{25}$

よって，③ から　$\left(\frac{78}{5}\right)^2=x^2+(18-x)^2-2x(18-x)\left(-\frac{7}{25}\right)$

分母を払って整理すると　$36(x^2-18x+56)=0$

これを解くと　$x=4,\ 14$

$DA=18-x$ から　$AB=4,\ DA=14$ または $AB=14,\ DA=4$

4

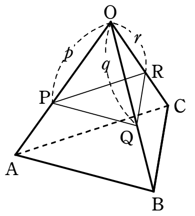
解答　略

解説

$OP=p,\ OQ=q,\ OR=r$ とする。

△OPQ において，余弦定理により

$$PQ^2=p^2+q^2-2pq\cos60°=p^2+q^2-pq$$



同様に　$QR^2=q^2+r^2-qr,\ RP^2=r^2+p^2-rp$

△PQR が正三角形であるとき，$PQ^2=QR^2,\ QR^2=RP^2$ が

成り立つから　$p^2+q^2-pq=q^2+r^2-qr\quad\cdots\cdots①$

$q^2+r^2-qr=r^2+p^2-rp\quad\cdots\cdots②$

① から　$r^2-p^2-qr+pq=0$

すなわち　$(r+p)(r-p)-q(r-p)=0$

よって　$(r-p)(r+p-q)=0\quad\cdots\cdots①'$

同様に，② から　$(p-q)(p+q-r)=0\quad\cdots\cdots②'$

①′ から　$r=p$ または $q=r+p$

ここで，$q=r+p$ とすると，②′ から　$-r\cdot2p=0$

条件より，$rp\fallingdotseq 0$ であるから，不適。

よって　$r=p$

同様に，②′ から，$p=q$ または $r=p+q$ であるが，$r=p+q$ は不適であり　$p=q$

したがって　$p=q=r$

よって，正三角形 OAB において，OP：PA＝OQ：QB となるから　$PQ/\!/AB$

同様にして，$QR/\!/BC,\ RP/\!/CA$ も示される。

5

解答　略

解説

半径 1 の円に内接する正十二角形 S の 1 辺の長さを x とすると，余弦定理から

$$x^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos30°=2-\sqrt{3}$$

$x>0$ から　$x=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

よって，S の周の長さは　$12\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}=6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

内接することから，明らかに (円周の長さ)＞(S の周の長さ) である。

$$(\text{円周率})=\frac{(\text{円周の長さ})}{(\text{直径})}>\frac{(S\text{の周の長さ})}{(\text{直径})}=\frac{6(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$
$$=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})>3(2.44-1.42)=3\times1.02=3.06>3.05$$

よって，円周率は 3.05 より大きい。