高 3 物理総合 S～後期第 1 回～ ＜解答＞◆誘導回路①◆

＜予習問題＞

【１】

（１）回路に流れる電流を I_0 [A]として，キルヒホッフの第 2 法則より

$$E_1 - rI_0 - RI_0 = 0 \qquad \therefore I_0 = \frac{E_1}{R+r}$$

よって，導体棒で消費される電力 P [W]は $P = RI_0^2 = R\left(\frac{E_1}{R+r}\right)^2$ [W]

また，電磁力 F [N]は $F = I_0Bd = \frac{E_1}{R+r}Bd$ [N]

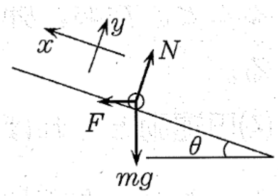
（２）求める起電力を V_1 [V]とすると，コの字型コイルに生じる
誘導起電力の式より $V_1 = v_1Bd$ [V]
また，その向きは，レンツの法則より H→G の向きに電流を流す向きだから，
求める電流を I_1 [A]として，キルヒホッフの第 2 法則より

$$E_1 - v_1Bd - RI_1 - rI_1 = 0 \qquad \therefore I_1 = \frac{E_1 - v_1Bd}{R+r} \ \text{[A]}$$

（３）電流が流れている間は導体棒に電磁力が働き加速されるので，
等速度になったときは $I_1 = 0$[A]

（２）より $I_1 = \frac{E_1 - v_1Bd}{R+r} = 0 \qquad \therefore v_1 = \frac{E_1}{Bd}$ [m/s]

（４）垂直抗力を N [N] ，電磁力を F [N]とすると，導体棒に
働く力は図の通りだから，等速度になったときで，図の
x 方向に運動方程式をたてると



x : $m \times 0 = F\cos\theta - mg\sin\theta$ …①
ここで，流れる電流が i [A]のときの電磁力 F [N]は $F = iBd$ …②

①，②より i を求めて $i = \frac{mg}{Bd}\tan\theta$ [A]

また，求める速さを v_2 [m/s]とすると，生じる誘導起電力 V_2 [V]は，
$V_2 = (v_2\cos\theta) \cdot Bd$ と表せるから，キルヒホッフの第 2 法則より

$$E_2 - (v_2\cos\theta)Bd - Ri - ri = 0 \qquad \therefore v_2 = \frac{E_2 - (R+r)i}{Bd\cos\theta} \ \text{[m/s]}$$

【２】

（１）スイッチ S_1 を閉じた直後に導体棒に流れる電流は $I_0 = \frac{E}{R}$ なので，$F_0 = \frac{EB\ell}{R}$

（２）$V = vB\ell$

（３）導体棒の速度が一定になったことより，導体棒に流れる電流が 0 になったと

考えられる。$E - vB\ell = 0$　　よって，$v = \dfrac{E}{B\ell}$

（4）導体棒が等速度運動をしたことから，時刻 t における導体棒の速度を $v(t)$と

すると，$\dfrac{v(t)}{t} = \dfrac{\frac{E}{B\ell}}{T}$ より $v(t) = \dfrac{E}{B\ell T}t$

（5）時刻 t における抵抗に流れる電流を $I(t)$とすると，$E - v(t)B\ell = RI(t)$より，

$I(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)$

（6）（5）より電流は時刻に対して直線的に変化するので，平均電流は，

$\dfrac{I(0) + I(T)}{2} = \dfrac{E}{2R}$　　よって，電池を流れた総電荷は $q = \dfrac{E}{2R}T$ となるので，

電池がした仕事 w は $w = qE = \dfrac{E^2T}{2R}$

＜別解＞

$$q = \int_0^T I(t)dt = \int_0^T \frac{E}{R}\left(1 - \frac{t}{T}\right)dt = \left[\frac{E}{R}\left(t - \frac{t^2}{2T}\right)\right]_0^T = \frac{E}{R}\left(T - \frac{T}{2}\right) = \frac{ET}{2R}$$

よって，電池がした仕事は，$\dfrac{E^2T}{2R}$

（7）コンデンサーにかかる電圧は $v(t)B\ell = \dfrac{Et}{T}$ なので，蓄えられた電気量を $Q(t)$と

すると，$Q(t) = C \cdot \dfrac{Et}{T} = \dfrac{EC}{T}t$

（8）コンデンサーに流れる電流を $I_C(t)$とすると，$I_C(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt} = \dfrac{CE}{T}$

で一定となる。初め $I(t) > I_C(t)$なので，導体棒に流れる電流が反転するためには，
抵抗を流れる電流 $I(t)$と電流 $I_C(t)$の大小関係が逆転すればよい。
よって，$I(t) = I_C(t)$となる時刻が $0 < t < T$ にあればよい。
つまり，$\dfrac{E}{R}\left(1 - \dfrac{t}{T}\right) = \dfrac{CE}{T}$ より $t = T - CR$ なので，$0 < T - CR < T$ より $CR < T$

（9）時刻 $t = 0$ から $t = T$ までに，手が導体棒にした仕事を W とし，抵抗で発生した
ジュール熱を H とすると，回路のエネルギーの関係式は，

$W + w = \dfrac{1}{2}CE^2 + \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{E}{B\ell}\right)^2 + H$　であり，$W = H$ なので，（6）を代入して，

$\dfrac{E^2T}{2R} = \dfrac{1}{2}CE^2 + \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{E}{B\ell}\right)^2$　　$\therefore T = \left(C + \dfrac{m}{B^2\ell^2}\right)R$

(10) 手をはなす直前に導体棒に流れる電流は，図の下から上の向きに $I_C(t) = \dfrac{CE}{T}$ で

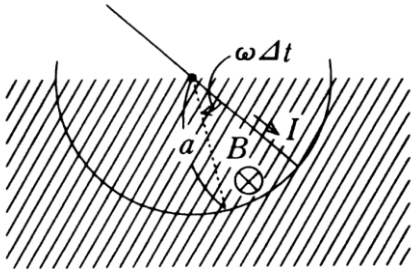
ある。手が導体棒に加える力を F とし，運動方程式を立てると，

$$F-\frac{CE}{T}\,B\ell=m\frac{\frac{E}{B\ell}}{T}\qquad \text{よって } F=\frac{EB\ell}{T}\left(C+\frac{m}{B^2\ell^2}\right)=\frac{EB\ell}{R}$$

＜演習問題＞

【１】

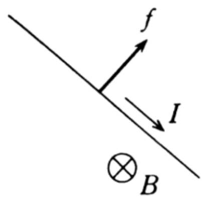
〔Ⅰ〕磁界中を直線状の針金が動くとき（右図），時間Δt の間に描く扇形の中心角は$\omega\Delta t$ であり，



この面積は$\Delta S=\frac{1}{2}a^2\omega\Delta t$ となる。この面積を貫く磁束は$\Delta\Phi=B\Delta S$ であるから，針金に発生する誘導起電力の大きさ

$V=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=B\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2}Ba^2\omega$となる。直径部分を流れる電流の強さ $I=\frac{V}{R}=\frac{Ba^2\omega}{2R}$

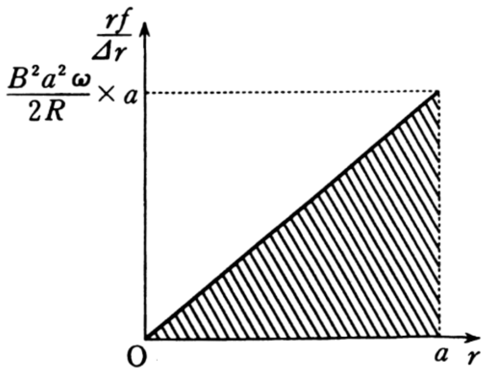
〔Ⅱ〕直線状の針金の，長さΔr の微小部分が磁界から受ける力の大きさは$f=IB\Delta r=\frac{B^2a^2\omega}{2R}\Delta r$



向きは，針金と磁界に⊥で，針金の運動を妨げる向き。

〔Ⅲ〕中心から距離 r の点で，長さΔr の微小部分が磁界から受ける力のモーメントは

$rf=\frac{B^2a^2\omega}{2R}r\Delta r$　である。



直線状の針金が磁界から受ける力のトルクは，右のグラフの斜線部の面積に等しいから，

$\frac{1}{2}\times\frac{B^2a^2\omega}{2R}\times a^2=\frac{B^2a^4\omega}{4R}$

となる。よって，針金を回転させ続けるために外部から与えるトルクの大きさは $N=\frac{B^2a^4\omega}{4R}$

〔Ⅳ〕単位時間当たりに回転する角度は$\omega\times 1=\omega$なので，この間に必要な仕事は，

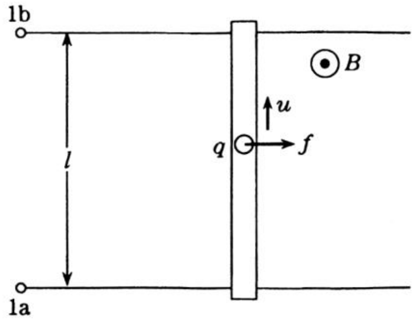
$W=N\times\omega=\frac{B^2a^4\omega^2}{4R}$である。

また，単位時間当たりに消費される電気的エネルギー

$$P=RI^2=R\times\left(\frac{Ba^2\omega}{2R}\right)^2=\frac{B^2a^4\omega^2}{4R}$$

【２】

（１）



イ：電荷は磁界からローレンツ力を右向きに受け，
その大きさ $f = quB$

ロ：電荷が手前側のレールの接点からもう一方のレールの接点に到達するのにかかる時間を t とすると $t = \dfrac{l}{u}$

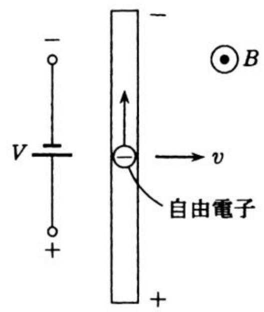
導体棒が荷電粒子を通じて受ける力は f であるから，導体棒がこの間に受ける力積は

$$I = f \cdot t = quB \cdot \frac{l}{u} = qBl$$

ハ：静止している導体棒が速度 v まで加速されるまでに電荷がレール間を移動する回数を n とすると

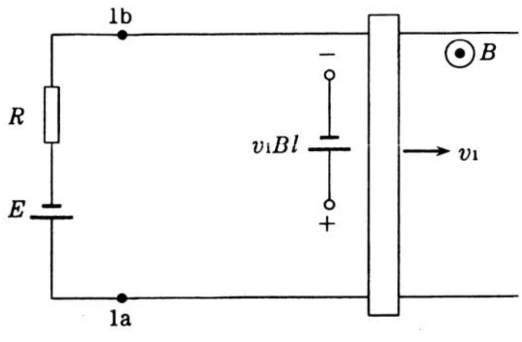
$$n = \frac{mv}{I} = \frac{mv}{qBl}$$ よって，導体棒を流れた電荷の総量は $Q = nq = \dfrac{m}{Bl} \times v$

ニ：長さ l の導体棒が速度 v で磁束密度 B の磁界を横切るときに生じる起電力の大きさは vBl であるが，導体棒中の自由電子の運動から考えると，端子 1a の電位が端子 1b の電位より高いことがわかる。
よって，端子 1a に対する端子 1b の電圧は，



$$V = -vBl = \frac{Q}{-\frac{m}{B^2l^2}}$$

（２）図 2 の状態からスイッチ a を右にたおすと，次図のようになる。



ホ：導体棒の速度 v がしだいに増加し一定値 v_1 になると，導体棒に働く合力は 0 なので，導体棒の加速度もまた 0 であり，電流を i とすると，
$Bil = 0$ より，$i = 0$
よって，抵抗における電圧降下は 0 なので，導体棒に生じている逆起電力の大きさは直流電源の起電力の大きさと等しくなり $v_1Bl = E$ $\therefore v_1 = \dfrac{E}{Bl}$

ホ：導体棒の速度が v のとき逆起電力の大きさは vBl なので，導体棒を流れる電流を i とすると，キルヒホッフの法則から $E - vBl = Ri$ $\therefore i = \dfrac{E - vBl}{R}$

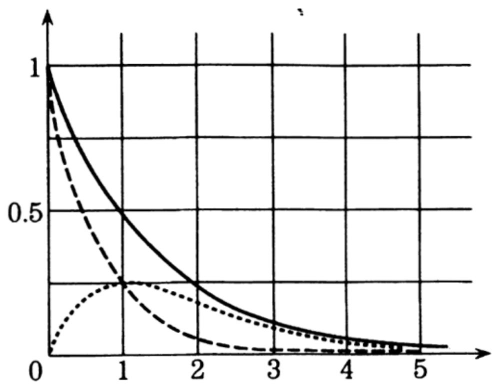
問１　直流電源の仕事率（電力）$P_E = iE = \dfrac{E(E - vBl)}{R} = \dfrac{E^2}{R}\left(1 - \dfrac{Bl}{E}v\right)$

$t = 0$ のときは，$v = 0$ より仕事率 $P_0 = \dfrac{E^2}{R}$

よって，$v_1 = \dfrac{E}{Bl}$ を用いて，$\dfrac{P_E}{P_0} = 1 - \dfrac{v}{v_1}$ （下図実線）

抵抗における消費電力 $P_R = Ri^2 = \dfrac{(E - vBl)^2}{R} = \dfrac{E^2}{R}\left(1 - \dfrac{Bl}{E}v\right)^2 = P_0\left(1 - \dfrac{v}{v_1}\right)^2$

$\therefore \dfrac{P_R}{P_0} = \left(1 - \dfrac{v}{v_1}\right)^2$ （右図破線）



導体棒に働く力は iBl なので，

仕事率 $P_F = iBl \cdot v = \dfrac{(E - vBl)vBl}{R}$

$= \dfrac{E^2}{R}\left(1 - \dfrac{Bl}{E}v\right)\cdot\dfrac{Bl}{E}v = P_0\left(1 - \dfrac{v}{v_1}\right)\dfrac{v}{v_1}$

$\therefore \dfrac{P_F}{P_0} = -\left(\dfrac{v}{v_1} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$ （右図点線）

（３）

チ：回路をコンデンサーにつないだ場合，十分時間が経過した後の導体棒の速度を v_2，

コンデンサーに蓄えられている電荷を Q_2 とすると，ハより $Q_2 = \dfrac{mv_2}{Bl}$

回路に流れる電流は 0 なので，直流電源と導体棒とコンデンサーの電圧の和は 0

である。よって，$E - v_2Bl - \dfrac{Q_2}{C} = 0$

$\therefore \left(Bl + \dfrac{m}{CBl}\right)v_2 = E$　　　よって，$v_2 = \dfrac{CBl}{CB^2l^2 + m}E$

ト：$Q_2 = \dfrac{m}{Bl}v_2 = \dfrac{m}{Bl}\cdot\dfrac{CBl}{CB^2l^2 + m}E = \dfrac{mC}{CB^2l^2 + m}E$