高 3 物理総合 S～前期第 3 回～ ＜解答＞◆いろいろな単振動①◆

＜予習用問題＞

【１】

〔Ⅰ〕斜面に対して鉛直成分の力のつりあい $N = mg\cos\theta$ …①

斜面に対して水平成分の力のつりあい $\mu_k N = mg\sin\theta$ …②

①，②より $\mu_k = \tan\theta$

〔Ⅱ〕点 O における斜面に対して水平成分の力のつりあい

$\mu_k N + mg\sin\theta = k\ell_A$ …③

②，③より $\ell_A = \dfrac{2mg\sin\theta}{k}$

〔Ⅲ〕点 O を原点としてベルトに沿って下向きの変位を x とする。

合力 $F = \mu_k N + mg\sin\theta - k(\ell_A + x) = -kx$ （∵③より）

よって，周期は $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

単振動のエネルギー保存則 $\dfrac{1}{2}kA_1{}^2 = \dfrac{1}{2}mV_1{}^2$ より $V_1 = A_1\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

〔Ⅳ〕ばねの伸びが ℓ_B のとき，斜面に対して水平成分の力のつりあい

$\mu_s N + mg\sin\theta = k\ell_B$ …⑤

③，⑤より $k(\ell_B - \ell_A) = (\mu_s - \mu_k)N = (\mu_s - \mu_k)\, mg\cos\theta$

$\therefore \ell = \ell_B - \ell_A = \dfrac{(\mu_s - \mu_k)\, mg\cos\theta}{k}$

また，単振動のエネルギー保存則より

$\dfrac{1}{2}mV_0{}^2 + \dfrac{1}{2}k\ell^2 = \dfrac{1}{2}kA_2{}^2 = \dfrac{1}{2}mV_2{}^2$ $\therefore A_2 = \sqrt{\ell^2 + \dfrac{mV_0{}^2}{k}}$ ， $V_2 = \sqrt{V_0{}^2 + \dfrac{k\ell^2}{m}}$

【２】

イ：ゴムの弾性定数は $k = \dfrac{12mg}{\ell}$ なので，エネルギー保存則より $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{12mg}{\ell}\cdot(x-\ell)^2 = mgx$

$6x^2 - 13\ell\cdot x + 6\ell^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 3\ell)(3x - 2\ell) = 0$ $x > \ell$ なので，$x = \dfrac{3}{2}\ell$

ロ：最下端におけるゴムひもの伸びは $\dfrac{1}{2}\ell$ なので，復元力は $\dfrac{12mg}{\ell} \times \dfrac{1}{2}\ell = 6mg$

ハ：力学的エネルギー保存則より $\dfrac{1}{2}mv^2 = mg\ell$ $\therefore v = \sqrt{2g\ell}$

ホ：小球 A と小球 B が時刻 t 後に天井から x' の位置で衝突したとすると，小球 A が上昇した距離と小球 B が落下した距離の和が ℓ であるから，

B について $x' = \dfrac{1}{2}gt^2$ ，A について $\ell - x' = -\dfrac{1}{2}gt^2 + vt$

よって，$vt = \ell$ なので，$t = \dfrac{\ell}{v} = \dfrac{\ell}{\sqrt{2g\ell}} = \sqrt{\dfrac{\ell}{2g}}$

ニ：$x' = \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2}g\left(\sqrt{\dfrac{\ell}{2g}}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\ell$

ヘ：衝突直前の小球 A の上向きの速さを v_A，小球 B の下向きの速さを v_B とすると，

$v_A = -gt + v = \sqrt{\dfrac{g\ell}{2}}$ ，$v_B = \sqrt{\dfrac{g\ell}{2}}$

衝突直後の一体となった小球の下向きの速さを v' とすると，運動量保存則より

$2mv' = mv_B - mv_A = 0 \qquad \therefore v' = 0$

よって，ひとつとなった小球は初速度 0 で自由落下する。床までの距離は $2\ell - \dfrac{1}{4}\ell = \dfrac{7}{4}\ell$

衝突してから床に落下するまでの時間を t' とすると，$\dfrac{1}{2}gt'^2 = \dfrac{7}{4}\ell \qquad \therefore t' = \sqrt{\dfrac{7\ell}{2g}}$

（2）

ト：小球 A と小球 B の重心からみると，小球 A，B には長さ$\dfrac{\ell}{2}$ のゴムひもがついている

ように見える。このゴムひもの弾性定数は $2k$ となるから，$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = \pi\sqrt{\dfrac{\ell}{6g}}$

ゴムひもが自然長に戻るまでの時間$\dfrac{T}{4} = \dfrac{\pi}{4}\sqrt{\dfrac{\ell}{6g}}$

チ：重心から見たときの小球 A，B のゴムひもの伸びは$\dfrac{\frac{3}{2}\ell - \ell}{2} = \dfrac{1}{4}\ell$

また，自然長に戻ったときの，重心から見たときの小球 A，B の速さを v''とすると，

力学的エネルギー保存則より$\dfrac{1}{2}mv''^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 2k\cdot\left(\dfrac{1}{4}\ell\right)^2$

$k = \dfrac{12mg}{\ell}$ を代入して解くと $v'' = \sqrt{\dfrac{3g\ell}{2}}$

自然長になってから，さらに t'' 後に小球 A と小球 B が衝突したとすると，
小球 A，B の運動は，重心から見て速さ v'' の等速度運動であるから

$t'' = \dfrac{\ell}{2v''} = \sqrt{\dfrac{\ell}{6g}}$

リ：小球 A，B の重心は小球 B を解放した瞬間から自由落下するから，小球 A と小球 B が衝突するまでの落下距離を x'' とすると，

$x'' = \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{T}{4} + t''\right)^2 = \dfrac{\ell}{12}\left(\dfrac{\pi}{4} + 1\right)^2$

小球 B を解放した瞬間の重心の天井からの距離は，$\dfrac{3}{4}\ell$であるから，衝突する位置の天井

からの距離は$\dfrac{3}{4}\ell + \dfrac{\ell}{12}\left(\dfrac{\pi}{4} + 1\right)^2 = \left\{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{\pi}{4} + 1\right)^2\right\}\ell$

【３】〔Ⅰ〕

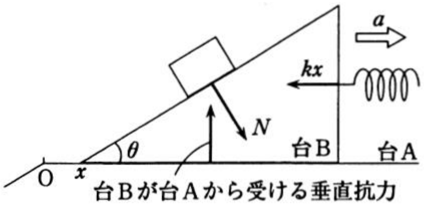
（１）求めるy座標を$y_{\max}$とすると，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgy_{\max} \quad \therefore y_{\max} = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

〔Ⅱ〕（２）小物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさをNとすると，小物体に働く力の斜面に垂直な方向の成分のつりあいより

$$N + ma\sin\theta = mg\cos\theta \qquad \therefore N = m(g\cos\theta - a\sin\theta)$$

（３）台Ａの上にいる観測者から見た台Ｂに働く力は，下図のようになる。



台Ｂはx軸方向(水平方向)に運動するので，台Ｂに働く力のx軸方向の成分に着目すると，台Ｂの運動方程式は$N\sin\theta - kx = Ma$

（２）より$m(g\cos\theta - a\sin\theta)\sin\theta - kx = Ma$

$$\therefore a = \frac{mg\sin\theta\cdot\cos\theta}{M + m\sin^2\theta} - \frac{k}{M + m\sin^2\theta}x$$

したがって$a_0 = \dfrac{mg\sin\theta\cdot\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$，　$b_0 = \dfrac{k}{M + m\sin^2\theta}$

（４）台Ｂの加速度aの式を変形すると$a = a_0 - b_0 x = -b_0\left(x - \frac{a_0}{b_0}\right)$

と表される。$a = 0$の時のx座標が単振動の中心位置を示すので，aの式より，

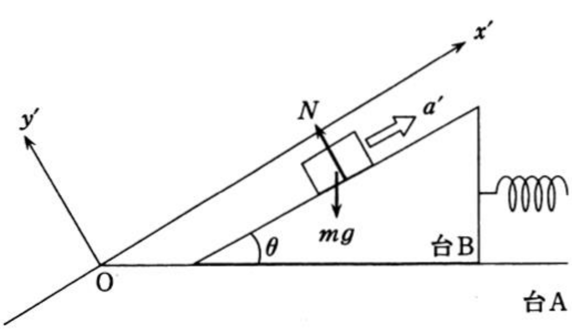
$x = \dfrac{a_0}{b_0}$が振動の中心である。また，$x = 0$が振動の最左端の位置であることから，

この単振動の振幅をAとすると$A = \frac{a_0}{b_0}$

（５）台Ｂの加速度aの式を，この単振動の角振動数ωを用いて表すと，（４）より

$$a = -b_0\left(x - \frac{a_0}{b_0}\right) = \omega^2\left(x - \frac{a_0}{b_0}\right) \quad \therefore \omega = \sqrt{b_0}$$

〔Ⅲ〕（６）台Ａの上にいる観測者から見た小物体に働く力は，下図のようになる。



小物体の加速度をx'軸方向の成分をa'とし，小物体に働く力のx'軸方向の成分に着目すると，小物体のx'軸方向の運動方程式は$ma' = -mg\sin\theta \qquad \therefore a' = -g\sin\theta$

（７）小物体のx'軸方向の運動について，初速度v_0，加速度a'，求める時間をtとすると，等加速度直線運動の式より$0 = v_0 t + \frac{1}{2}a' t^2$

$$0 = t\left(v_0 + \frac{1}{2}at\right) \qquad t > 0 \text{ より} \quad t = -\frac{2v_0}{a'} = \frac{2v_0}{g\sin\theta}$$

（８）台 B の単振動の周期をTとすると　$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

題意を満たすための条件は　$t = nT$

したがって，（７）の結果より

$$\frac{2V}{g\sin\theta} = \frac{2n\pi}{\omega} \qquad \therefore V = \frac{n\pi g\sin\theta}{\omega}$$

＜演習問題＞

【１】

〔Ⅰ〕B 点を原点とし，管の水平部分 BC に沿って，B→C の向きに x 軸をとる。おもりの位置が x のとき，ばねの自然長からの伸びは$\left(x + \frac{l}{4} + \frac{l}{4}\right) - l = x - \frac{l}{2}$ である。

おもりの加速度を a として，運動方程式をつくると

$$ma = -k\left(x - \frac{l}{2}\right) \qquad \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ である。}$$

また，単振動の中心は$x = \frac{l}{2}$ であるが，最初に静止していた位置$x = \frac{3}{4}l$ は振動の一端になるから，振幅は A とすると $A = \frac{3}{4}l - \frac{l}{2} = \frac{l}{4}$ である。

おもり W の B からの距離が最小となるのは振動の他端であり，その距離は

$$\frac{l}{2} - A = \frac{l}{2} - \frac{l}{4} = \frac{l}{4}$$

〔Ⅱ」管を回転させると，おもりには B→C の向きに，遠心力が作用する。ばねの振動が止まるためには，おもりが静止した瞬間，弾性力とつりあう遠心力を加えればよい。おもりが一瞬静止する位置のうち，$x = \frac{l}{4}$ では，弾性力は遠心力と同じ向きになり，力がつりあうことはない。おもりが静止できる位置は$x = \frac{3}{4}l$ だけであり，

弾性力と遠心力のつりあいより $k \times \frac{l}{4} = m \times \frac{3}{4}l \times \omega_1^2 \qquad \therefore \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{3m}}$ となる。

また，$t = 0$ には$x = \frac{3}{4}l$ の位置にあったから，

$$t_1 = nT = 2\pi n\sqrt{\frac{m}{k}}$$ （ただし，n は正の整数）

〔Ⅲ」（１）おもりの運動方程式をつくると $ma = -k(x-l) + mx\omega_2^2$

$\therefore a = -\dfrac{k-m\omega_2^2}{m}x + \dfrac{kl}{m}$ となる。単振動の角振動数をω' とすると

$\omega'^2 = \dfrac{k-m\omega_2^2}{m} = \dfrac{k}{m} - \omega_2^2$　　　$\therefore \omega' = \sqrt{\dfrac{k}{m}-\omega_2^2}$ であるから，

振動数は$\dfrac{\omega'}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}-\omega_2^2}$ となる。振動の中心点を $x = x_0$ とすると，

$a = 0$ となる位置であるから $0 = -\dfrac{k-m\omega_2^2}{m}x_0 + \dfrac{kl}{m}$　　　$\therefore x_0 = \dfrac{kl}{k-m\omega_2^2}$

（２）上から見たおもりの軌跡が管の一回転ごとに全く同じ図形を描くためには，管が一回転する時間が，おもりの単振動の周期の整数倍であればよいから

$\dfrac{2\pi}{\omega_2} = n\dfrac{2\pi}{\omega'}$　　（ただし，n は正の整数）　　$\therefore \omega' = n\omega_2$　となる。

（１）の式を用いて$\sqrt{\dfrac{k}{m}-\omega_2^2} = n\omega_2$ となるので，$\dfrac{k}{m} - \omega_2^2 = n^2\omega_2^2$

$\therefore (n^2+1)\omega_2^2 = \dfrac{k}{m}$ となるから$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{(n^2+1)m}}$　　…①である。

おもりの単振動の振幅を A' とすると，$A' = x_0 - l$ であり，振動中の位置の最大値を $x = X$ とすると $X = x_0 + A' = x_0 + (x_0 - l) = 2x_0 - l = \dfrac{kl}{k-m\omega_2^2} - l = \dfrac{k+m\omega_2^2}{k-m\omega_2^2}\,l$　である。

①を代入して整理すると

$X = \dfrac{k+\dfrac{k}{n^2+1}}{k-\dfrac{k}{n^2+1}}\,l = \dfrac{n^2+2}{n^2}\,l = \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)l$　となる。おもりが管の端 C にぶつかることがないようにするためには $X = \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)l < 2l$　　$\dfrac{2}{n^2} < 1$　$n^2 > 2$　　$\therefore\ n > \sqrt{2}$

となるから，n は 2 以上の整数でなければならない。n が小さいほど X は大きいから，

振幅が最大になるのは $n = 2$ の場合であり $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{(2^2+1)m}} = \sqrt{\dfrac{k}{5m}}$ である。

このとき $X = \left(1+\dfrac{2}{2^2}\right)l = \dfrac{3}{2}l$　となる。

すなわちばねの長さの最大値は自然長 l の$\dfrac{3}{2}$ 倍である。