



# 高3 物理総合 S

## 前期

講師：

氏名：

私立中高一貫校対象英語数学個別指導 スタディ・コラボ

## 学習内容

◆第1回 円運動と万有引力◆ .....	5
<重要事項> .....	5
<予習問題> .....	10
◆第2回 コリオリの力◆ .....	17
<予習問題> .....	17
<演習問題> (25分) .....	20
◆第3回 いろいろな単振動①◆ .....	23
<重要事項> .....	23
<予習問題> .....	26
<演習問題> (25分) .....	30
◆第4回 いろいろな単振動②◆ .....	33
<予習問題> .....	33
<演習問題> (25分) .....	37
◆第5回 分子運動論◆ .....	41
<重要事項> .....	41
<予習問題> .....	42
<演習問題> (25分) .....	51
◆第6回 熱力学総論①◆ .....	55
<重要事項> .....	55
<予習問題> .....	58
<演習問題> (25分) .....	63
◆第7回 熱力学総論②◆ .....	65
<予習問題> .....	65
<演習問題> (25分) .....	71

◆第 8 回 波動方程式◆	73
<重要事項>	73
<予習問題>	74
<演習問題> (25分)	77
◆第 9 回 単スリット回折・Nスリット回折①◆	81
<重要事項>	81
<予習問題>	83
◆第 10 回 単スリット回折・Nスリット回折②◆	87
<予習問題>	87
<演習問題> (20分)	96
◆第 11 回 ドップラー効果◆	101
<重要事項>	101
<予習問題>	103
<演習問題> (25分)	107
◆第 12 回 フェルマーの原理とレンズ◆	109
<重要事項>	109
<予習問題>	114
<演習問題> (25分)	120

## ❶ 学習方法について

最難関大学を目指す生徒にとっての、理科の学習は、できる限り実践に近い形で、できる限り多くの問題に触れることです。物理においては、数学と同様復習が鍵を握ります。“なぜその解き方なのか。”ということ意識しながら、日々復習に励んでください。

コラボのテキストは、基礎レベルからハイレベルな内容まで盛り込んでいます。「学力は復習（回数）に宿る」を肝に銘じて、学習した全てが血肉となるまで、徹底した復習をしてください。

## ❷ 授業欠席のフォローに関して

平常授業を欠席する場合は、担当講師または事務局まで、事前に連絡をしてください。

連絡の上欠席した場合は、下記の要領にてフォローをします。

集団個別指導	担当講師と相談の上、フォローします。担当講師の空き時間等を利用して授業内容のフォローをします。*解説が中心です。
--------	----------------------------------------------------------

\*個別指導と異なり、振替授業はありません。

## 重要 テキストの使用方法”予習”と”復習”

本テキストは、難解な入試問題への対応力を養成するため、難問～超難問レベルの入試問題で構成されています。以下に、予習と復習のポイントを挙げておきます。テキストを効果的に使用するために、熟読しておいてください。

予習用問題：授業前に予習が必要です。1題 25～40分を目安にノートに解答しましょう。

問題に取り組むにあたっては、以下の点に注意してください。

- ①予習の前にテキストや問題集で基本事項の復習をしておくこと
- ②解答の際ノートに図を書き直すこと
- ③該当単元の公式は答えられるようにしておくこと

演習問題：予習用問題の解説後、授業時間内で演習します。

復習：間違った問題だけでなく、解答根拠が曖昧だった問題をすべて再確認してください。確認の回数を増やすことで論理的思考の強化をしましょう。

第1段階 \*授業後3日以内

基本事項の復習と、間違えた問題・解答根拠が曖昧だった問題の解き直し

第2段階 \*授業後1週間以内

間違えた問題・解答根拠が曖昧だった問題の解き直し

第3段階 \*授業後1カ月以内

間違えた問題・解答根拠が曖昧だった問題の解き直し

第4段階 \*直前期

<NOTE>

## ◆第1回 円運動と万有引力◆

### <重要事項>

#### ■等速円運動■

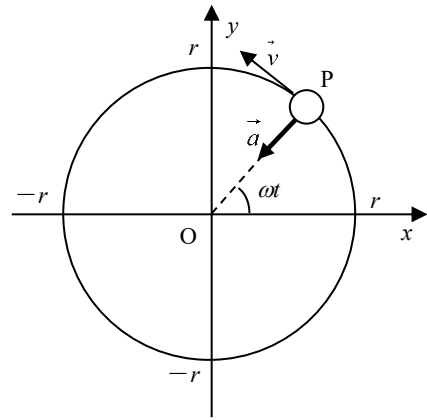
動点 P が半径  $r$  の円周上を動くとき  
時刻  $t$  において動点 P が位置  $(x, y) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$   
とすると、(角速度  $\omega$  [rad/s] : 1 秒あたりの回転角)

・速度  $\vec{v} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$

$\Rightarrow v = r\omega$  [m/s] (接線方向)

・加速度  $\vec{a} = \left( \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = (-r\omega^2 \cos \omega t, -r\omega^2 \sin \omega t)$

$\Rightarrow a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$  [m/s<sup>2</sup>] (中心方向)



・周期  $T$  [s] =  $\frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$  : 1 回転の時間

・回転数  $n$  [1/s=Hz]  $\frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\omega}{2\pi}$  : 1 秒間の回転数

○慣性系の場合

運動方程式で考える。

$F = ma = m r \omega^2 = m \frac{v^2}{r}$  : 向心力 (中心方向に向かう力)

○非慣性系の場合

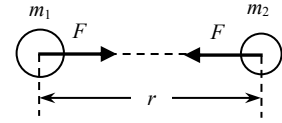
遠心力 (慣性力)  $m r \omega^2$  または  $m \frac{v^2}{r}$  (中心方向と逆向きの力) を考慮した力のつりあいの式を考える。

## ■万有引力■

### ○万有引力の法則

2つの物体が及ぼしあう万有引力の大きさ  $F$  [N] は、2物体の質量  $m_1$ 、 $m_2$  の積に比例し、物体間の距離  $r$  [m] の2乗に反比例する。

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ [N]} \quad (\text{万有引力定数 } G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2)$$

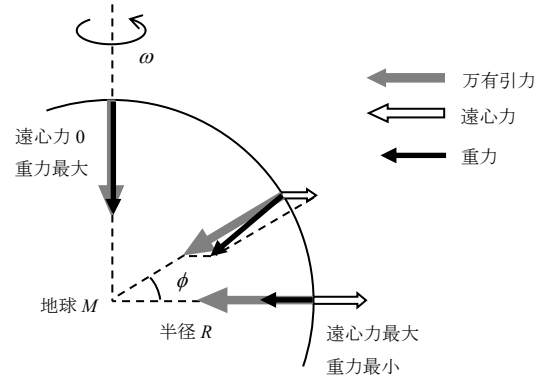


### ○重力

地球の全質量  $M$  [kg] が中心にあり、半径  $R$  [m] の完全な球と仮定し、その自転の角速度を  $\omega$  [rad/s] とする。

このとき、緯度  $\phi$  [rad] の地表にある質量  $m$  [kg] の物体にはたらく力は

万有引力  $G \frac{Mm}{R^2}$  [N] と地球の自転による



遠心力  $mR \cos \phi \cdot \omega^2$  [N] の合力である。

しかし、遠心力が最大となる赤道上 ( $\cos \phi = 1$ ) でも万有引力の  $\frac{1}{300}$  倍ほどしかなく、

とくに断りのないかぎり、遠心力は無視してよい。

よって、重力加速度の大きさを  $g$  とすると、

$$\text{地表面では } mg = G \frac{Mm}{R^2} \text{ より } \underline{GM = gR^2}$$

地表面から高さ  $h$  [m] での重力加速度  $g_h$  とすると、 $GM = g_h (R + h)^2$

### ○万有引力による位置エネルギー

$$U = \int_{\infty}^r G \frac{m_1 m_2}{x^2} dx = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (\text{基準点は無限遠})$$

※第一宇宙速度：地表すれすれに地球のまわりを等速円運動することができる速さ

$$mg = m \frac{v_1^2}{R} \text{ より } v_1 = \sqrt{gR}$$

第二宇宙速度：地上から打ち上げた物体が、無限の遠方へ行ってしまふ最小の初速度 (脱出速度)

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + \left( -G \frac{Mm}{R} \right) = 0 \text{ より } v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}$$

○ケプラーの法則

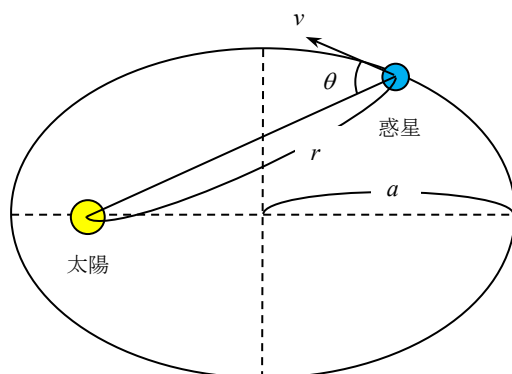
第一法則 惑星は太陽を1つの焦点とする楕円上を運動する。

第二法則 惑星と太陽とを結ぶ線分が、一定時間に通過する面積は一定である。

**面積速度一定の法則**： $\frac{1}{2}rv\sin\theta = \text{一定}$  (惑星ごとに異なる一定値)

第三法則 惑星の公転周期 $T$ の2乗は、軌道楕円の半長軸 $a$ の3乗に比例する。

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{一定} \quad (\text{惑星によらない一定値})$$



○よくある解法

(i) 円運動のとき

- ① 向心力 = 万有引力の運動方程式をたてる。
- ②  $GM = gR^2$  を用いる。

(ii) 楕円軌道のとき

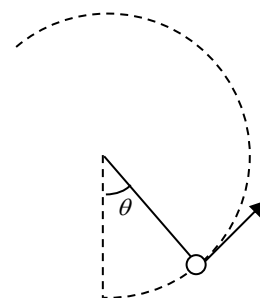
- ① 面積速度一定  $\frac{1}{2}r_1v_1\sin\theta_1 = \frac{1}{2}r_2v_2\sin\theta_2$
- ② 力学的エネルギー保存則
- ③  $\frac{T^2}{a^3} = \text{一定}$



< 必須典型問題 1 >

長さ  $r$  の糸に質量  $m$  の物体  $P$  を取り付け、最下点で初速  $v_0$  を与えて回した。

- (1)  $P$  が一回転するための  $v_0$  の条件を求めよ。  
(2)  $\theta = 120^\circ$  で糸がゆるんだ。  $v_0$  はいくらか。



【解答】 (1)  $v_0 \geq \sqrt{5gr}$     (2)  $v_0 = \sqrt{\frac{7}{2}gr}$

< 必須典型問題 2 >

次の問いに答えよ。

- (1) 地球の半径を  $R$ 、地球の質量を  $M$ 、万有引力定数を  $G$  とするとき、地上  $h$  の高さで地球のまわりを等速円運動する人工衛星の速さはいくらか。  
(2) 地球の半径を  $R$ 、地表面の重力加速度の大きさを  $g$  とするとき、地上  $h$  の点を通り地球のまわりを等速円運動する人工衛星の速さはいくらか。ただし、地球の自転の影響を無視する。

【解答】 (1)  $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$     (2)  $v = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$

< 必須典型問題 3 >

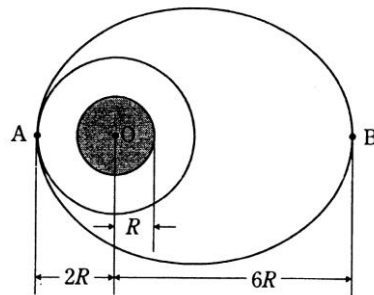
質量  $M$ 、半径  $R$  の地球の表面から鉛直に、初速度  $v_0$  で質量  $m$  の物体を打ち上げる時、万有引力定数を  $G$  とし、地球の自転および空気の抵抗を考慮しないものとして、次の問いに答えよ。

- (1) この物体は地表からいくらかの高さまで上がるか。ただし、 $v_0$  は大きく、重力加速度が一定とはみなされないところまで上昇するものとする。  
(2) 物体が地球から飛び去ってしまうために必要な初速度を求めよ。

【解答】 (1)  $h = \frac{v_0^2 R^2}{2GM - v_0^2 R}$     (2)  $v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

< 必須典型問題 4 >

地球の半径を  $R$ 、質量を  $M$ 、地表での重力加速度の大きさを  $g$  とする。いま、地表からの高さ  $R$  のところを円軌道を描いてまわる質量  $m$  の人工衛星があると



(1) 人工衛星の速さ  $v_0$  を求めよ。

(2) 人工衛星の周期  $T_0$  を求めよ。

軌道上の点 A で人工衛星を加速し、速さを  $v_1$  にしたところ、図の点 A が近地点、点 B が遠地点となるだ円軌道に移り、 $OB = 6R$ 、点 B での速さは  $v_2$  となった。

(3) 点 A および点 B について力学的エネルギー保存則を表す式をたてよ。

(4)  $v_2$  を  $v_1$  で表せ。

(5)  $v_1$  および  $v_2$  を求めよ。

(6) 新しい軌道をまわる人工衛星の周期  $T$  を求めよ。

【解答】 (1)  $v_0 = \sqrt{\frac{gR}{2}}$       (2)  $T_0 = 4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$       (3)  $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{mgR}{2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{mgR}{6}$

(4)  $v_2 = \frac{1}{3}v_1$       (5)  $v_1 = \frac{\sqrt{3gR}}{2}$ ,  $v_2 = \frac{\sqrt{3gR}}{6}$       (6)  $T = 16\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

### <予習問題>

【1】図1のように曲面  $S$  は2つの水平面によって切り取られた円錐側面の一部である。

この面の内側に沿って運動する質量  $m$  の質点を考える。円錐の頂角は  $2\alpha$  であり、円錐の軸は鉛直方向であるとする。頂点  $O$  を原点にとり、水平面内に  $x$  軸と  $y$  軸を、鉛直上向きに  $z$  軸をとる。 $S$  の下端の  $z$  座標は  $z_1$ 、上端の  $z$  座標は  $z_2$  であり、その範囲を超えると質点は自由に運動できる。 $S$  と質点の間の摩擦は無視できるとし、重力加速度を  $g$  として以下の設問に答えよ。

〔I〕質点が  $z = z_0$  ( $z_1 < z_0 < z_2$ ) の水平面内を等速円運動している。水平面内の等速円運動の運動方程式と鉛直方向の運動方程式とをそれぞれ書け。ただし、等速円運動の角速度を  $\omega$ 、質点が  $S$  から受ける抗力の大きさを  $N$  とする。また、ここから  $\omega$  と  $N$  を求めよ。

〔II〕質点が水平面内を運動していない場合であっても、質点に働く力のベクトルを考えると、その水平成分はつねに円錐の軸に向かっている。このため、質点を  $xy$  平面に投影してできる点の運動について、太陽のまわりを回る惑星の運動と同様に面積速度一定の法則が成り立つ。この性質を利用して、 $S$  の下端の円上の点  $Q$  から速さ  $u$  で円周に沿って打ち出された質点の運動を考える。

(1) 質点を  $xy$  平面に投影してできる点の面積速度を求めよ。

(2) 質点が  $S$  から外に飛び出すことなく運動し続けるためには  $u$  はどのような範囲になければならないかを答えよ。

(3) 速度が前問の条件を満たさず、図1に示すように上端のある点  $R$  から質点が飛び出すとする。飛び出す瞬間の速度ベクトルと、 $R$  における円の接線がなす角を  $\theta$  とする。速度ベクトルは  $R$  における円の接線と線分  $OR$  とを含む平面内にあることに注意して  $\cos \theta$  を求めよ。

(4) 前問で上端から飛び出したあとに到達するもっとも高い点の  $z$  座標を求めよ。

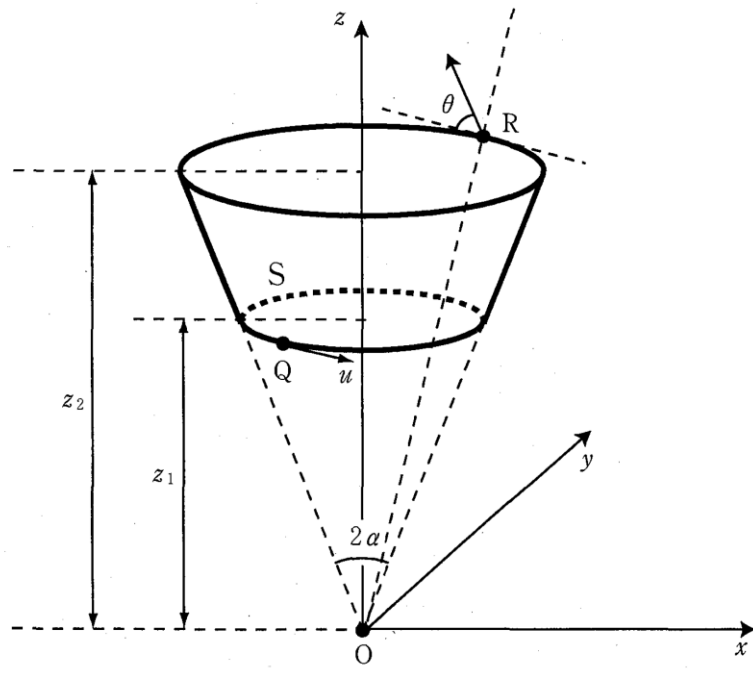
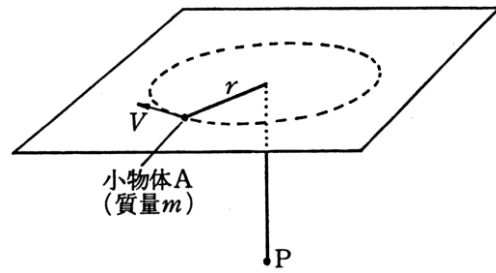


図 1

(2007年 東京大一後期)

【2】次の文を読んで、に適した式を、  
また {  } 中の語句の正しいものの  
番号を、それぞれの解答欄に記入せよ。  
計算においては、絶対値が1に比べて十分



小さい量  $\varepsilon$  に対して  $\frac{1}{1+\varepsilon} \doteq 1-\varepsilon$ ,

$(1+\varepsilon)^2 \doteq 1+2\varepsilon$  の近似を使うことができるものとする。

(1) 図のように質量が  $m$  で大きさの無視できる小物体 A が、質量の無視できるひもでつながれて、水平におかれた板の上を半径  $r$  で等速円運動している。ひもは、大きさの無視できる穴を通して鉛直下方に引かれ、ひもの端点 P ははじめ固定されている。小物体 A と板の間の摩擦、ひもと板、ひもと穴の間の摩擦、および空気抵抗は無いものとする。

円運動をしている小物体 A の、円周方向の速さを  $V$  とすると、ひもの張力  $T$  は  $T = \text{イ}$  で与えられる。いま、このひもの端点 P をゆっくりと  $\Delta r$  だけ引き、小物体 A が半径  $r - \Delta r$  の等速円運動に移る過程を考える。ここで  $\Delta r$  は  $r$  に比べて十分小さい正の量とする。この過程において、小物体 A の得るエネルギーは  $T \times \Delta r$  とみなすことができる。このエネルギーは小物体 A の運動エネルギー  $E = \frac{mV^2}{2}$  の

増分  $\Delta E$  に外ならない。そこで  $\Delta E$  と  $E$  の比を、 $r$  と  $\Delta r$  を用いて表すと  $\frac{\Delta E}{E} = \text{ロ}$  となる。

この過程において、円運動をしている小物体 A の速さが  $V$  から  $V + \Delta V$  に変わったとすると、運動エネルギーは  $\frac{m(V + \Delta V)^2}{2}$  となる。ここで  $\frac{\Delta V}{V}$  は1に比べて十分

小さい量と考えられるので、 $\left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2$  の項を無視できるとすると、運動エネルギー  $E$  の増分  $\Delta E$  は  $\text{ハ}$   $\times \Delta V$  である。したがって速さの変化  $\Delta V$  は、 $V$ 、 $r$ 、 $\Delta r$  を用いて  $\Delta V = \text{ニ}$   $\times \Delta r$  となる。 $r$  と  $V$  が変化することにより、小物体 A の回転の角速度

$\omega = \frac{V}{r}$  も  $\omega + \Delta\omega$  に変化する。 $\frac{\Delta r}{r}$ 、 $\frac{\Delta V}{V}$  が1に比べて十分小さいことを考慮して、

はじめに述べた近似式を用い、 $\frac{\Delta\omega}{\omega}$  を  $V$  と  $r$  を用いて表すと  $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \text{ホ}$  となる。

$\text{ロ}$  と  $\text{ホ}$  を導く過程から、 $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta\omega}{\omega}$  が成り立っていることがわかる。

したがって  $\frac{\omega + \Delta\omega}{E + \Delta E}$  は、 $E$  と  $\omega$  を用いて  $\text{ヘ}$  と表すことができる。ゆえに、

この過程で小物体 A の運動エネルギー  $E$  および角速度  $\omega$  は共に増加し、 $\frac{\omega}{E}$  は

{ト：① 増加する。 ② 一定である。 ③ 減少する。}

(2) 次に、最初の状態で張力  $T$  にちょうどつりあう力を与える質量  $M$  のおもり  $B$  を、端点  $P$  にとりつけ、おもり  $B$  は静止しているとする。重力加速度を  $g$  とすると、このとき小物体  $A$  の回転半径  $r$  は  $m, M, g, V$  を用いて、 $r = \boxed{\text{チ}} \times V^2$  と表される。おもり  $B$  を手で静止位置から  $\Delta r$  だけゆっくりと鉛直下方に下げた後、静かに離すと、おもり  $B$  にはもとの静止位置に向けて上向きに大きさ  $F$  の力が働く。 $\Delta r$  が  $r$  に比べて十分小さいとして  $\Delta r$  に比例する項だけを考え、 $F = k \times \Delta r$  としよう。 $k$  は  $M, g, r$  を用いて表すと  $\boxed{\text{リ}}$  となる。よって  $\Delta r$  の移動に対してこのおもりに働く力は、ばねの弾性力に類似していることがわかる。このおもり  $B$  はもとの静止位置を中心に上下に振動する。おもり  $B$  の運動は小物体  $A$  の回転運動に比べて非常にゆっくりしているとする。このおもり  $B$  の上下振動の振動数  $f$  を  $k$  と  $M$  で表すと  $f = \boxed{\text{ヌ}}$  となる。

(1990年 京都大)

【3】次の文章を読んで、に適した式を、それぞれの解答欄に記入せよ。なお、は、すでにで与えられたものと同じ式を表す。また、問1、問2では、指示にしたがって、解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

以下の設問では、地球は半径  $R$  の球であり、密度は一様に分布していると考えてよい。また、地球の質量を  $M$ 、万有引力定数を  $G$  とし、地球の自転の影響、摩擦、および空気の抵抗は無いものとする。

- (1) 図1のように、地球の中心  $O$  を通って直線状に掘られたトンネルを考える。トンネルは十分に細く、トンネルを掘ったことによる質量の変化は無視できるものとする。トンネル内の任意の1点  $P$  ( $OP=r$ ) で質量  $m$  の質点に働く重力は、 $O$  を中心とした半径  $r$  の球の質量が中心  $O$  に集まったとして、それと質点との間の万有引力に等しく、半径  $r$  の球の外側の部分は、この点での重力には無関係であることが知られている。したがって、トンネル内の1点  $P$  において質点に働く重力の大きさは、 $m$ 、 $M$ 、 $R$ 、 $r$ 、 $G$  を使って ア と表すことができる。この力による質点の運動は単振動であり、その周期は イ で与えられる。

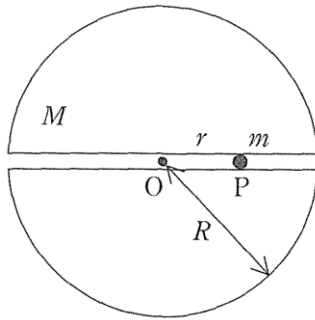


図1

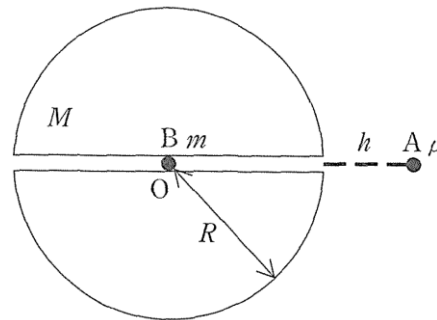


図2

- (2) 次に、図2のように、トンネルを通る直線にそって、地表からの高さが  $h$  の点に質量  $\mu$  の質点  $A$  を静かに置き、静止した状態からトンネルに落下させ、中心  $O$  に静止している質量  $m$  の質点  $B$  に衝突させる。質点  $A$  がトンネルに入る瞬間の速さは ウ で、中心  $O$  に到達する直前の速さは エ である。衝突は弾性衝突であるとすると、衝突直後の質点  $A$  の速さは オ、質点  $B$  の速さは カ となる。衝突後、質点  $B$  は反対側の地表に達した。

問1  $h=0$  とした場合に、この後質点  $B$  が無限の遠方に飛び去るために必要な  $\frac{\mu}{m}$  の値の範囲を求めよ。導出の過程もあわせて示せ。

- (3) 今度は、図3のように、地球の中心  $O$  から  $\frac{R}{2}$  だけ離れたところを通る直線状の細いトンネルを掘った。中心  $O$  からの距離が  $r$  で、トンネルの中心  $O'$  から  $x$  だけ離れたトンネル内の  $P$  点にある質量  $m$  の質点に働く重力の大きさは ア なので、その質点に働くトンネルにそった方向の力の大きさは、 $m$ 、 $M$ 、 $R$ 、 $x$ 、 $G$  を使って キ で与えられる。したがって、地表で静止した状態からトンネルを通過して反対側の地表に出るまでにかかる時間は ク である。

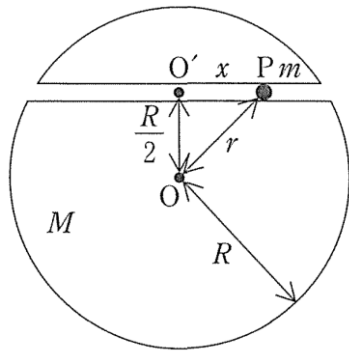


図 3

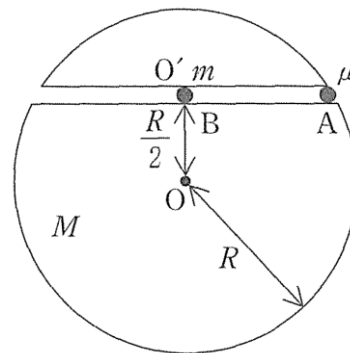


図 4

(4) 次に、図 4 のように、質量  $\mu$  の質点 A をトンネルの端点に静かに置き、静止した状態からトンネルに落とし、トンネルの中心  $O'$  に静止している質量  $m$  の質点 B に衝突させた。衝突は弾性衝突であるとする、質点 B が反対側の地表に達するための条件は  $\mu \geq$   ケ  で与えられる。また、質点 B が地表から飛び出した後、再び地表にもどってくるための条件は  $\mu <$   コ  となる。

問 2 地表から飛び出した瞬間の質点 B の運動エネルギーが、そのときの

位置エネルギーの大きさ  $\frac{GMm}{R}$  の半分である場合を考える。地表を飛び出した後の

質点 B の運動では、面積速度が一定となる。質点 B が地球から最も離れた地点に達したときの中心 O からの距離を求めよ。導出の過程もあわせて示せ。

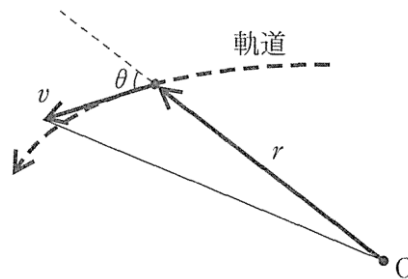


図 5

なお、図 5 のように質点が地球の中心 O から距離  $r$  の位置を速さ  $v$  で運動している場合、その面積速度は  $\frac{1}{2}rv\sin\theta$  で与えられる。ただし、 $\theta$  は地球の中心 O から軌道上の質点に向かう方向と速度のなす角度である。

(2013 年 京大)



<NOTE>

## ◆第2回 コリオリの力◆

### <予習問題>

【1】下の文章の空欄に適切な言葉または数式を入れて完成せよ。ただし、重力加速度の大きさを  $g$  とし、人の身長および空気は無視してよい。また、記号は問題中に与えられているものだけを使用せよ。

静止している半径  $R$  の円板の中心に立つ人 A が、水平方向と  $45^\circ$  をなす斜め上方に質量  $m$  の球を投げて、円板の端の点にのせてある質量  $M$  の標的に命中させようとしている。そのためには、球に与える初速度  $v_0$  は  であればよく、球が標的まで到達するのに要する時間はその場合  である。

次にこの円板を上から見て時計の針と反対方向に、一定の角速度  $\omega$  で回転させる。

この場合、標的は円板上の 1 点にのったまますべり落ちないものとする。

そのためには、円板と標的との間の静止摩擦係数を  $\mu$  とすれば、角速度  $\omega$  は  をこえることはできない。

A は円板とともに回転しているので、A には標的が回転していることは認識できないから、球を標的に命中させるためには、やはり初速度  で投げるはずである。

一方地上に立つ人がこれを見ると、A によって投げられた球は、その慣性によって水平方向には等速度  で運動する。ところがその球が円板の端に到達する間に標的は角度  だけ回転し、距離  だけ円周に沿って移動しているので、球は標的に命中しない。A から見れば、これは標的が移動したのではなく、球が距離  だけ  の方にカーブしたように見える。

A から見た球のカーブが水平方向の加速度によって生じたものと考えると、 $\mu$  が 1 にくらべて十分小さい場合、その加速度の大きさは  である。

したがって、観測者 A は円板の半径に  で  の方に、大きさ  の力が球にはたらいていると考えるだろう。この見かけの力がコリオリの力とよばれるものである。台風の中心に雨雲がうず状にふきこむのは、地球の  によるこの力のためである。

(北海道大)

【2】図1のように胴体部の長さが $2l$ [m]で質量が $M$ [kg]の宇宙ステーションが、常に底部を地球の中心に向けてるようにして円軌道を描いているとする。質量 $M$ は胴体部の中心に集中しているとし、回転軌道の半径(地球の中心から胴体部の中心までの距離)は $2R$ [m]である。ただし $R$ は地球の半径で、地球は密度が一様な球とする。宇宙ステーションには人が乗っているが、その質量 $m$ [kg]は宇宙ステーションの質量 $M$ に対して無視できるほど小さいとする。このとき以下の問いに答えよ。以下の考察では大気による抵抗は無視せよ。

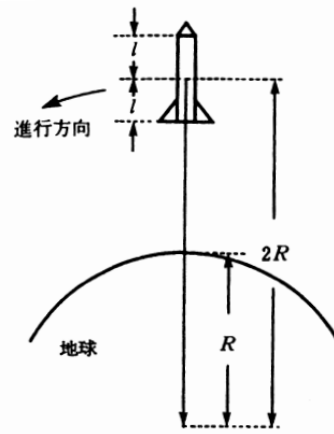


図 1

(1) 宇宙ステーションの速度の大きさ $v$ [m/s]を地表での重力加速度 $g$ [m/s<sup>2</sup>]と $R$ を用いて表せ。なお万有引力定数を $G$  [N · m<sup>2</sup> / kg<sup>2</sup>]、地球の質量を $M_E$  [kg]と

すると、 $g = \frac{GM_E}{R^2}$ である。

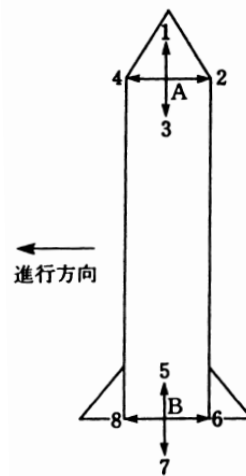


図 2

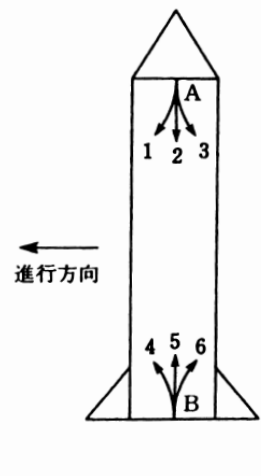


図 3

(2) 地球の半径 $R$ を $6.4 \times 10^6$ m、地表での重力加速度 $g$ を $9.8$ m/s<sup>2</sup>として速度の大きさ $v$ を有効数字2桁で求めよ。

(3) 宇宙ステーションの中でも場所によっては完全な無重力状態にはならない。図2の点Aおよび点Bにいる質量 $m$ の人が受ける力をそれぞれ $\vec{F}_A$ [N]と、 $\vec{F}_B$ [N]とするとき、 $\vec{F}_A$ と $\vec{F}_B$ を求めよ。ただし力の方向は図2の中から選び番号で答え、また、力の大きさは $m$ 、 $l$ 、 $R$ および $g$ を用いて表せ。今 $l \ll R$ とし、必要ならば $(1+x)^a \doteq 1+ax$ (ただし $|x| \ll 1$ )を使ってよい。なお、宇宙ステーションは地球に対する姿勢を変えないので、中の任意の点で回転の角速度が同じであることに注意せよ。

(4) 図3で点Aと点Bにいる人がそれぞれ点Bと点Aに向けてボールを投げた。この時の宇宙ステーションに対するボールの動きを図3の中から選び番号で答えよ。

(5) 上述の(4)に対してなぜそうなるのか、その理由を40字以内で答えよ。

(1996年 大阪大)

【3】図1のように、無重力の宇宙空間に半径  $R$  の巨大な円筒形の密閉容器

(宇宙ステーション) が浮かんでいる。この内壁上で地球上と同じような生活を実現させるために、宇宙ステーションを円筒の中心軸の回りに一定の角速度  $\omega$  で回転させ、重力に相当する力を人工的に作り出す。円筒の内壁上には観測者 S、円筒の外には静止している観測者 T がいるとして、以下の設問に答えよ。なおここでは図1に描かれた面内で起こる運動のみを考える。また、観測者 S から見て内壁に沿う図1中の矢印方向を  $+x$  方向とせよ。

〔I〕円筒の内壁上に立っている観測者 S がバネを持ち、物体 A をつり下げるとバネは  $L$  だけ伸びた。

(1) 観測者 S がそのまま内壁に対して一定の速さ  $v$  ( $> 0$ ) で  $+x$  方向に運動したとき、バネの伸びはいくらになるか。

(2) 観測者 S が物体 A をつるしたバネを持ち、内壁に垂直に立てたはしご (図1) を  $\frac{R}{2}$  の高さまで登ったときのバネの伸びはいくらか。

(3) 地球上で同じバネに同じ物体 A をつるすと、バネは同じく  $L$  だけ伸びた。宇宙ステーションの角速度  $\omega$  を地球上の重力加速度  $g$  を用いて表せ。

〔II〕円筒の内壁に固定され回転の中心 O に向いている打ち上げ装置 (図1) を使い、ボールを打ち上げ装置に対して速さ  $u$  で打ち上げた。

(1) 観測者 T が見るとこのボールはどのような運動をするか。理由をつけて答えよ。また、観測者 T から見たボールの初速度の大きさを  $\omega$ ,  $R$ ,  $u$  で表せ。

(2) このボールが打ち上げられてから宇宙ステーションの内壁に衝突するまでの時間  $t_1$  を求めよ。

(3) 打ち上げ装置から見て、このボールは内壁上のどの地点に落下するか。「同じ場所」、「 $+x$  方向に離れた場所」、「 $-x$  方向に離れた場所」、「これだけではわからない」の中から選び、そう判断した理由を述べよ。

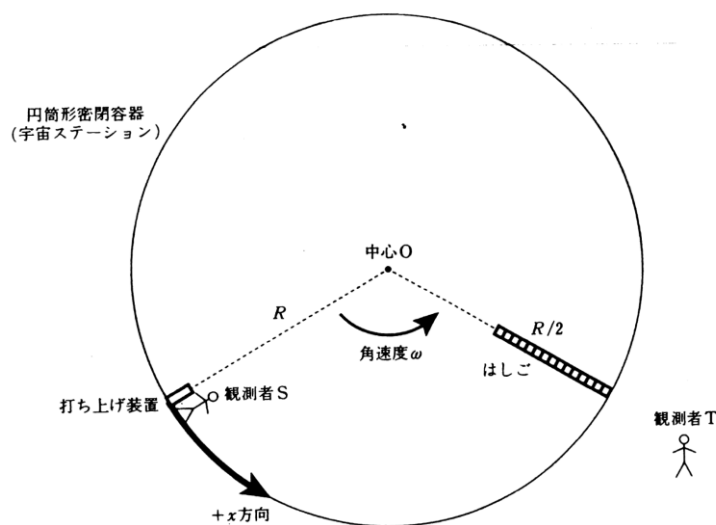


図 1

(実際の観測者や打ち上げ装置の大きさは、半径  $R$  に比べて十分に小さい。)

(1998年 東京大)

<演習問題> (25分)

【1】図1および図2に示すように、一定の角速度で左回りに回転することができる

円盤(半径  $R$ ) が、静止した地上に水平に置かれている。その中心  $O$  から距離  $\frac{R}{2}$  の

円盤上の位置を、図1では地点  $A$ 、図2では地点  $B$  とする。このとき、以下の設問に答えよ。

(1) 図1の拡大図に示すように、地点  $A$  に円筒状の容器を円盤の半径の向きに固定した。この容器の内部に質量を無視できるバネを設置し、その一端を容器に固定し他端に質量  $m$  の小球をつないだ。この容器のため小球は円盤の半径の方向にのみ動くことができる。角速度  $\omega$  で円盤を回転させたとき、バネは自然長から  $L_1$  だけ伸びてつりあった。ここで、バネの長さおよび小球の大きさは円盤の半径に比べて十分に小さく、また、容器内壁と小球の間の摩擦は無視できるとする。

- (a) このバネのバネ定数  $k$  を求めよ。  
(b) 角速度を  $2\omega$  に変えると、バネは自然長から  $L_2$  だけ伸びてつりあった。このとき、 $L_2$  を求めよ。

(c) 角速度を  $\omega$  にもどし、この(バネおよび小球を含む)円筒容器を円盤中心  $O$  から距離  $\frac{2R}{3}$  の地点  $A'$  に移動したところ、バネは自然長から  $L_3$  だけ伸びてつり合った。

このとき、 $L_3$  を求めよ。

(2) 図2に示すように、角速度  $\omega$  で回転する円盤上の運動を、観測者  $S$  は円盤の上で、観測者  $T$  は円盤の外(静止した地上)で観測している。地点  $B$  において、

小球が、円盤上で半径方向の外側に向かって  $v_S = \frac{R\omega}{2}$  の速度で発射された。ただし、

この初速度  $v_S$  は、円盤上の観測者  $S$  から見た速度である。中心  $O$  と地点  $B$  を結ぶ線上にある円盤端を地点  $P$ 、小球が到達する円盤端を地点  $Q$  とする。また、小球が発射された瞬間における円盤上の地点  $P$  に対応する地上の位置を  $P_0$  とする。ここで、小球の大きさは円盤の半径に比べて十分に小さく、また、円盤面と小球の間の摩擦は無視できるとする。

- (a) 観測者  $T$  から見た小球の初速度の大きさ  $v_T$  を求めよ。  
(b) 小球が発射されてから円盤端  $Q$  に達するまでに要する時間  $t$  を求めよ。  
(c) 上記(b)で得た時間  $t$  の間に、観測者  $T$  から見た地点  $P$  の移動距離  $D_1$  を求めよ。  
(d) 地点  $P_0$  と地点  $Q$  の間の円盤端に沿う距離  $D_2$  を求めよ。ここで、必要ならば、

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4} \text{ を満たす角度 } \alpha [\text{rad}] \text{ を用いよ。}$$

- (e) 上記の(c)および(d)で得た結果を用いることにより、小球が到達する円盤端  $Q$  が円盤上の地点  $P$  に対してどのような位置になるか答えよ。ここで、必要ならば、 $\sqrt{7} \doteq 2.65$  および上記(d)で与えた角度  $\alpha$  が約  $0.424\text{rad}$  であることを用いよ。

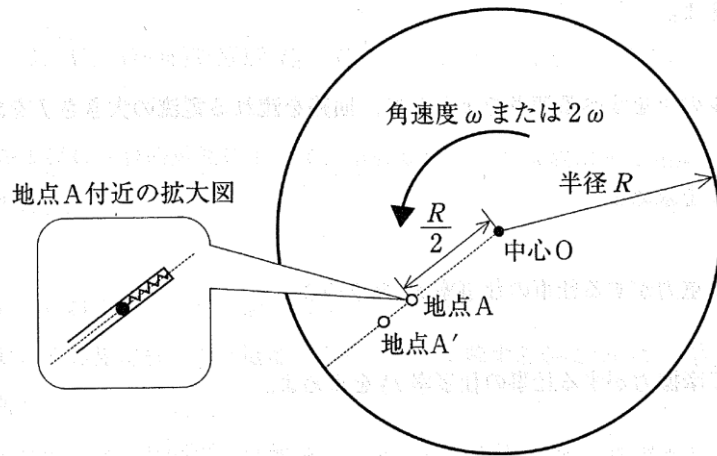


図 1

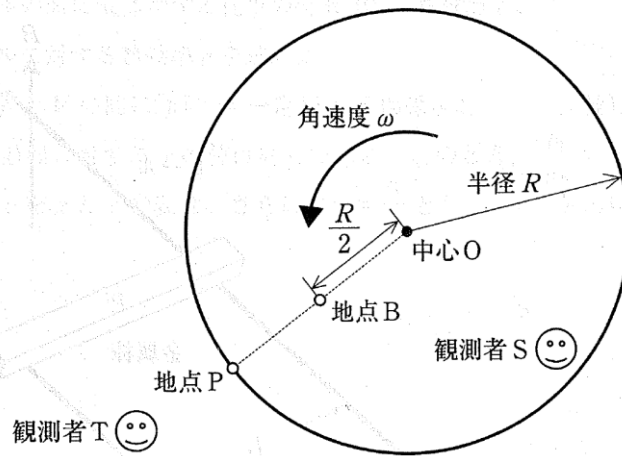


図 2

(2010 年 横浜市立大)

<NOTE>

### ◆第3回 いろいろな単振動①◆

#### <重要事項>

#### ■単振動■

○単振動とは・・・

#### 等速円運動の正射影にあたる運動

・時刻  $t$  における振動の中心からの物体の変位

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{振幅} : A [\text{m}] \\ \text{位相} : (\omega t + \phi) [\text{rad}] \end{array} \right.$$

・時刻  $t$  における物体の速度

$$v = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{振動の中心で最大} & v_{\max} = A\omega \\ \text{両端で} & v = 0 \end{array} \right.$$

・単振動をする物体の運動方程式

$$F = ma = -m\omega^2 x = -Kx \quad (K = m\omega^2 \text{ となる比例定数})$$

⇒振動の中心からの距離に比例した力：**復元力**

・角振動数  $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$  , 周期  $T[\text{s}] = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$  , 振動数  $f[\text{Hz}] = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

・単振動の位置エネルギー

$$\frac{1}{2} Kx^2 \quad (x \text{ は振動の中心からの距離})$$

○単振り子

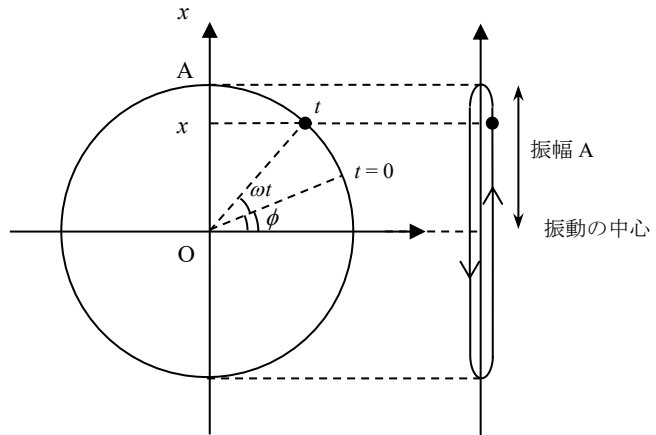
長さ  $l$  の糸におもりを付けて振らせる。

$\theta \ll 1$  のとき単振動として扱うことができる。

$$F = -mg \sin \theta = -mg \cdot \frac{x}{l} = -\frac{mg}{l} x$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

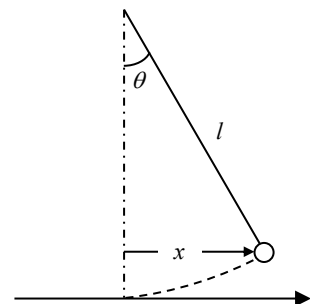
振り子の等時性：周期はおもりの質量や振幅に無関係である。



・時刻  $t$  における物体の加速度

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{両端で最大} & a_{\max} = A\omega^2 \\ \text{振動の中心で} & a = 0 \end{array} \right.$$

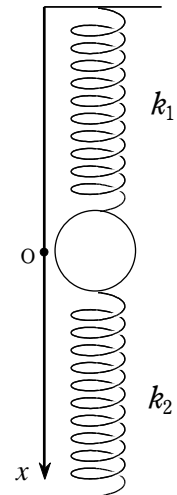




■単振動の解法の手順 (NOTE) ■

<必須典型問題>

右図のように、ばね定数  $k_1$  ,  $k_2$  のばねを天井と地面につなぎ、2つのばねがちょうど自然長となるように質量  $m$  の小球をとりつけ、この位置を原点とした  $x$  軸を設定する。  $x = d$  となる位置からそっと手を放したところ、小球は鉛直上向きに動き出した（このときを  $t = 0$  とする）。重力加速度の大きさを  $g$  [ $\text{m/s}^2$ ]として次の問いに答えよ。



- (1) 手を放した後、おもりが位置  $x$  の点を通るとき、小球に働く合力  $F$  を求めよ。
- (2) 周期  $T$  を求めよ。
- (3) 振動の中心位置  $O'$  を求めよ。
- (4) 振幅  $A$  を求めよ。
- (5) 最大の速さ  $v_{\max}$  を求めよ。
- (6) 原点  $O$  を通過するときの速さ  $v_0$  を求めよ。
- (7)  $O$  から鉛直上向きに  $\frac{A}{2}$  進んだところを初めて通過する時刻を求めよ。
- (8) ある時刻  $t$  における小球の位置  $x$  を求めよ。
- (9) ある時刻  $t$  における小球の速度  $v$  を求めよ。
- (10) ある時刻  $t$  における小球の加速度  $a$  を求めよ。

(創作)

<予習問題>

【1】傾斜したベルトが一定の速さ  $V_0$  で、左上向きまたは右下向きに動く装置がある。はじめに、図1-1のようにベルトを上向きに動かし、質量  $m$  の物体をのせ、物体の高さを変えず静止するよう傾斜角  $\theta$  を設定した。ベルトと物体の静止摩擦係数は  $\mu_s$  で動摩擦係数は  $\mu_k$  であり、 $\mu_s$  は  $\mu_k$  より大きい。重力の加速度は  $g$  である。

〔I〕動摩擦係数  $\mu_k$  を角度  $\theta$  で表せ。

次に、図1-2のように物体をばね定数  $k$ 、自然長  $l_0$  のばねで支柱とつなぎ、ベルトに沿ってばねが伸び縮みし、物体がベルト上で運動できるようにした。ベルトを下向きに動かし、物体を種々の条件でベルトにのせると、物体はそれらに対応したふるまいをした。ばねの質量は無視できるとし以下の設問に答えよ。

〔II〕ばねの伸びの長さが  $l_A$  になる点  $O$  で、物体を静かにベルトにのせると、その点で物体は静止した。伸びの長さ  $l_A$  を求めよ。

〔III〕ばねをさらに伸ばし、物体を点  $O$  から距離  $A_1$  離れた点で静かにベルトにのせると、物体は点  $O$  のまわりに単振動を始めた。振動の周期  $T$  と点  $O$  を通過する速さを  $V_1$  を求めよ。

〔IV〕物体をベルトと同じ速さ  $V_0$  で運動させながら、点  $O$  でベルトにのせた。はじめ物体はベルトに付いて動いたが、ばねの伸びが  $l_B$  になる点で物体はベルトに対しすべり始め、点  $O$  から距離  $A_2$  離れた点に達して向きを変え、点  $O$  を速さ  $V_2$  で通過した。ばねの伸びの差  $l = l_B - l_A$  を求めよ。また、距離  $A_2$ 、速さ  $V_2$  を  $m$ 、 $k$ 、 $V_0$ 、 $l$  を使って表せ。

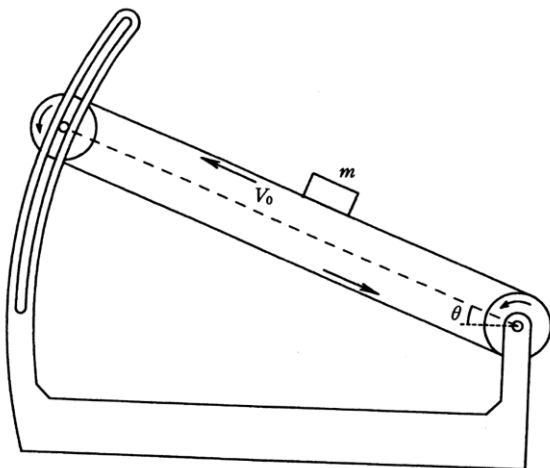


図1-1

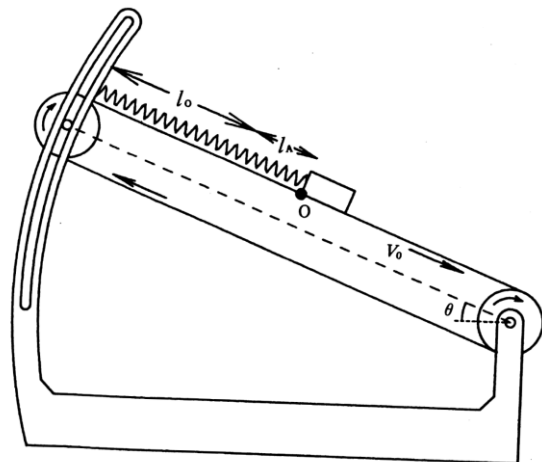


図1-2

(1994年 東京大)

【2】次の文を読んで、に適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。なお、はすでにで与えられたものと同じものを表す。

長さ $l$ の質量の無視できるゴムひもの両端に、2つの小球AおよびBがついている。小球AおよびBの直径は無視できるほど十分小さく、質量はいずれも $m$ とし、重力加速度を $g$ とする。また、このゴムひもは、引き伸ばされた状態ではフックの法則に基づく復元力が働くが、細くてやわらかいため、たるんだ状態では小球の運動を妨げないものとする。

図1のように、天井のO点に小球Bを固定し、小球Aを静かにつるしたとき、ゴムひもは $\frac{l}{12}$ だけ伸びた。このゴムひもが自然長 $l$ から $x$ だけ

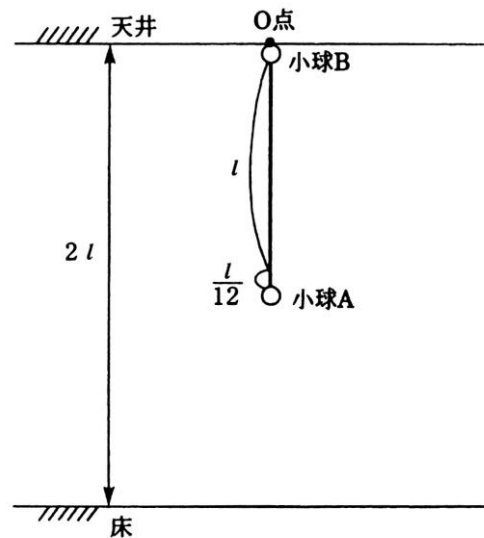


図 1

引き伸ばされたとき、ゴムひもには $\frac{12mg}{l}x$ の復元力が働く。

(1) 小球Aを小球Bと同じ位置Oまで持ち上げ、小球Bを固定したまま小球Aのみをそのまま自由落下させた。このとき、落下する小球Aが到達する最下端の位置は、天井からだけ下方となる。小球Aはの位置から、ゴムひもの復元力によって上昇運動をはじめめる。その上昇運動において、小球Aは天井から $l$ の位置を速さで通過するが、その瞬間に、天井のO点で固定していた小球Bを静かに解放した。その後、小球AとBは天井からの位置で衝突するが、小球Bを解放してから衝突するまでに要する時間はである。この衝突が完全非弾性衝突(反発係数 $e=0$ )であり、衝突後は完全にひとつの小球として運動する場合に、衝突してからこの小球が天井から鉛直距離で $2l$ だけ下にある床に落下するまでに要する時間はである。

(2) 次に、(1)と同様の手順でO点から小球Aを自由落下させ、の位置に小球Aが到達した瞬間に、O点で固定していた小球Bを静かに解放した。この解放した瞬間においては、小球AとBはゴムひもの復元力によって、お互いに引き寄せられている。自由落下している仮想的な観測者からこの2つの小球を見ると、どちらの小球にも重力が働かず、ゴムひもの復元力のみにより運動しているように見える。したがって、小球Bを解放した瞬間からゴムひもが自然長 $l$ に戻るまでに要する時間はであり、その後、小球AとBが衝突するまでにはさらにだけ時間がかかる。その衝突する位置は天井からの位置となる。

(2002年 京大)

【3】図1のように、固定した台Aの上に台Bを置き、さらに台Bをばね定数が $k$ で質量の無視できるばねで台Aに接続した。台Bは台Aの上を水平方向に移動できる。台Aと台Bの左側は水平面からの角度 $\theta$ の斜面となっている。台Aの斜面上端を

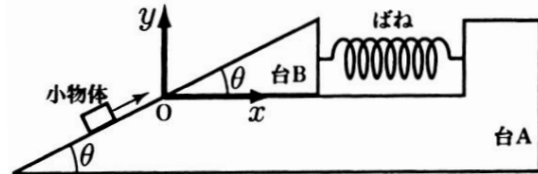


図 1

原点 $O$ として、図1のように $x$ 軸および $y$ 軸をとる。台Bの水平方向の位置は、台Bの斜面下端の $x$ 座標で測ることとする。台Aの斜面と台Bの斜面が段差なくつながっている状態で $x = 0$ となる。このとき、ばねの長さは自然長となっている。

質量 $m$ の小物体を台Aの斜面下方から斜面に沿って打ち上げる実験をする。台Aと台Bの斜面は充分なめらかであり、小物体に摩擦力は働かない。台Bの斜面は十分長く、小物体が斜面から飛び出すことはない。小物体の速さは、原点 $O$ を通過する瞬間に $v_0$ であった。台Bの質量を $M$ 、重力加速度の大きさを $g$ とする。以下の問いに答えよ。

〔I〕まず、台Bを $x = 0$ の位置に固定した状態で実験を行った。

(1) 小物体は台Bの斜面上を上方へ滑りながら次第に遅くなり、やがて最高点に達した後、斜面を滑り降り始めた。小物体が最高点に達した時の小物体の $y$ 座標を、 $v_0$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $g$ ,  $\theta$ のうち必要なものを用いて表せ。

〔II〕次に、台Bの固定をはずして $x = 0$ の位置に静止させた状態から再び実験を行った。小物体は台Bの斜面に乗り移った後、台Bの斜面から離れずに運動を続けた。また、小物体が台Bの斜面にある時には、台Bは水平方向に運動した。この時の台Bの $x$ 軸正の向きの加速度を $a$ とする。

(2) 小物体が台Bの斜面を運動している時の様子を台Bの上にいる観測者から見ると、小物体は慣性力と重力と垂直抗力を受けて運動している。小物体は斜面から離れないので、小物体に働く力の斜面に垂直な方向の成分はつり合っている。小物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを、 $a$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $g$ ,  $\theta$ のうち必要なものを用いて表せ。

(3) 小物体が台Bの斜面を運動している時の、台Aにいる観測者から見た台Bの運動方程式を考える。すると、台Bの加速度 $a$ は台Bの位置 $x$ によって決まり、 $a = a_0 - b_0x$ の形に整理できる。 $a_0$ および $b_0$ を、 $m$ ,  $M$ ,  $g$ ,  $\theta$ ,  $k$ のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ。

このように、台Bの加速度は単振動の加速度を表す式と同じ形をしている。

したがって、小物体が台Bの斜面にある時、台Bはつりあいの位置を中心として水平方向に単振動を行うであろう。

(4) この単振動の振幅を、 $a_0$ ,  $b_0$ ,  $m$ ,  $M$ のうち必要なものを用いて表せ。

(5) この単振動の角振動数 $\omega$ を、 $a_0$ ,  $b_0$ ,  $m$ ,  $M$ のうち必要なものを用いて表せ。

〔Ⅲ〕  $v_0$  を変化させて実験を繰り返した。  
 $v_0$  がある値のとき、小物体が台 B の斜面  
 下端に戻った瞬間に台 B が原点 O に  
 戻ったため、小物体がそのままなめらか  
 に台 A の斜面に移って滑り続ける様子  
 が観察された。この現象に関して考察  
 しよう。

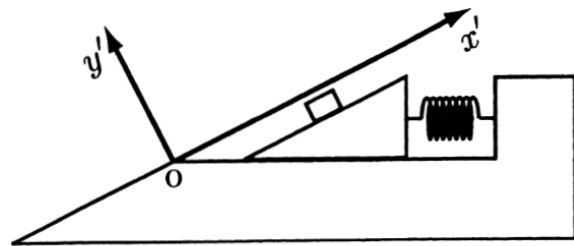


図 2

小物体は台 B の斜面をなめらかに滑るので、小物体と台 B の間には垂直抗力しか働かない。これを考慮して、図 2 のように小物体の運動を点 O を原点にとった斜面方向 ( $x'$  軸方向) と斜面に垂直な方向 ( $y'$  軸方向) に分解して考える。この時台 B は単振動をしているので、小物体の  $y'$  軸方向の運動も単振動となる。

- (6) 小物体の加速度の  $x'$  方向の成分を、 $g$  と  $\theta$  を用いて符号を含めて表せ。
- (7) 小物体の  $x'$  方向の運動を考察することにより、小物体が最初に  $x' = 0$  の点を通過してから再び  $x' = 0$  の点に戻ってくるまでの時間を、 $g$ 、 $v_0$ 、 $m$ 、 $\theta$  のうち必要なものを用いて表せ。なお、この運動の途中で小物体が台 A に衝突する可能性については考える必要はない。
- (8) 小物体が  $x' = 0$  の点に戻った時に台 B も原点 O に戻っていれば、小物体はそのままなめらかに台 a の斜面へ移って滑り続けることができる。この条件を満たす  $v_0$  を  $V$  として、 $V$  を  $g$ 、 $\omega$ 、 $\theta$ 、 $n$  のうち必要なものを用いて表せ。ただし、 $n$  は自然数とする。

(2008 年 大阪大)

<演習問題> (25分)

【4】図1のように、細い中空の直角に曲がった管のなかに、質量が無視でき、自然長が  $l$  のばねが取り付けられている。ばねの一方の端には質量  $m$  の小さなおもり  $W$  がついていて、管の水平部分  $BC$  を滑らかに動けるようになっている。ばねのもう一方の端  $E$  は鉛直部分  $AB$  の任意の位置で固定することができる。また、この管は、下部に連結されたモーターによって、 $AB$  を中心軸として回転させることができる。管の水平部分  $BC$  の長さは  $2l$  である。

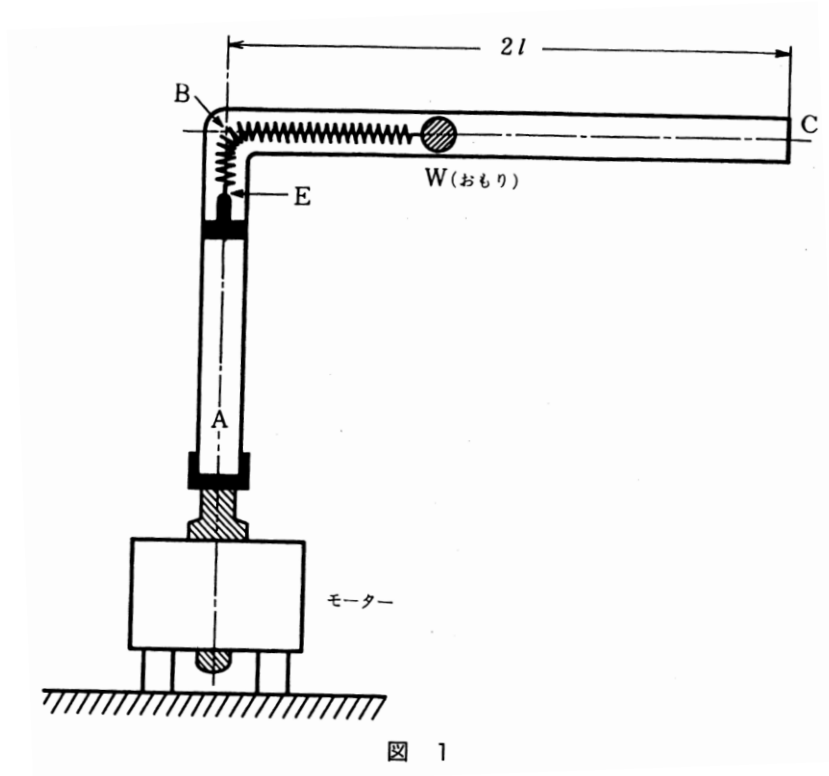
ばねは常にフックの法則に従い、摩擦はすべて無視でき、管の曲がり角にばねが引っ掛かることはないものとする。ばね定数を  $k$  として、以下の設問に答えよ。

〔I〕最初、管およびばねは静止しており、端点  $E$  は  $B$  から下へ距離  $l/4$  の位置にあった。時刻  $t=0$  に、瞬間的に  $E$  をさらに距離  $l/4$  だけ下方へ下げて固定したところ、おもりは単振動を始めた。振動の周期と、おもり  $W$  の  $B$  からの距離の最小値を求めよ。

〔II〕その後、ある時刻  $t_1$  から、突然、管をある一定の角速度  $\omega_1$  で回転させたところ、管の中のばねの振動が止まった。そのような  $\omega_1$  を求め、 $t_1$  が満たすべき条件を  $m$  と  $k$  を用いて表せ。

[Ⅲ] 次に、ばねの端点 E を点 B の位置まで上げて固定し、ばねと管を完全に静止の状態にもどした。その後、ある時刻から、突然管を一定の角速度  $\omega_2$  で回転させたところ、おもりは管の中で単振動を始めた。

- (1) おもりの振動数と、振動の中心点の B からの距離を求めよ。
- (2)  $\omega_2$  の値をうまく選ぶことによって、上から見たおもりの軌跡が管の一回転ごとに全く同じ図形を描くようにすることができる。ただし、おもりが管の端 C にぶつかることはないようにする。そのような  $\omega_2$  のうちで、おもりの振動の振幅を最大にするものを  $m$  と  $k$  を用いて表せ。また、そのときのばねの長さの最大値は自然長  $l$  の何倍か。



(1989年 東京大)

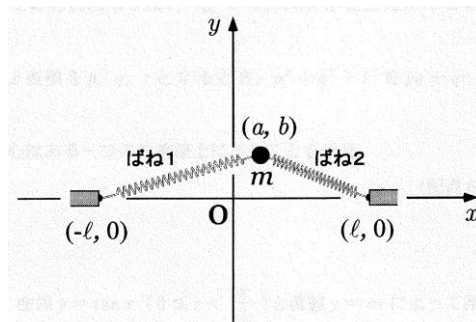


<NOTE>

## ◆第4回 いろいろな単振動②◆

### <予習問題>

【1】 水平な台の上に大きさの無視できる質量  $m$  の小物体を置き、自然長が  $\ell_0$  の軽くて細い2本のばね、ばね1、ばね2をその小物体につないだ。台の表面には  $(x, y)$  座標が設定されており、小物体とつながれていない方のばねの端点は、それぞれ点  $(-l, 0)$ 、点  $(l, 0)$  で台に固定されている。ただし、 $\ell_0 < l$  とする。これらのばねのばね定数はともに  $k$  であり、



これらのばねは曲がることはなく、固定点のまわりに自由に動くことが出来る。また、台と小物体、台とばねとの間の摩擦はいずれも無視できる。最初は、小物体を点  $(a, b)$  ( $a > 0, b > 0$ ) に固定している。図はこの状況を台の上方から見たときの様子である。

以下では、 $a, b$  がともに  $l$  および  $l - \ell_0$  に比べて十分小さい場合を考えよう。

このとき、ばね1の長さ  $L_1$  とその逆数  $\frac{1}{L_1}$ 、および、ばね2の長さ  $L_2$  とその逆数  $\frac{1}{L_2}$  は、以下に示すように、 $a, b$  の一次式でよく近似される。上の条件が成り立つ場合、 $\frac{a}{l}$  と  $\frac{b}{l}$  の絶対値は1と比べて十分小さいので、 $\frac{a^2}{l^2}$  と  $\frac{b^2}{l^2}$  は、 $\frac{a}{l}$  の絶対値と比べて十分

小さい。そのため、 $L_1$  は、 $L_1 = \sqrt{(\ell + a)^2 + b^2} = \ell \sqrt{1 + \frac{2a}{\ell} + \frac{a^2 + b^2}{\ell^2}} \doteq \ell \sqrt{1 + \frac{2a}{\ell}}$  のように近似される。

また、 $x$  の絶対値が1に比べて十分小さい場合は、 $(1+x)^p \doteq 1+px$  ( $p$  は実数) の近似がよく成り立つので、 $L_1$  はさらに  $L_1 \doteq \ell \sqrt{1 + \frac{2a}{\ell}} \doteq \ell \left(1 + \frac{a}{\ell}\right)$  のように近似される。

$$\text{同様にして、} \frac{1}{L_1} \text{ も、} \frac{1}{L_1} \doteq \frac{1}{\ell \left(1 + \frac{a}{\ell}\right)} \doteq \frac{1}{\ell} \left(1 - \frac{a}{\ell}\right)$$

また、ばね2の長さ  $L_2$  とその逆数  $\frac{1}{L_2}$  も、次のように近似される。

$$L_2 \doteq \ell \left(1 - \frac{a}{\ell}\right), \quad \frac{1}{L_2} \doteq \frac{1}{\ell} \left(1 + \frac{a}{\ell}\right)$$

※以下の(1)～(3)における近似計算では、 $a, b$  の積や  $a, b$  の二次とそれより大きい次数の項は無視し、 $a, b$  の一次の項までだけを残す近似を用いよ。(1)～(3)の結果は  $a, b$  の一次多項式で表せ。

- (1) ばね 1 の自然長からの伸びを求めよ。解答は,  $l, l_0, a, b$  のうち必要なものを用いて記せ。
- (2) ばね 1 が小物体におよぼす力の,  $x$  成分と  $y$  成分を, それぞれ求めよ。力の向きは,  $x, y$  の正の向きをそれぞれ正の向きとする。解答は  $k, l, l_0, a, b$  のうち必要なものを用いて記せ。
- (3) ばね 1 とばね 2 が小物体におよぼす力の合力の,  $x$  成分と  $y$  成分を, それぞれ求めよ。解答は  $k, l, l_0, a, b$  のうち必要なものを用いて記せ。
- (4) 時刻  $t=0$  に, 点  $(a, b)$  ( $a>0, b>0$ ) において固定していた小物体を, 静かにはなした。(3) で求めた小物体にはたらく力から得られる運動方程式によると, この後の小物体の  $x$  方向,  $y$  方向の運動は, それぞれ振幅  $a, b$  の独立な単振動であることがわかる。

一方,  $x$  方向,  $y$  方向に独立な単振動を行う小物体の, 時刻  $t$  における位置  $(x, y)$  は, 定数  $A, B, \omega_x, \omega_y, \alpha, \beta$  を用いて, 一般に  $x = A\cos(\omega_x t + \alpha), y = B\cos(\omega_y t + \beta)$  と表される。ただし,  $A > 0, B > 0, 0 \leq \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta < 2\pi$  であり,  $\omega_x, \omega_y$  は, それぞれ  $x$  方向,  $y$  方向単振動の角振動数である。

- (a) 時刻  $t=0$  に, 点  $(a, b)$  において静かにはなした小物体が, それ以降に行う運動に対して,  $A, B, \omega_x, \omega_y, \alpha, \beta$  をそれぞれ求めよ。 $A, B, \omega_x, \omega_y$  については,  $k, m, l, l_0, a, b$  のうち必要なものを用いて記せ。また,  $\alpha, \beta$  については, 適切な実数で記せ。
- (b) 上で求めた  $x, y$  の表式から  $t$  を消去することにより, 小物体が台の上で描く軌跡を表す方程式を求めることができる。 $l = \frac{4}{3}l_0$  である場合に, その軌跡を表す方程式を求めよ。解答は,  $x, y$  の他に,  $k, m, l, l_0, a, b$  のうち必要なものを用いて記せ。
- (c)  $l = \frac{4}{3}l_0$  である場合に, 小物体が台の上で描く軌跡を, 解答用紙のグラフ用紙に描け。

(2006 年 大阪大・後期)

【2】次の文を読んで、に適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。

なお、は、すでにで与えられたものと同じものを表す。また、下線部に関して、単振動が生じる理由を答えよ。

重力加速度の2倍まで加速が可能なエレベーターを想定する。以下では、すべて、エレベーターに固定された観測者から見た運動を考え、空気による抵抗は無視する。

なお、必要であれば  $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  を利用せよ。

エレベーターが静止している状態で、床に固定された質量の無視できるばね（ばね定数  $k$ ）の上に、厚さの無視できる質量  $M$  の台  $P$  を固定し、その上に大きさの無視できる質量  $m$  の物体  $Q$  を静かに置いたとき、台  $P$  は図1のように天井から  $H$  の距離で静止した。重力加速度を  $g$  としたとき、ばねは自然長から縮んでいる。

この状態でエレベーターが図2のように上昇を始めたとき、台  $P$  と物体  $Q$  は自然長から縮んだ位置を中心として単振動を始めた。この直後、観測者は台  $P$  と物体  $Q$  をつかんで、つり合いの位置すなわち単振動の中心位置に  $P$  と  $Q$  を静止させた。

次に、図2で速度が一定になる時刻  $t_1$  の後の  $P$  と  $Q$  の運動について考える。時刻  $t_1$  の後、 $P$  と  $Q$  は再び運動を始める。運動開始後の鉛直上向きの加速度を  $\beta$ 、 $PQ$  間に働く垂直抗力を  $N$  とする。ばねが自然長から  $x$  縮んでいるとき、 $P$  の運動方程式は,  $Q$  の運動方程式はとなる。 $\beta$  を消去することで、垂直抗力はとなり、 $\alpha > g$  の場合には  $Q$  が台  $P$  から離れ、その位置は、ばねの自然長位置である。そのときの  $Q$  の速度（鉛直上向きを正とする）は、エネルギー保存則

$$\frac{m+M}{2} \times (Q \text{ の速度})^2 + (m+M)g \times \text{} = \text{} \text{ から } \sqrt{\frac{m+M}{k}(\alpha^2 - g^2)}$$

台  $P$  から離れた後、 $Q$  がエレベーターの天井に衝突しない条件は  $H > \text{}$  である。

この条件を満たすとき、 $P$  と  $Q$  が離れた後のそれぞれの運動の概略は図3のようになる。 $Q$  が台  $P$  と衝突するまでの時間とその位置に関し、 $\alpha = \sqrt{2g}$ ,  $m = 2M$  の場合について次のように考察した。

台  $P$  は  $Q$  を放出した後、周期の単振動となり、その振動の中心はばねの自然長先端から下がった位置にある。また、台  $P$  はばねの自然長からさらに伸びた位置で最高点に達する。このことから、台  $P$  が  $Q$  を放出した位置から再びその位置に戻って来るのに要する時間はである。一方、 $Q$  が台  $P$  から離れた瞬間の位置から再びその位置に戻って来るのに要する時間はであることから、 $Q$  が台  $P$  に到達するのはこれ以降となる。

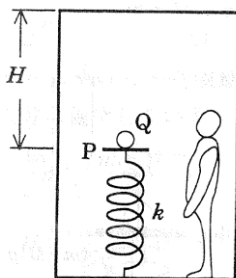


図 1

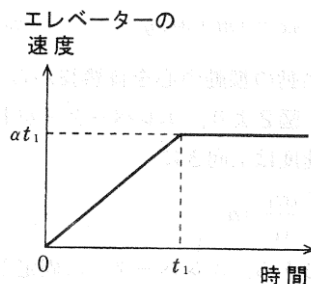


図 2

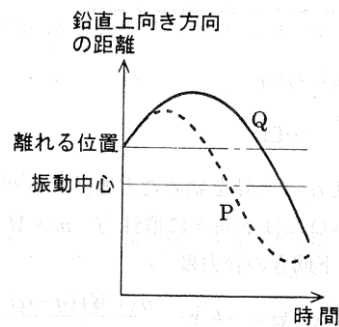


図 3

(2003年 京都大)

【3】質量  $m$  の小球 A と水平な台 B がある。鉛直上向きに  $y$  軸をとる。台は  $y$  方向に振幅  $a$ 、周期  $T$  で単振動しており、時間  $t$  での変位  $Y(t)$  および速度

$$W(t) \text{ はそれぞれ } Y(t) = -a \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad W(t) = b \sin \frac{2\pi}{T} t$$

で表されるものとする。ただし、 $b$  は速度の最大値である。小球 A は最初、位置  $y = h$  に支えられ静止していたが、ある時刻に支えがはずされ、

台に向かって初速度 0 で自由落下を始める (図 1-1)。A はやがて B に衝突するが、B も振動しているため、衝突後の A の速度は B の速度に依存する。

小球 A と台 B との間のはね返り係数は 1 に等しい (すなわち完全弾性衝突) とする。また台 B の質量は A の質量に比べて十分大きいため、B の速度  $W(t)$  は衝突の影響を受けないものとする。A は

はね上がった後、また下降して衝突をし、それを繰り返す。A と B の運動を、横軸を時間  $t$ 、縦軸を高き  $y$  にとってグラフに示すと図 1-2 のようになる。ここでは、 $h$  と  $H$  は縮尺どおりには描かれていない。重力加速度を  $g$  とし、速度は鉛直上向きを正として、以下の設問に答えよ。

〔I〕台が最も低い位置にあった時刻  $t = 0$  に支えがはずされ、小球は落下して台に衝突した。その時刻  $t_1$  は  $\frac{1}{3}T$  であった。

- (1) 小球 A の衝突直前の速度  $u_1$  および初めの高さ  $h$  を、 $a$ 、 $g$ 、 $T$  を使って表せ。
- (2) 衝突直後の A の速度  $v_1$  を  $u_1$  と  $W_1$  を使って表せ。ただし、 $W_1 = W(t_1)$ 。

〔II〕小球は前述の衝突によってはね上がった後、時刻  $T$  に最高の高さ  $H$  に達した。

- (1) このように運動するためには、 $v_1$  および  $b$  はそれぞれ  $gT$  の何倍でなければならないか。
- (2) そのときの高さ  $H$  を、 $a$ 、 $g$ 、 $T$  を使って表せ。
- (3) 変数  $s$  を  $s = t - T$  によって定義したとき、はね上がった後から次に台と衝突するまでの間、小球と台との間の距離  $d$  を  $s$  の関数として表せ。ただし、 $H$ 、 $a$  を使ってもよい。
- (4) 前問で求めた距離を  $d(s)$  と書く。 $d(-s) = d(s)$  が成り立つことを使って、次に衝突する時刻  $t_2$  を求めよ。
- (5) 2 回目の衝突直後の A の速度  $v_2$  を  $gT$  を使って表せ。
- (6) 図 1-2 にならって、小球 A の位置  $y(t)$  を時刻  $t$  が 0 から  $3T$  の間についてグラフに示せ。図には  $y(t)$  の極大、極小における  $t$  と  $y$  の座標を明示せよ。

(1992 年 東京大)

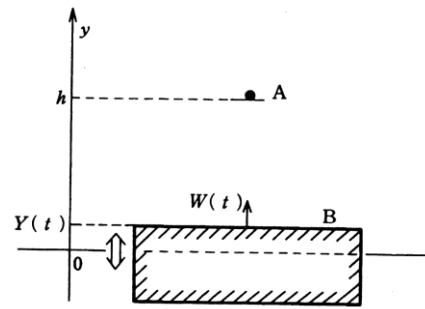


図 1-1

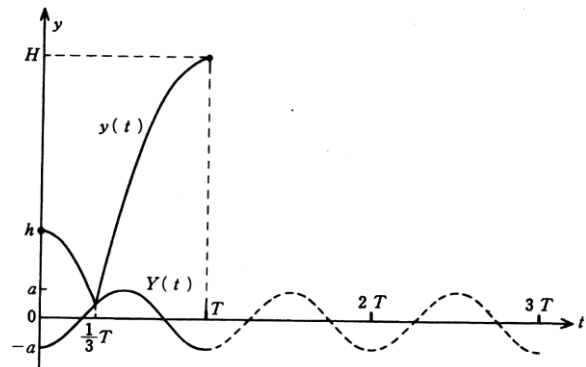


図 1-2

<演習問題> (25分)

【4】質量  $m$  のおもりに質量が無視できるバネ（自然長  $l_0$ ，ばね定数  $k$ ）を2本つなぎ、摩擦のない水平な床の上においた。それぞれのバネをある長さ  $l$  まで伸ばして両端を固定した（図1）。注1）

問1 おもりを  $(0, b)$  の位置まで動かしてそっと手を離すと、おもりは  $y$  軸上で単振動をはじめた。 $y$  軸上のおもりの位置  $(0, y)$  は、時刻  $t$  のとき  $y = b \cos \omega t$  と表せる。角振動数  $\omega$  をおもりの質量  $m$  とばね定数  $k$  を用いて表せ。

問2 おもりの振動を止めた後、今度はおもりを  $(a, 0)$  の位置まで動かしてそっと手を離すと、おもりは  $x$  軸上で単振動をはじめた。その角振動数は  $y$  軸上で

振動したときの半分  $\frac{\omega}{2}$  であった。

おもりが原点を通過するときのバネの長さ  $l$  は自然長  $l_0$  の何倍か。注2)

問3 おもりの振動を止めた後、今度はおもりを図2のように  $(a, b)$  の位置まで動かしてそっと手を離すと、おもりは床平面上で振動を始めた。

このときおもりの位置  $(x, y)$  と時刻  $t$  の関係を調べると

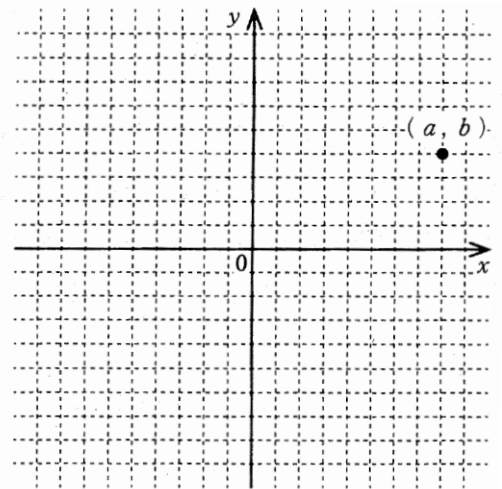
$$x = a \cos \frac{\omega}{2} t, \quad y = b \cos \omega t \quad \text{と表すことができた。}$$

(i)  $x$  と  $y$  との関係を求め、おもりの運動の軌跡を描け。〔解答欄〕右図。

(ii) 時刻  $t$  でのおもりの速度  $(v_x, v_y)$  を求めよ。

(iii) おもりが位置  $(a, b)$  にあるときのバネによる位置エネルギーを求めよ。

(iv) おもりが  $x=0$  を通過するときの  
 (イ) バネの弾性力による位置エネルギー、  
 (ロ) おもりの運動エネルギーを求めよ。

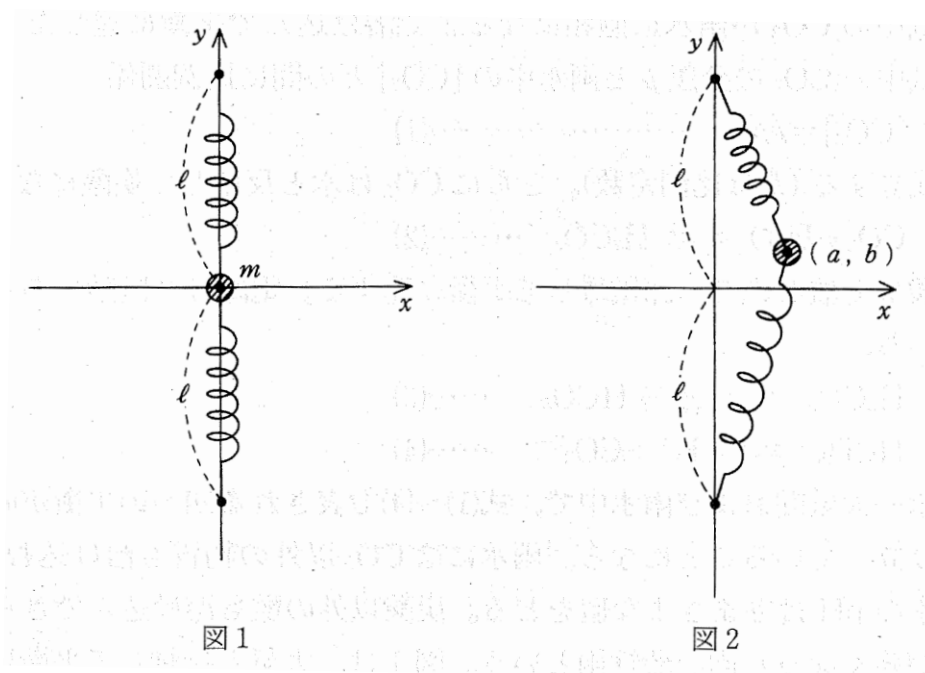


注1) 床平面上に図1、図2に示したように

$x$  軸、 $y$  軸をとるものとする。

注2) 変位  $a, b$  は正でバネの長さに比べて十分小さいものとする。そして  $|\varepsilon|$  が1に比べて

小さいとき  $1 + \varepsilon^2$  は1としてよい。



(1999年 東京医科歯科大)

<NOTE>



<NOTE>

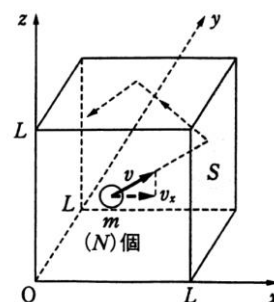
## ◆第5回 分子運動論◆

### <重要事項>

#### ■気体の分子運動論■

(i) 分子が壁に衝突するとき、壁に与える力積

一辺が  $L$  の立方体容器に  $N$  個の分子が入っているとす。  
いま、質量  $m$  の分子が  $x$  方向に  $v_x$  の速さで壁  $S$  に弾性衝突するとき、分子が受ける力積は  $\underline{-2mv_x}$  より  $\underline{2mv_x}$



(ii) 全分子が時間  $t$  に壁に与える力積

時間  $t$  の間に分子は  $x$  方向に  $v_x t$  の距離を動くが、往復  $2L$  動くごとに壁  $S$  と

衝突するから、この間の  $S$  との衝突回数は  $\underline{\frac{v_x t}{2L}}$

∴ 1 分子が与える力積の合計は  $2mv_x \times \frac{v_x t}{2L} = \underline{\frac{mv_x^2 t}{L}}$

よって全分子が  $S$  に与える力積は  $\underline{\frac{mv_x^2 t}{L} \times N = \frac{Nm v_x^2 t}{L}}$

(iii)  $Ft =$  (ii) として力  $F$  を決め、圧力  $P$  へ

$$Ft = \frac{Nm \overline{v_x^2} t}{L} \quad \text{より} \quad F = \frac{Nm \overline{v_x^2}}{L}$$

ここで、 $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$ ,  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$  より  $\underline{\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}}$

よって  $F = \frac{Nm \overline{v_x^2}}{L} = \frac{Nm \overline{v^2}}{3L}$  ∴  $P = \frac{Nm \overline{v^2}}{3L^3} = \underline{\frac{Nm \overline{v^2}}{3V}}$

理想気体の状態方程式より ( $N_0$  をアボガドロ定数とする)  $\underline{\frac{Nm \overline{v^2}}{3V} \times V = \frac{N}{N_0} RT}$

∴ 分子の平均運動エネルギー  $\underline{\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_0} \cdot T = \frac{3}{2} kT}$  ( $k = \frac{R}{N_0}$  : ボルツマン定数)

## <予習問題>

【1】図1のように、鉛直に立てられている断面積 $S$ の十分に長いシリンダー内に、なめらかに動く質量 $M$ のピストンがある。これらは断熱材でできており、外側は真空である。ピストンは、シリンダーの底面から高さ $d$ の位置に、はじめは固定されている。ピストンの下のシリンダー内には、単原子分子からなる2種類の理想気体A、Bが均一に混ざって入っており、絶対温度 $T$ の熱平衡状態になっている。ピストンのすぐ下には、Aの分子だけが抵抗なく通り抜けられるフィルターが、シリンダーに固定されている。フィルターの厚さは無視できるものとする。以下の文中の□に適切な数式を書き入れよ。ただし、重力加速度の大きさを $g$ とし、重力はピストンのみにはたらくとする。

まず、A、Bそれぞれが壁におよぼす圧力 $P_A$ 、 $P_B$ を、理想気体の分子運動から考えてみよう。圧力は多数の気体分子が容器の壁に衝突することによって生じる。この衝突は完全弾性衝突であるとして、質量 $m_A$ のAの分子が速度 $\vec{v}_A$ でピストンに衝突して力をおよぼす場合を考える。鉛直上向きに $z$ 軸をとる。ピストンが1個の分子から1回の衝突で受ける力積の $z$ 成分は、 $\vec{v}_A$ の $z$ 成分 $v_{Az}$ を用いると、(1)と表される。また、この分子が時間 $t$ の間にピストンに衝突する回数は、(2)と表される。分子の速度は、ひとつひとつの分子のよっていろいろな値をとる。そこで、シリンダー内のAの全分子数を $N_A$ とすると、Aの全分子がピストンにおよぼす平均の力は(3)  $\times \langle v_{Az}^2 \rangle$ と書ける。ここで、 $\langle v_{Az}^2 \rangle$ は $v_{Az}$ の2乗の平均を表す。気体分子の運動に方向による差はないので、 $\langle v_{Az}^2 \rangle$ は $\vec{v}_A$ の大きさ $v_A$ を用いて書き直すことができる。よって、圧力

は $P_A =$  (4)  $\times \langle v_A^2 \rangle$ となる。同様にして、Bの分子の質量、速さ、シリンダー内の

全分子数をそれぞれ、 $m_B$ 、 $v_B$ 、 $N_B$ とすると、 $P_B =$  (5)  $\times \langle v_B^2 \rangle$ である。 $P_A$ 、 $P_B$ のことを、A、Bの分圧と呼ぶ。A、B合わせた気体全体の圧力は分圧の和になっている。ここで、ボルツマン定数を $k$ とすると、分子1個あたりの平均の運動エネルギーは

$\frac{3}{2}kT$ なので、 $\frac{P_A}{P_B}$ は分子の速さや質量によらず、(6)と書ける。

次にピストンの固定をはずした。すると、ピストンは上方へ動き、最初の位置から $h$ だけ上方でピストンの速さが0になった。その瞬間に、図2のようにピストンを固定した。ピストンの移動にともなってAがピストンにする仕事は、ピストンの力学的エネルギーの変化に一致する。これより、Aがピストンにした仕事は(7)である。

しばらくすると、A、Bともに温度 $T'$ の熱平衡状態になった。この状態を、熱力学の第一法則を用いて考えよう。温度 $T'$ は、A、B合わせた気体全体の内部エネルギーの

変化に着目すると、 $T' =$  (8)  $\times Mgh + T$ と表される。また、ピストンの固定を

はずしてから温度が $T'$ となるまでにBが得た熱量 $Q_B$ は、Bの内部エネルギーの変化に着目し、 $T$ と $T'$ を含んだ式で表すと、(9)と求まる。

このとき、A が得た熱量  $Q_A$  は、(10) である。

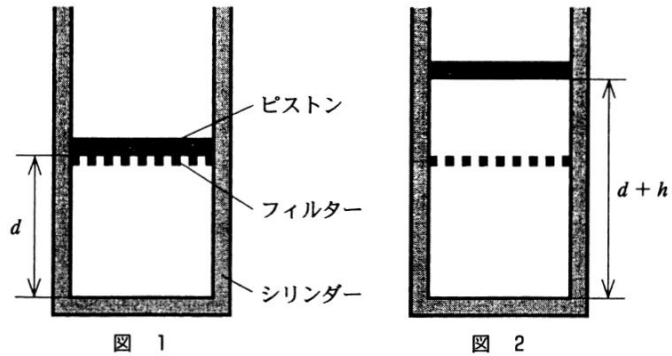
最後に、この熱平衡状態での圧力について考えてみよう。A, B それぞれの分圧

を  $P'_A$ ,  $P'_B$  とする。(6) で  $\frac{P_A}{P_B}$  を求めた考え方を、フィルターの下のシリンダー内の分子に

ついて適用すると、 $P'_A$  と  $P'_B$  の圧力の比は、 $\frac{P'_A}{P'_B} = (11) \times \frac{P_A}{P_B}$  と表される。また、

この状態ではフィルターの上下に圧力差が生じている。下の圧力は、上の圧力に比べて

$P_B + (12) \times Q_B$  だけ大きくなっている。



(2005 年 大阪大)

【2】質量  $m$  の分子  $N$  個からなる気体が、熱を通さない一辺  $L$  の立方体の容器に閉じこめられ、絶対温度  $T$  の状態にあるとする。分子は容器の壁とはねかえり係数 1 の弾性衝突をする質点とみなすことにしよう。分子に  $j=1, 2, \dots, N$  と番号をつけ、ある時刻  $t_0$  における  $j$  番目分子の速度の  $x, y, z$  成分をそれぞれ  $u_j, v_j, w_j$  とし、ボルツマン定数を  $k$  とする。

(1) 一つの分子が何度も壁と衝突するほど長い時間  $\Delta t$  を考えよう。分子同士の衝突を無視するとき、時刻  $t_0$  から  $t_0 + \Delta t$  の間に  $j$  番目の分子が  $x$  軸に垂直な容器の壁面 (図 1 の面 ABCD) と衝突する回数はいくらか。

$$(a) \frac{|u_j|\Delta t}{L} \quad (b) \frac{\Delta t\sqrt{u_j^2+v_j^2+w_j^2}}{3L} \quad (c) \frac{|u_j|\Delta t}{2L} \quad (d) \frac{2(u_j^2+v_j^2+w_j^2)\Delta t^2}{L^2}$$

$$(e) \frac{2u_j\Delta t}{L} \quad (f) \frac{\Delta t\sqrt{u_j^2+v_j^2+w_j^2}}{\sqrt{3}L} \quad (g) \frac{u_j\Delta t}{L}$$

(2) 次に時刻  $t_0$  から時間を  $\Delta t$  をかけ、一定の速さで面 ABCD を  $x$  軸の正の方向に  $\Delta x$  だけ動かそう (図 2 参照)。分子が動く壁面 ABCD と衝突すると、衝突の前後で分子速度の  $x$  成分は変化する。 $j$  番目の分子が初めて面 ABCD に衝突する際のエネルギー変化  $\Delta e_j$  はいくらか。

$$(a) \frac{mu_j}{\Delta t}\Delta x + \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 \quad (b) \frac{m}{2}\left\{\left(u_j + \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + v_j^2 + w_j^2\right\}$$

$$(c) -\frac{m|u_j|}{\Delta t}\Delta x + \frac{m}{2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 \quad (d) \frac{m}{2}\left\{\left(|u_j| + \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + v_j^2 + w_j^2\right\}$$

$$(e) -\frac{2m|u_j|}{\Delta t}\Delta x + 2m\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 \quad (f) \frac{m}{2}\left\{\left(|u_j| - \frac{2\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + v_j^2 + w_j^2\right\}$$

(3)  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  が分子の速さ  $\sqrt{u_j^2 + v_j^2 + w_j^2}$  に比べ十分小さいと、 $j$  番目分子のエネルギーは壁との衝突のたびに (2) で求めた  $\Delta e_j$  の値だけ変化すると考えてよく、さらに

$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2$  が含まれる項を無視できる。このとき、壁が  $\Delta x$  だけ移動することによる

気体のエネルギー変化  $\Delta U$  はいくらか。

$$(a) \quad -\frac{m\Delta x}{L} \sum_{j=1}^N u_j^2 \quad (b) \quad \frac{m\Delta t}{3L} \sum_{j=1}^N \left( u_j^3 + u_j v_j^2 + u_j w_j^2 + 2u_j^2 \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \quad (c) \quad \frac{m\Delta x}{2L} \sum_{j=1}^N u_j^2$$

$$(d) \quad \frac{2m\Delta x}{3L} \sum_{j=1}^N (u_j^2 + v_j^2 + w_j^2) \quad (e) \quad -\frac{m\Delta t}{2L} \sum_{j=1}^N (|u_j|^3 + |u_j|v_j^2 + |u_j|w_j^2)$$

$$(f) \quad \frac{m\Delta x \Delta t}{3L^2} \sum_{j=1}^N (u_j^3 + u_j v_j^2 + u_j w_j^2)$$

(4) (2) で考えた過程では、壁の移動により直接影響を受けるのは 分子速度の特定の成分だけだが、分子同士の衝突により、分子速度の  $x$  成分  $u_j$ 、 $y$  成分  $v_j$ 、 $z$  成分  $w_j$  も変化し、それぞれの 2 乗の平均は常に等しいと考えられる：

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w_j^2$$

さらに、容器は熱を通さないので、 $\Delta U$  は体積変化にともなって圧力がした仕事になる。このとき、分子速度の  $x$  成分の 2 乗の平均  $\overline{u^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j^2$  の値はいくらか。

$$(a) \quad \frac{3NkT}{2m} \quad (b) \quad \frac{mL^3}{kT} \quad (c) \quad \frac{3kT}{m} \quad (d) \quad \frac{NkT}{L^3} \quad (e) \quad \frac{kT}{m} \quad (f) \quad \frac{kT}{mL^3} \quad (g) \quad \frac{2m}{NkT}$$

以下の問いで必要があれば、理想気体で成立する次式を用いよ。速度の  $y$  成分、 $z$  成分についても同様である。

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |u_j| = \sqrt{\frac{2\overline{u^2}}{\pi}}, \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |u_j|^3 = \sqrt{\frac{8}{\pi}} (\overline{u^2})^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j = 0, \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j^3 = 0, \quad \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j^4 = 3(\overline{u^2})^2$$

(5) 時間 $\Delta t$  の間に面 ABCD に衝突する分子の延べ数 (平均衝突回数と分子数の積) はいくつか。

(a)  $\sum_{j=1}^N \frac{|u_j| \Delta t}{L^3}$  (b)  $\sum_{j=1}^N \frac{2(u_j^2 + v_j^2 + w_j^2) \Delta t}{3L}$  (c)  $\sum_{j=1}^N \frac{L^2 |u_j| \Delta t}{N}$

(d)  $\sum_{j=1}^N \frac{|u_j| \Delta t}{L}$  (e)  $\sum_{j=1}^N \frac{\Delta t \sqrt{u_j^2 + v_j^2 + w_j^2}}{L}$  (f)  $\sum_{j=1}^N \frac{|u_j| \Delta t}{2L}$

(6) 図 3 のように、面 ABCD 上に面積  $S$  の小領域をとる。分子が一様に面 ABCD に衝突すると考えると、 $\Delta t$  の間に小領域に衝突する分子数はいくらか。

(a)  $\frac{S \Delta t}{2L^3} \sum_{j=1}^N |u_j|$  (b)  $\frac{S^2 \Delta t}{L^3} \sum_{j=1}^N (u_j^2 + v_j^2 + w_j^2)$  (c)  $\frac{S \Delta t}{L^2 N} \sum_{j=1}^N |u_j|$

(d)  $\frac{S \Delta t}{L^3} \sum_{j=1}^N |u_j|$  (e)  $\frac{N \Delta t}{LS} \sum_{j=1}^N |u_j|$  (f)  $\frac{L^2 \Delta t}{NS} \sum_{j=1}^N \sqrt{u_j^2 + v_j^2 + w_j^2}$

(7) 気体は希薄で、小領域の面積  $S$  が小さいと時間  $\Delta t$  の間に同一分子が小領域に 2 回以上衝突することはない。容器の外を真空にし、小領域に穴を開けると、そこに衝突するはずだった分子は容器の外部に放出される。単位時間あたりに小穴から放出される分子数を温度  $T$  と圧力  $p$  を含む式で表すとどうなるか。

(a)  $\frac{pS}{NkT}$  (b)  $\frac{NpS}{\sqrt{2\pi mkT}}$  (c)  $\frac{3pS}{2} \sqrt{\frac{kT}{m}}$  (d)  $\frac{pS}{\sqrt{2\pi mkT}}$

(e)  $\frac{pSkT}{2\pi m}$  (f)  $\frac{2kT}{pS}$  (g)  $\frac{p^2 S^2}{mkT}$  (h)  $\frac{Np}{SkT}$

(8) 図 4 のように多数の小穴をもつ壁で容器が二分され、同一の希薄な気体が入っている。前問で考えた機構により分子は小穴を通り左右に移動すると考えられる。左側の気体の圧力が  $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、絶対温度が  $300\text{K}$  のとき、右側の気体の圧力を  $1.2 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、絶対温度を  $T_R$  にしたところ、容器の右側から左側に移動する分子数と、左側から右側に移動する分子数が同数になった。 $T_R$  はいくらか。

(a) 534K (b) 360K (c) 432K (d) 401K (e) 380K (f) 208K

(9) 分子は、静止しているとき固有の波長 $\lambda$ の光を発するとしよう。気体温度が非常に高い場合に、図5のように気体から $z$ 軸の正の方向に発せられる光の波長を測定する。このとき $j$ 番目の分子から発せられる光の波長 $\lambda_j$ は分子運動のため $\lambda$ とは異なる。これは、動く音源から出る音の示す現象と同様であり、分子の速さが光速 $c$ よりはるかに小さいので、その波長の変化は音に適用される公式を用いて計算できる。 $\lambda_j$ はいくらか。

- (a)  $\left(1 + \frac{\sqrt{u_j^2 + v_j^2 + w_j^2}}{c}\right)\lambda$     (b)  $\left(1 - \frac{w_j}{c}\right)\lambda$     (c)  $\left(1 - \sqrt{\frac{u_j + v_j + w_j}{c}}\right)\lambda$
- (d)  $\left(1 + \frac{w_j}{c}\right)\lambda$     (e)  $\left(1 - \frac{\sqrt{u_j^2 + v_j^2 + w_j^2}}{c}\right)\lambda$     (f)  $\left(1 - \frac{|w_j|}{c}\right)\lambda$
- (g)  $\left(1 - \frac{u_j^2 + v_j^2 + w_j^2}{3c^2}\right)\lambda$

(10) (9) で調べたように分子が発する光の波長は、運動のため変化する。そこで、気体から発せられる光の波長の散らばり具合を調べることにより、分子が様々な速さで運動していることを確認できる。光の波長の散らばり具合は、平均の波長を

$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \lambda_j$  とすると、 $\overline{\delta\lambda^2} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\lambda_j - \bar{\lambda})^2$  で表すことができる。 $\overline{\delta\lambda^2}$ はいくらか。

- (a)  $\sqrt{\frac{kT}{mc^2}}\lambda^2$     (b)  $\frac{mc^2}{2kT}\lambda^2$     (c)  $\frac{kT}{3mc^2}\lambda^2$     (d)  $\frac{c}{\sqrt{mkT}}\lambda^2$
- (e)  $\frac{c^2}{NkT}\lambda^2$     (f)  $\frac{c}{NkT}\lambda^2$     (g)  $\frac{kT}{mc^2}\lambda^2$



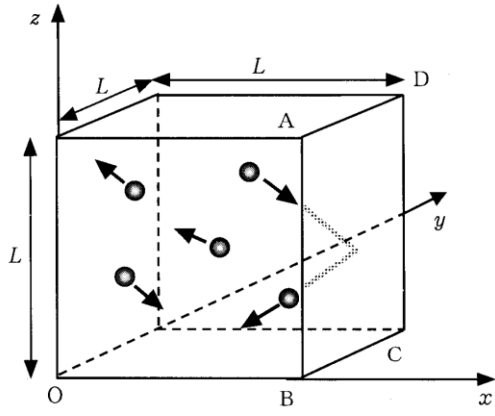


図1

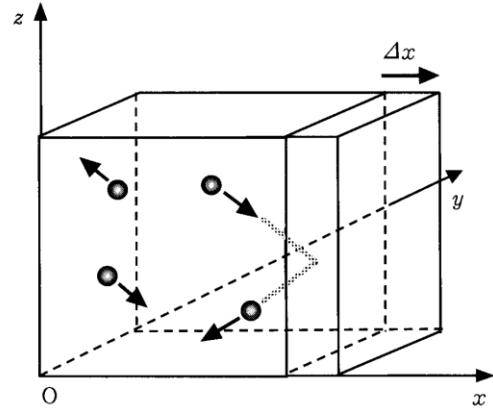


図2

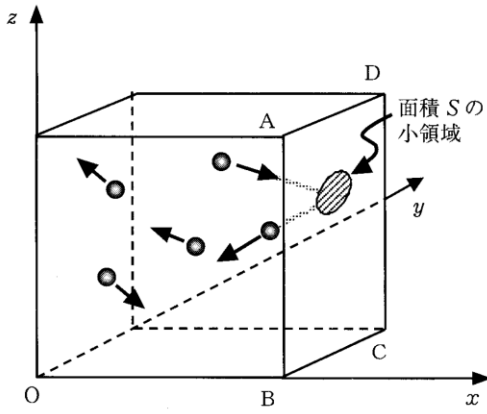


図3

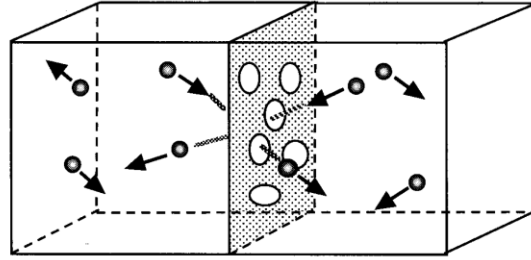


図4

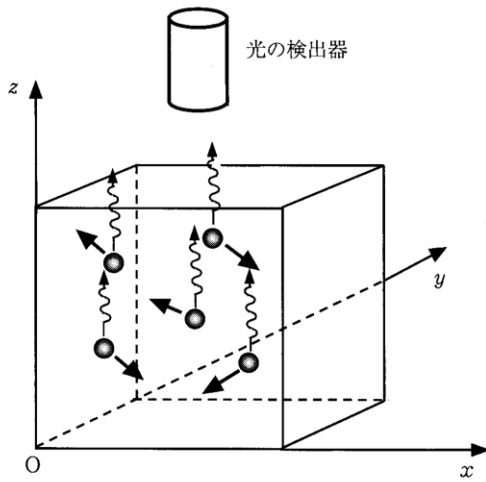


図5

(2005年 早稲田大)

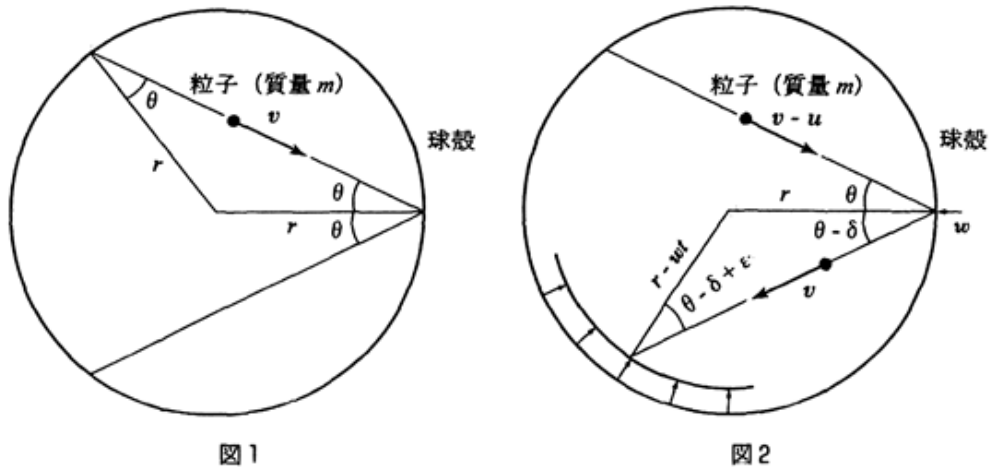
【3】次の文を読んで、に適した式または数値をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図1のように、質量 $m$ の粒子が、速さ $v$ で、半径 $r$ の球殻内面と弾性衝突を繰り返している。球殻との衝突角度を $\theta$ (ラジアン)とする。

1つの粒子が1回の衝突で球殻に与える力積はアである。これを球殻に衝突してから次に衝突するまでの時間(飛行時間)で割ることにより、単位時間当たりの力積の総和イが与えられる。速さ $v$ の $N$ 個の粒子が互いに衝突することなく、球殻内面の様々な場所で衝突を繰り返しているとする。球殻が平均的に受ける圧力 $P$ は、単位時間当たりの力積を球殻の表面積で割った量で与えられる。すなわち、

$$P = N \times \text{ウ} \quad (1)$$

となる。さて、この球殻の半径をゆっくりと縮めていく過程を考えよう(図2)。半径が縮む速さ $w$ は粒子の速さ $v$ に比べて十分小さいものとする。



粒子が速さ $v-u$ 、角度 $\theta$ で、速さ $w$ で近づいてくる壁(球殻)に衝突した。この衝突によって、粒子の速さは $v$ へと増加し、反射角度は $\theta-\delta$ へと減少した。壁に垂直な方向の運動については、速さ $w$ で移動する壁を中心に完全反射するので

$$(v-u)\cos\theta + w = v\cos(\theta-\delta) - \text{エ} \quad (2)$$

が成り立つ。壁に平行な方向の運動については、運動量が保存されるので

$$(v-u)\sin\theta = v\sin(\theta-\delta) \quad (3)$$

が成り立つ。小さい $\delta$ に対して $\sin(\theta-\delta) \cong \sin\theta - \delta\cos\theta$ 、および $\cos(\theta-\delta) \cong \cos\theta + \delta\sin\theta$ の関係が成り立つとして関係式(2)と(3)を解くと、1回の衝突による速度の増加分 $u$ は

( $w, \theta$ を用いて) オ, 角度の減少分 $\delta$ は( $w, v, \theta$ を用いて) カで与えられる。

さて、時刻0(ゼロ)で角度 $\theta-\delta$ で反射した粒子が次に球殻に衝突する時刻 $t$ には、球殻の半径は $r-wt$ に縮小している。この半径の縮小に伴い、衝突角度は $\theta-\delta$ から $\epsilon$ だけ増加したとする。図2からわかるように

$$r\sin(\theta-\delta) = (r-wt)\sin(\theta-\delta+\epsilon) \quad (4)$$

の関係が成り立つ。この間の飛行時間を $t = \frac{2rcos(\theta-\delta)}{v}$ と近似すれば、この飛行時間によって生じる衝突角度の増加分 $\epsilon$ は( $w, v, \theta, \delta$ を用いて) キと表される。

この $\epsilon$ は、半径が縮む速さ $w$ が十分小さい極限では $\delta$ と等しい。つまり、球殻半径をゆっくりと縮小させる過程では、1回の衝突によって生じた角度の減少分 $\delta$ は飛行時間によって生じた角度の増加分 $\epsilon$ によって相殺され、衝突角度は常に一定に保たれる。

一方、粒子の速さは衝突のたびに増加する。衝突 1 回当たりに速さが増える率と半径が縮小する率の積は ( $w, v, \theta, \delta$ を用いて)

$$\frac{v}{v-u} \times \frac{r-wt}{r} = \boxed{\text{ク}} \quad (5)$$

で与えられる。この量は衝突角度 $\theta$ に比べてその変動 $\delta$  が小さい極限で 1 となる。

したがって、粒子の速さ $v$ は、球殻の半径 $r$ に反比例して変化する。

球殻の受ける圧力は、単位時間当たりの力積を球殻の表面積で割った量で与えられるが、それは式(1)で見たように、粒子の速さ $v$ の 2 乗に比例し、半径 $r$ の 3 乗に反比例する。上で調べたように、球殻半径をゆっくり変化させる場合には、粒子の速さが半径に反比例するので、圧力 $P$ は体積の  $\boxed{\text{ケ}}$  乗に比例して変化する。

(2006 年 京都大)

<演習問題> (25 分)

【4】次の文を読んで、に適した式または数値を、それぞれの解答欄に記入せよ。

質量 $m$  [kg]の単原子分子からなる、  
温度が $T$  [K]、単位体積あたりの分子数

(分子数密度)が $n$  [個/m<sup>3</sup>]の  
希薄な気体の中に面積 $S$  [m<sup>2</sup>]の小さな  
円板が静止して置かれている。

短い時間  $t$  [s]の間に、分子の衝突に  
よって円板が受ける力積の大きさを  
考えよう。ここでは、気体は十分希薄で  
あり、円板の付近では分子どうしの衝突  
は無視できるものとする。以下では、

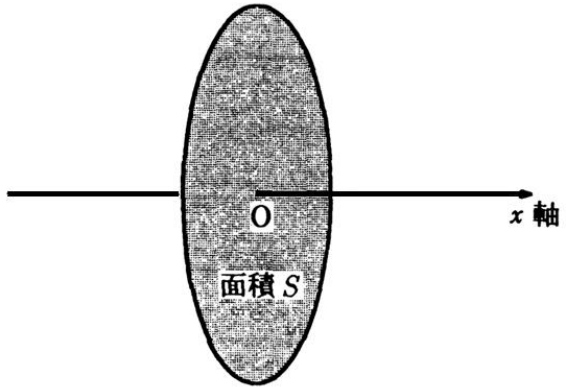


図1

図1のように、円板の中心を原点  $O$  とし、円板に垂直な方向を $x$ 軸にとる (矢印の向きを正とする)。また、議論を簡単にするため、気体分子のうち半数は $x$ 軸の正の向きに一定の速さ $v$  [m/s]で運動しており、残りの半数は $x$ 軸の負の向きに同じく一定の速さ $v$  [m/s]で運動していると仮定し、他の方向の運動は考えないことにしよう。

はじめに、分子数密度が $n$  [個/m<sup>3</sup>]の気体の中に、体積 $V$  [m<sup>3</sup>]の小さな領域を考えよう。ここで $nV$ は1に比べて十分小さいとする。そうすると、この領域に2個以上の分子を見出すことはないので、この領域内に気体分子を見出す確率は $nV$ で与えられる。

これをふまえて、短い時間 $t$  [s]の間に $x$ 軸の正の側から分子が円板に衝突する確率 $p_+$ を求めよう。 $x$ 軸の負の向きに運動している分子は、円板を底面とし、高さが $vt$  [m]の円柱の中に入れば、時間 $t$  [s]の間に円板に衝突することになるが、 $x$ 軸の負の向きに運動して

いる分子の分子数密度は $\frac{1}{2}n$  [個/m<sup>3</sup>]であるから、求める確率は、 $p_+ =$   で

与えられる。ただし、右辺は1に比べて十分小さく、時間 $t$  [s]の間に2個以上の分子が円板に衝突することはないとする。あきらかに、時間 $t$  [s]の間に $x$ 軸の負の側から分子が円板に衝突する確率 $p_-$ も同じ式で与えられる。

つぎに、時間 $t$  [s]の間に円板が受ける力積の $x$ 成分 $I_x$  [N・s]およびその2乗 $I_x^2$  [N<sup>2</sup>・s<sup>2</sup>]の期待値を考えよう。円板は十分に重く、分子は円板によって弾性的に跳ね返されるとすると、1つの分子が衝突することにより円板に与える力積の $x$ 成分は、分子が $x$ 軸の正の側から衝突する場合は負、分子が $x$ 軸の負の側から衝突する場合は正であり、その大きさは [N・s]である。時間 $t$  [s]の間に円板に分子が衝突する確率はそれぞれ $p_+$ 、 $p_-$ であり、しかもそれらは1に比べて十分小さいとしているから、 $I_x$ および $I_x^2$ の期待値は、それぞれ

$$\overline{I_x} = p_+ \times (-2mv) + p_- \times 2mv + (1 - p_+ - p_-) \times 0,$$

$$\overline{I_x^2} = p_+ \times (-2mv)^2 + p_- \times (2mv)^2 + (1 - p_+ - p_-) \times 0$$

で与えられることがわかる。上で求めた $p_+$ 、 $p_-$ の式を代入すると、結局、

$$\overline{I_x} =$$
  [N・s],  $\overline{I_x^2} =$   [N<sup>2</sup>・s<sup>2</sup>]が得られる。

いままでは円板が静止している場合を議論してきたが、円板が $v$  [m/s]に比べて十分遅い速度 $u$  [m/s]で $x$ 軸の正の向きに動いているときには、どうなるか考えてみよう。この場合は、時間 $t$  [s]の間に $x$ 軸の正の側から分子が円板に衝突する確率 $p'_+$ と、 $x$ 軸の負の側から分子が円板に衝突する確率 $p'_-$ は等しくない。 $x$ 軸の負の向きに運動している分子の、円板に対する相対速度の大きさは $v + u$  [m/s]であるから、時間 $t$  [s]の間に円板に衝突するためには、分子は円板を底面とし、高さが  才  [m]の円柱の中にいればよい。よって、求める確率は

$$p'_+ = \frac{1}{2}nS(v+u)t \text{ で与えられる。同様に考えると、} p'_- = \text{  力  } \text{ が得られる。}$$

またこの場合、1つの分子が衝突することにより円板に与える力積の大きさも、分子が $x$ 軸の正の側から衝突するときと、 $x$ 軸の負の側から衝突するときとで異なっている。円板との相対速度を考えればわかるように、1つの分子が円板に与える力積の $x$ 成分は前者のときは、 $-2m(v+u)$  [N·s]であるのに対し、後者のときは、  キ  [N·s]である。時間 $t$  [s]の間に円板に分子が衝突する確率はそれぞれ $p'_+$ 、 $p'_-$ であり、しかもそれらは1に比べて十分小さいとしているので、その間に円板が受ける力積の $x$ 成分 $I'_x$  [N·s]の期待値は

$$\overline{I'_x} = p'_+ \times \{-2m(v+u)\} + p'_- \times 2m(v-u) + (1-p'_+ - p'_-) \times 0$$

で与えられる。これに上で求めた $p'_+$ 、 $p'_-$ の式を代入すると、 $\overline{I'_x} = \text{  ク  } [N \cdot s]$ が得られるが、いまの場合、これは0ではなく、時間に比例した量になっている。

よって、円板が受ける力の $x$ 成分の期待値は $\overline{F_x} = -4nSmvu$  [N]であることがわかる。以上で得られたことをまとめると、円板が静止している場合は、時間 $t$  [s]の間に円板が受ける力積の2乗の期待値は $t$ に比例しており、 $\overline{I_x^2} = At$  [N<sup>2</sup>·s<sup>2</sup>]と書け、円板が速度 $u$  [m/s]で動いている場合は、円板が受ける力の期待値は $u$ に比例しており、 $\overline{F_x} = -Bu$  [N]と書けることがわかった。上で得られた結果から $A$  [N<sup>2</sup>·s]と $B$  [N·s/m]を求め、その比をとってみると $\frac{A}{B} = \text{  ケ  } [J]$ であることがわかる。ここで、一般に温度 $T$  [K]の

気体分子の運動エネルギーが、ボルツマン定数 $k$  [J/K]を使って、数係数 $\times \text{  コ  } [J]$ と書けることを思い出そう。

(数係数とは $\frac{3}{2}$ や2といった数がかかっていることを表す。) 結局、 $\frac{A}{B} = \text{数係数} \times kT [J]$

と書けることがわかる。力のゆらぎに関する比例係数 $A$ と抵抗力に関する比例係数 $B$ のこのような関係は、ここで議論した簡単な場合のみならず、きわめて一般的に成り立っていることが知られている。

(2001年 京都大)

<NOTE>

<NOTE>

## ◆第6回 熱力学総論①◆

### <重要事項>

#### ■気体の状態変化■

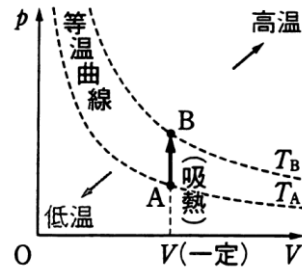
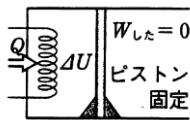
○定積変化 (等積変化)

$$W = 0$$

$$Q_{in} = nC_V\Delta T \quad (\text{定積モル比熱: } C_V[\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})], \text{ 物質質量: } n[\text{mol}])$$

$$\Rightarrow \Delta U = nC_V\Delta T \quad \underline{\text{任意の変化について成り立つ}}$$

※単原子分子理想気体の場合,  $C_V = \frac{3}{2} R$



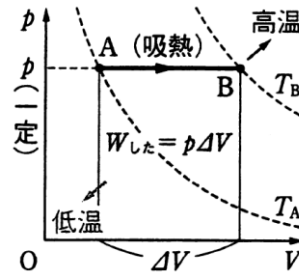
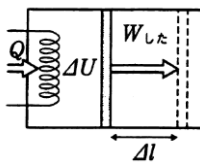
○定圧変化 (等圧変化)

$$W_{in} = -p\Delta V = -nR\Delta T$$

$$Q_{in} = nC_P\Delta T \quad (\text{定圧モル比熱: } C_P[\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})], \text{ 物質質量: } n[\text{mol}])$$

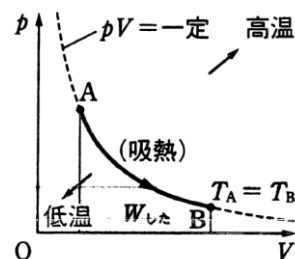
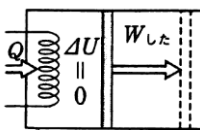
$$C_P = C_V + R$$

※単原子分子理想気体の場合,  $C_P = \frac{5}{2} R$



○等温変化

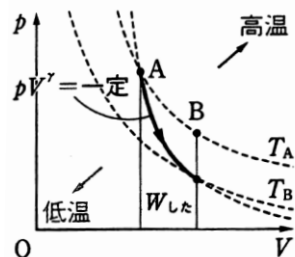
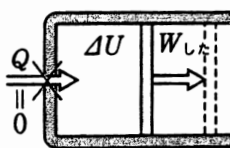
$$\Delta U = 0$$



○断熱変化

$$Q = 0$$

$$PV^\gamma = \text{一定} \quad (\text{比熱比 } \gamma = \frac{C_P}{C_V})$$





○まとめ **重要!!**

① 基礎事項

(i) 温度と内部エネルギーの関係

温度上昇  $\Leftrightarrow$  内部エネルギー増加  $\Leftrightarrow \Delta U > 0$

温度下降  $\Leftrightarrow$  内部エネルギー減少  $\Leftrightarrow \Delta U < 0$

(ii) 体積と仕事の関係

膨張  $\Leftrightarrow$  気体は外へ仕事をする  $\Leftrightarrow W_{\text{out}} > 0 \Leftrightarrow W_{\text{in}} < 0$

圧縮  $\Leftrightarrow$  気体は外から仕事をされる  $\Leftrightarrow W_{\text{in}} > 0 \Leftrightarrow W_{\text{out}} < 0$

② 各変化における把握しておくべき公式

任意変化	$\frac{PV}{T} = \text{一定}, PV = nRT, \Delta U = Q_{\text{in}} + W_{\text{in}}, \Delta U = nC_V\Delta T, C_P = C_V + R$
定積変化	$W = 0, Q_{\text{in}} = nC_V\Delta T$
定圧変化	$W_{\text{in}} = -p\Delta V = -nR\Delta T, Q_{\text{in}} = nC_P\Delta T$
等温変化	$\Delta U = 0$
断熱変化	$Q = 0, PV^\gamma = \text{一定}, TV^{\gamma-1} = \text{一定}, \text{比熱比 } \gamma = \frac{C_P}{C_V}$

③ 単原子分子理想気体の場合 :  $U = \frac{3}{2} nRT, C_V = \frac{3}{2} R, C_P = \frac{5}{2} R$

④  $p-V$  図の見方

(i)  $p-V$  図の面積 = 仕事

(ii)  $p-V$  図の右上が高温 ※等温曲線  $pV = k$  を境界とする。

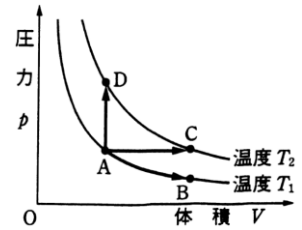
(iii) 等温曲線に比べ、断熱曲線の傾きは急

⑤ 熱効率の公式

$$e = \frac{W_{\text{out}} - W_{\text{in}}}{Q_{\text{in}}} = \frac{Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} \quad (0 \leq e < 1) \quad \text{※分母に注意}$$

< 必須典型問題 1 >

ピストンをもつシリンダー内に一定量の理想気体があり、最初の気体の状態は図の A 点で示されている。外から熱量  $Q$  を与えたとき、気体の状態変化がそれぞれ B, C, D 点になった。それぞれの過程 A→B を①, A→C を②, A→D を③とする。



- (1) ①, ②, ③の変化をそれぞれ何というか。
- (2) 2つの温度  $T_1, T_2$  はどちらが高いか。
- (3) 外に対して仕事をする過程はどれか。
- (4) 気体の内部エネルギーが増加する過程はどれか。
- (5) 気体の温度が変化しない過程はどれか。

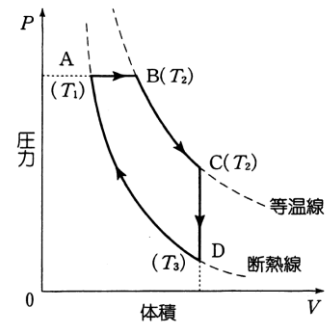
【解答】(1) ①等温変化 ②等圧変化 ③定積変化

(2)  $T_2 > T_1$  (3) ①と② (4) ②と③ (5) ①

< 必須典型問題 2 >

( ) 内には適当な語句を、また [ ] 内には数式を入れよ。

定積モル比熱が  $C_V$ 、定圧モル比熱が  $C_p$  の理想気体が  $n$  モルある。この気体の状態を、図に示すように、A→B→C→D→A と変化させた。B→C の区間は等温変化、D→A の区間は断熱変化である。



( ) 内は各状態での絶対温度を示す

気体が仕事をした区間は (ア) と (イ) であり、仕事をされた区間は (ウ) である。そして 1 サイクル全体を通してみると、気体は仕事を (エ) いる。各状態での絶対温度  $T_1, T_2, T_3$  の間の大小関係を不等式にして示すと [オ] となる。

内部エネルギーが変化しなかった区間は (カ) であり、この間に気体は熱を (キ) している。また、内部エネルギーが変化した区間を①, ②, ③と名付けると、①では気体は熱を吸収し、②では熱を放出している。①での内部エネルギーの変化量は [ク] であり、吸熱量は [ケ] である。したがって、①での仕事の大きさは [コ] と表される。また、②での放出熱量は [サ] である。そして、③で気体になされた仕事は [シ] である。

【解答】(ア, イ) A→B と B→C (ウ) D→A (エ) 「して」

[オ]  $T_3 < T_1 < T_2$  (カ) B→C (キ) 吸収 [ク]  $nC_V(T_2 - T_1)$

[ケ]  $nC_p(T_2 - T_1)$  [コ]  $n(C_p - C_V)(T_2 - T_1)$  [サ]  $nC_V(T_2 - T_3)$

[シ]  $nC_V(T_1 - T_3)$

<予習問題>

【1】図1のように、真空中に置かれた液体に、質量 $m$ [kg]、底面積 $S$ [m<sup>2</sup>]の壁の厚さが無視できる円筒形の容器を逆さまにして、中に気体を入れた状態でまっすぐに浮かべた。この時、容器外の液面から容器の底面までの高さを $h_1$ [m]、容器の内と外との液面の高さの差を $d$ [m]、気体の温度を $T_1$ [K]、気体の圧力を $p_1$ [Pa] (= [N/m<sup>2</sup>])とする。重力加速度を $g$ [m/s<sup>2</sup>]、気体定数を $R$ [J/(K·mol)]、液体の密度を $\rho$ [kg/m<sup>3</sup>]とする。気体を理想気体とみなし、その重さを無視する。液体の密度、容器の底面積は温度が変化しても変わらず、液体は蒸発しない。以下の問題に答えよ。選択式の問題は解答欄の正しいものを○で囲め。

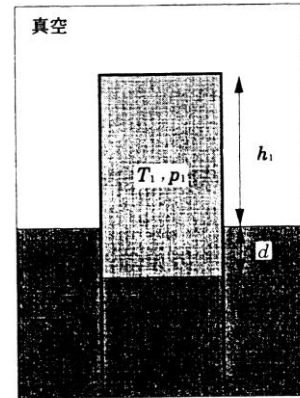


図 1

(1) 図1の状態、容器内の液面が受ける圧力 $p_1$ は深さ $d$ の位置での液体の圧力(容器の外の液面から深さ $d$ までの液体に働く単位面積あたりの重力)とつり合っている。気体の圧力 $p_1$ を $d$ を用いて表せ。

次に、気体の温度を $T_1$ [K]から $T_2$ [K]に上昇させたところ、図2のように、容器内の気体は膨張し容器はまっすぐ上に押し上げられたが、容器の内と外との液面の高さの差は変化なく $d$ のままであった。この状態での気体の圧力を $p_2$ [Pa]、容器外の液面から容器の底面までの高さを $h_2$ [m]とする。

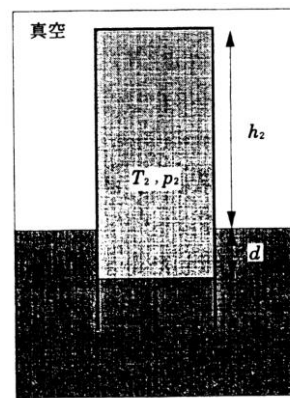


図 2

(2) 容器の内と外との液面の高さの差が変わらなかったのは、この差が容器に働く重力と浮力(気体が押しのけた液体の重さ)のつり合いで決まっており、温度に依存しないためである。容器に働く重力と浮力のつり合いの式を書け。

(3) 気体の温度が $T_1$ から $T_2$ に上昇した過程は何と考えられるか。正しいものを次の中から選べ。

(定圧過程, 等温過程, 定積過程, 断熱過程)

(4) この過程で、容器は上に上がり、位置エネルギーを得た。容器が得た位置エネルギー $U$ [J]を $h_1$ ,  $h_2$ ,  $m$ を用いて表せ。

(5) この過程で、気体は膨張することによって仕事を行った。気体の行った仕事 $W$ [J]を $h_1$ ,  $h_2$ と気体の圧力を用いて表せ。

(6) この過程で、気体が行った仕事 $W$ と、容器が得た位置エネルギー $U$ の関係を次の中から選べ。

( $U < W$ ,  $U = W$ ,  $U > W$ )

(7) 気体の定圧モル比熱を $C_p$ [J/(K·mol)]、定積モル比熱を $C_v$ [J/(K·mol)]とし、気体のモル数を $n$ [mol]とする。この過程で、気体に加えられた熱量 $Q$ [J]を $T_1$ ,  $T_2$ を用いて表せ。

(8) この過程の前後における気体の状態方程式を使い, (5) で求めた $W$ を $n, T_1, T_2$ を用いて(圧力 $p_1, p_2$ を使わずに)表せ。

(9) この過程で, 気体に加えられた熱量 $Q$ と, 気体が行った仕事 $W$ の関係を次の中から選べ。

$$(Q < W, Q > W)$$

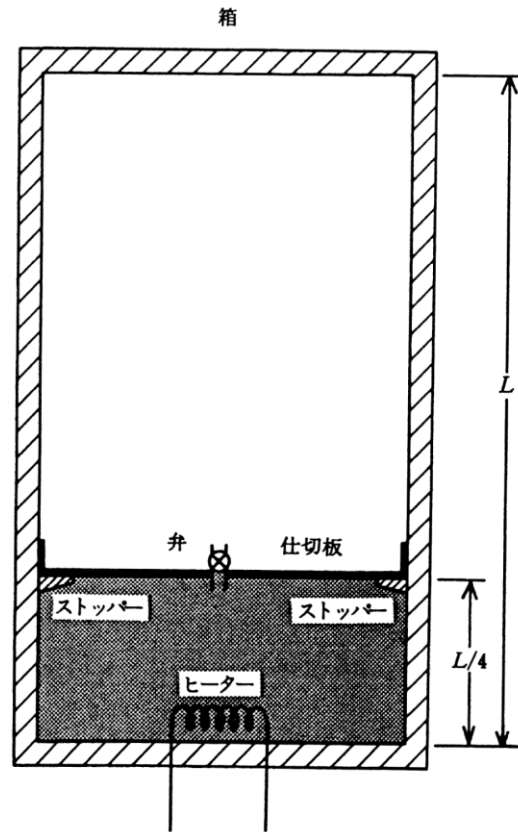
(10)  $Q$ と $W$ の差はどうなったか, 簡潔に示せ。

(2002年 大阪大)

【2】図のように、断熱壁でできた気密な箱（内部の高さ  $L$  [m]）の中に、気密を保ちつつ上下に滑らかに動くことのできる仕切板（質量  $M$  [kg]）があつて、内部を上下二つの空間に分けている。この仕切板には外部からの信号によって自由に開閉できる弁がつけられており、箱の下部にはヒーターが設けられている。また、箱の内側の下から  $L/4$  の高さにはストッパーがつけられていて、仕切板はこれより下には落ち込まない。

最初、弁は閉じられており、上部の空間は真空である。また、下部の空間には温度  $0^\circ\text{C}$  の  $1\text{mol}$  の単原子分子理想気体がつめられているが、仕切板はその自重によってストッパーにのっている。

重力加速度を  $g$  [ $\text{m/s}^2$ ], 気体定数を  $R$  [ $\text{J/mol}\cdot\text{K}$ ], アボガドロ数を  $N$  として、以下の設問に答えよ。ただし、箱と仕切板の熱容量および仕切板の厚さは無視できるものとする。

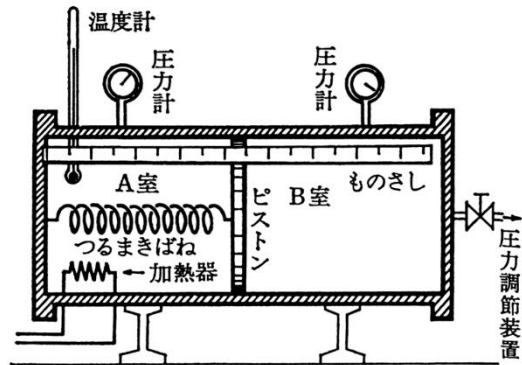


- (1) 最初の状態における気体分子 1 個あたりの平均運動エネルギー[J]を書け。
- (2) ヒーターによって気体をゆっくり加熱したところ、しばらくして仕切板が上方に動きはじめた。このときの気体の絶対温度[K]と、それまでに気体に加えた熱量[J]を求めよ。
- (3) さらに加熱を続けて仕切板の高さが  $L/2$  になったところで加熱を止めた。仕切板が動き始めてから加えた熱量[J]を求めよ。また、加熱を止めた後の気体の内部エネルギー[J]を書け。
- (4) その後、弁を短時間開いて気体の一部を上部に逃がして、再び弁を閉じた。しばらく経過すると、上部と下部の気体の温度が等しくなり、平衡状態に達した。このときの仕切板の高さは  $L/3$  であった。平衡状態における気体の絶対温度[K]と、上部に逃げた気体の mol 数を求めよ。また、最終状態での気体の内部エネルギー[J]を (3) の値と比較し、その違いの原因を求めよ。

(1988年 東京大)

【3】次の文の□に適した式または数値を、また、{ }については正しいものの番号を選び、それぞれの解答欄に記入せよ。

図のように、両端を閉じた透明なシリンダーが水平に置かれている。シリンダーの内部は、なめらかに動くピストンによってA室とB室とに区切られており、ピストンはつまきばねによってA室のシリンダー端面につながれている。A室には理想気体が密封されており、B室は弁を通して外部の圧力調節装置に接続されている。



A室内の理想気体は、加熱器によりゆっくりと加熱することができる。

A室内の温度と圧力、B室内の圧力、およびばねの長さは、取りつけてある温度計、圧力計、ものさしによって測定できる。圧力計とA室をつなぐ管内部の体積や、A室内の温度計、ばねおよび加熱器の体積と熱容量は、すべて無視することができる。A室内の温度はつねに一樣に保たれるものとする。また、加熱器の発生熱量はすべて理想気体に加えられ、シリンダー壁やピストンなどの周囲と理想気体との間の熱のやりとりはないものとする。

シリンダー断面積を $S$  [ $\text{m}^2$ ]、気体定数を $R$  [ $\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ]とする。

A室内の理想気体の圧力が $P$  [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]、温度が $T$  [ $\text{K}$ ]、ばねの長さが $l$  [ $\text{m}$ ]、B室の圧力が $\frac{P}{2}$  [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]であるときを基準の状態とする。これらの値からA室内に封入されている理想気体のモル数は□イ□ [ $\text{mol}$ ]であることがわかる。つぎに、それぞれこの状態から出発した3種類の加熱実験を行った。

加熱過程1：

B室の圧力を $\frac{P}{2}$  [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]に保ちながらA室の理想気体を加熱した。A室の圧力が

$\frac{3}{2}P$  [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]になったとき、ばねの長さが $\frac{3}{2}l$  [ $\text{m}$ ]であった。このことから、ばねの自然長は

□ロ□ [ $\text{m}$ ]、そのばね定数は□ハ□ [ $\text{N}/\text{m}$ ]である。

加熱過程2：

ばねの長さ変化しないようにB室の圧力を調節しながらA室の圧力が $\frac{3}{2}P$  [ $\text{N}/\text{m}^2$ ]になるまで加熱した。このとき、理想気体の温度は□ニ□ [ $\text{K}$ ]になった。この加熱過程において加熱器で加えた熱量を $Q$  [ $\text{J}$ ]とすればA室の気体がピストンにした仕事は□ホ□ [ $\text{J}$ ]、また理想気体の内部エネルギーの変化量とその定積モル比熱は、 $Q$  を用いて表すと、それぞれ□ヘ□ [ $\text{J}$ ]と□ト□ [ $\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ ]である。

加熱過程 3 :

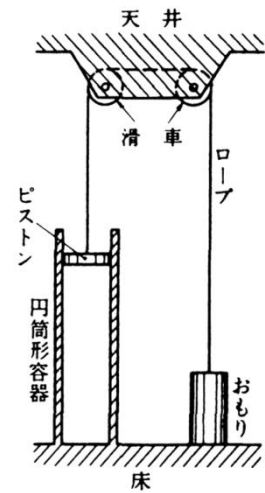
A 室の圧力を  $P$  [ $\text{N/m}^2$ ] に保つよう B 室の圧力を調節しながら、ばねの長さが  $\frac{3}{2} \ell$  [ $\text{m}$ ] になるまで A 室の気体を加熱した。このとき A 室の気体の温度は上記のニと同じ値になった。この間に A 室の気体がピストンにした仕事は  $\square$  チ  $[\text{J}]$  であり、このうち  $\square$  リ  $[\text{J}]$  がばねの弾性力による位置エネルギーとして蓄えられている。この過程で加えた熱量は  $\frac{5}{3} Q$  [ $\text{J}$ ] であった。この実験から導かれる理想気体の定圧モル比熱は  $\square$  ヌ  $[\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})]$  と表される。加熱過程 3 で生じた A 室内の理想気体の内部エネルギーの変化量は、加熱過程 2 で生じた内部エネルギーの変化量  $\{ \text{ル} : \text{①の} \frac{5}{3} \text{倍, ②と同じ, ③の} \frac{2}{3} \text{倍} \}$  である。

(1985 年 京都大)

<演習問題> (25分)

【4】次の文を読んで、に適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。

- (1) 床に鉛直に固定された断面積 $A$  [ $\text{m}^2$ ]の円筒形容器がある。容器には鉛直方向に滑らかに動くピストンがはめ込まれている。ピストンの質量は無視できる。この容器内に、加熱した空気を、温度が $T_0$  [K]、圧力が大気圧と同じ圧力 $P_0$  [ $\text{N/m}^2$ ]の状態に密閉した。このとき、ピストン下面の容器底からの高さは $H$  [m]であった。気体定数を $R$  [ $\text{J/mol} \cdot \text{K}$ ]とすれば、容器内の空気のモル数はイ [mol]である。また、空気の分子量を $\mu$ とすれば容器内の空気の密度はロ [ $\text{kg/m}^3$ ]で表される。



- (2) (1) の状態で、図に示すように、ピストン上面にロープを取り付け、天井に固定した摩擦のない滑車にこのロープを通し、他端を床上に置かれたおもりに結び付ける。このとき、ロープの長さを調節してロープがゆるみなく張られているようにし、かつ、容器内の空気の状態に変化が生じないようにする。ロープの質量は無視でき、また、ロープは張力が作用しても長さは変化しないものとする。

その後、容器内の空気を徐々に冷却し、温度 $T$  [K]の状態に落ち着かせたところ、おもりは高さ $h$  [m]まで持ち上げられた。重力加速度を $g$  [ $\text{m/s}^2$ ]で表すと、おもりの質量は、 $M =$  ハ [kg]である。また、このおもりが動き始めたときの容器内の空気の温度はニ [K]で与えられる。

- (3) この過程で、ピストン上面の大気がピストンにした仕事は $W =$  ホ [J]である。また、容器内の空気がピストンにした仕事は $W' =$  へ [J]である。一方、空気の定圧モル比熱を $C_p$  [ $\text{J/mol} \cdot \text{K}$ ]とすれば、容器内の空気の内部エネルギーの減少量は $U =$  ト [J]と表される。したがって、容器内の空気から外へ取り出された熱量はチ [J]となる。(ただし、チに記入する式は、 $U$ 、 $W$ 、 $W'$ の中から適当なものを選び、それらを用いて表せ。)

(1991年 京都大)



<NOTE>

## ◆第7回 熱力学総論②◆

### <予習問題>

【1】同じ形の二つのシリンダーが、図1のように向き合って水平に固定されている。一定の長さの軸で連結された左右のピストンは、いっしょになめらかに動くことができる。シリンダーとピストン、および軸は熱を伝えないが、ピストンと軸の中に熱伝導のための金属線が通しあって、

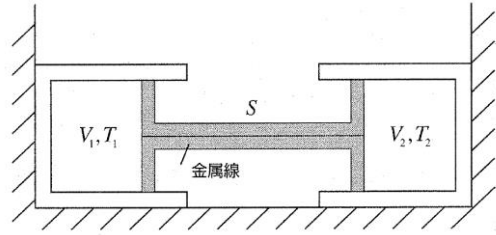


図1

熱スイッチ  $S$  を閉じることにより、左右のシリンダー内の気体の間で、熱をゆっくり流すことができる。ピストンの断面積は  $A$ 、左右のピストンと軸および金属線の全質量は  $M$  で、左右のシリンダーの中には、それぞれ  $1\text{mol}$  の単原子分子理想気体が封入されている。気体定数は  $R$  とする。

はじめ、熱スイッチ  $S$  は開いていて、ピストンは静止していた。(以下ではピストンのこの位置を平衡の位置とよぶ。) このとき、左シリンダー内の気体の体積と絶対温度は、それぞれ  $V_1, T_1$  であり、右シリンダー内の気体の体積と絶対温度は、それぞれ  $V_2, T_2$  で  $T_1 > T_2$  であった。

以下の設問では、金属線の熱容量は無視して答えよ。また 1 に比べて十分に小さい量があったとき、その二次およびそれ以上の微小量は無視せよ。必要があれば  $|x|$  と  $|y|$  が 1 より十分小さいときに成り立つ近似式  $1/(1+x) \doteq 1-x$  ,  $(1+x)(1+y) \doteq 1+x+y$  を用いよ。解答は結果だけでなく、導き方も簡単に記せ。

(1) ピストンの軸を手でもち、これを右へゆっくりとわずかに動かした。その結果、左シリンダー内の気体の体積と温度が、それぞれ  $V_1 + \Delta V_1$  ,  $T_1 + \Delta T_1$  に変化した。このときの左シリンダー内の気体がなした仕事  $W_1$  を  $V_1, T_1, \Delta V_1, R$  を用いてあらわせ。ただし、体積変化の割合  $|\Delta V_1/V_1|$  は 1 に比べて十分に小さいとする。

さらに、熱力学の第1法則(エネルギー保存の法則)を用いて、 $\Delta T_1$  を  $V_1, T_1, \Delta V_1$  で表せ。

(2) 設問(1)で、左シリンダー内の気体の圧力がわずかに変化した。この変化  $\Delta P_1$  を

$$\Delta P_1 = -\frac{1}{K_1} \frac{\Delta V_1}{V_1}$$

と表す。 $K_1$  を求めよ。

(3) ここで、ピストンの軸から手を放したところ、左右の圧力差によって、ピストンは平衡の位置を中心とする単振動を始めた。その振動数  $f$  を  $V_1, V_2, K_1, A, M$  を用いて表せ。

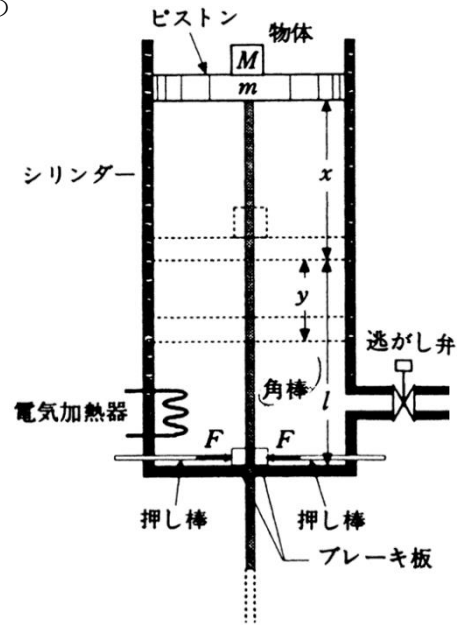
(4) ピストンを再び平衡の位置に静止させて、はじめの状態にもどしてから、熱スイッチ  $S$  を閉じて熱をゆっくりと流し、右シリンダー内の気体の温度が  $T_2 + \Delta T_2$  となったとき、 $S$  を開いた。 $|\Delta T_2/T_2|$  は 1 に比べて十分に小さかった。このときの左シリンダー内の気体の体積と温度が、それぞれ  $V_1'$ 、 $T_1'$  となった。

左シリンダー内の気体の温度変化  $T_1' - T_1$  と、体積変化  $V_1' - V_1$  および左シリンダー内の気体から右シリンダー内の気体へ流れた熱量  $Q$  を、 $T_2$ 、 $V_2$ 、 $\Delta T_2$ 、 $R$  を用いて表せ。

(1984年 東京大)

【2】 次の文を読んで  に適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図のように、鉛直方向に滑らかに動く質量  $m$  [kg] のピストンを備えた断面積  $A$  [m<sup>2</sup>] のシリンダーがある。ピストンには質量の無視できる角棒が取り付けられており、ブレーキ板で角棒を挟み、ブレーキをかけるようになっている。角棒とブレーキ板との間の静止摩擦係数は  $\mu$ 、運動摩擦係数は  $\lambda$  である。角棒とシリンダー底板との間に摩擦はない。また、シリンダーには逃がし弁と電気加熱器が備わっている。逃がし弁が開いているとき、内部の空気の圧力と温度は大気圧  $p$  [N/m<sup>2</sup>] と温度  $T$  [K] にそれぞれ等しく、空気はシリンダーと外部との間で抵抗なく移動できる。逃がし弁が閉じているとき、内部の空気は密閉され、シリンダー壁やピストンなどの周囲とシリンダー内の空気の間で熱のやりとりはない。シリンダーと逃がし弁の間の管の体積、角棒、ブレーキ板、押し棒および電気加熱器の体積と熱容量は無視できる。また、空気を理想気体と考え、気体定数を  $R$  [J/(mol · K)]、空気の定圧モル比熱を  $C_p$  [J/(mol · K)]、定積(定容)モル比熱を  $C_v$  [J/(mol · K)] とする。



(1) 逃がし弁を開いた状態で、ブレーキ板が押し棒により左右からおのおの  $F$  [N] の力で押しつけられており、ピストンは静止している。ピストンの上に質量  $M$  [kg] の物体をそっと載せたところピストンは動かなかった。重力加速度を  $g$  [m/s<sup>2</sup>] で表すと、押し棒に加えられている力  $F$  [N] の最小値は  [N] になる。

(2) (1) の状態でピストン上の物体を鉛直方向に持ち上げ落下させた。物体はピストンに衝突した後、ピストンと一体となって初速度  $v$  [m/s] で下方に運動をはじめ、最初のピストン位置から  $x$  [m] 下がって静止した。物体がピストンに衝突した後、静止するまでの物体とピストンの加速度は下向きを正として  [m/s<sup>2</sup>] で、ピストンの方が下がった距離  $x$  [m] は  [m] である。このとき、一体となって運動する物体、ピストンおよび角棒に対して重力と摩擦力がした仕事は  [J] である。

(3) (2) で静止した状態で、ピストン下面とシリンダー底までの距離は  $l$  [m] であった。ピストン上の物体を取り除いて逃がし弁を閉じたのち、押し棒を引っ張り、ブレーキ板を角棒から離れたところ、ピストンはゆっくりと  $y$  [m] 下がった。理想気体の断熱変化に対しては、定圧モル比熱  $C_p$  [J/(mol · K)] と定積(定容)モル比熱  $C_v$  [J/(mol · K)] との比  $C_p/C_v$  を  $\gamma$  とするとき、気体の圧力と体積の間に (圧力) × (体積) <sup>$\gamma$</sup>  = 一定の関係が成り立つ。この関係より、 $y$  および  $l$  を用いれば、シリンダー内の空気の温度は  ×  $T$  [K] で、圧力は  ×  $p$  [N/m<sup>2</sup>] で表される。

(4) 次いで、シリンダー内の空気を電気加熱器で $t$  [s]間加熱すると、ピストンは $y$  [m]上昇しもとの位置に戻った。電気加熱器の抵抗は $r$  [ $\Omega$ ], 加熱時に流れる電流は $i$  [A]で、電気加熱器で発生した熱はすべて空気に加えられる。このとき、ピストン上面の大気がピストンにした仕事は  ト  [J]である。また、シリンダー内の空気のモル数は  チ  [mol]であり、加熱によるシリンダー内空気の温度上昇 $\Delta T$  [K]と加熱時間 $t$  [s]およびピストンの上昇した距離 $y$  [m]との関係は、 $\Delta T =$   リ  で表される。

(1993年 京都大)

【3】 次の文を読んで、には適した式を、{ }には正しい番号を一つ選び、それぞれの解答欄に記入せよ。また(1)、(2)、(3)には適切な説明を所定の枠内に記入すること。

熱力学は気体だけではなく、さまざまな対象にも適用することができる。本問ではひも状の物体の熱力学を考えてみよう。あるひも状の物体を引き伸ばし、長さが $L_{\min}$ から $L_{\max}$ の範囲内で張力 $X$ を測定したところ、 $X$ は長さ $L$ に依存せず、絶対温度 $T$ および正の定数 $A$ を用いて $X=AT$ と表された。この物体の変形としては、 $L$ が $L_{\min}$ から $L_{\max}$ の範囲内にある一次元的な伸縮のみを考え、また内部エネルギー $U$ は正の定数 $C$ を用いて $U=CT$ となるとして、以下の問いに答えよ。

〔I〕 この物体に外から微小仕事 $\Delta W$ を加えて微小量 $\Delta L$ だけ伸ばしたときに、 $\Delta W = X\Delta L$ という関係式が成り立つ。吸熱量を $\Delta Q$ 、内部エネルギーの変化を $\Delta U$ としたとき、熱力学第一法則より $\Delta U$ は、 $\Delta Q$ 、 $A$ 、 $T$ 、 $\Delta L$ を用いて $\Delta U =$  あと表される。一方 $U=CT$ より、物体を伸ばしたときの温度変化 $\Delta T$ を用いて、内部エネルギーの変化は $\Delta U =$  いとも書ける。

断熱的に物体をゆっくりと微小量 $\Delta L$ 伸ばしたときの温度変化 $\Delta T$ は、 $C$ 、 $A$ 、 $T$ 、 $\Delta L$ を用いて表すとうとなり、温度は{え：①下降する。②変わらない。③上昇する。}ただし、 $\Delta L > 0$ とする。

〔II〕 さて、この物体を断熱的にゆっくりと伸ばした。そのとき $L - \frac{C}{A} \log T$ が一定であつた。ここで、 $\log T$ は $T$ の自然対数である。

(1) この理由を述べよ。ただし、正の変数 $T$ を $T + \Delta T$ までわずかに変化させたときの

$\log T$ の変化量を $\Delta \log T$ と表すと、 $\frac{\Delta \log T}{\Delta T} = \frac{1}{T}$ が成り立つことを用いてよい。

〔III〕 次に、同じ物体を温度 $T$ に保ったまま、長さ $L_0$ から $L$ までゆっくりと変化させたときに物体に外から加えられた仕事はおであり、その間の吸熱量はかである。ただし、

おおよびかは $A$ 、 $T$ 、 $L_0$ 、 $L$ のみで表すこと。

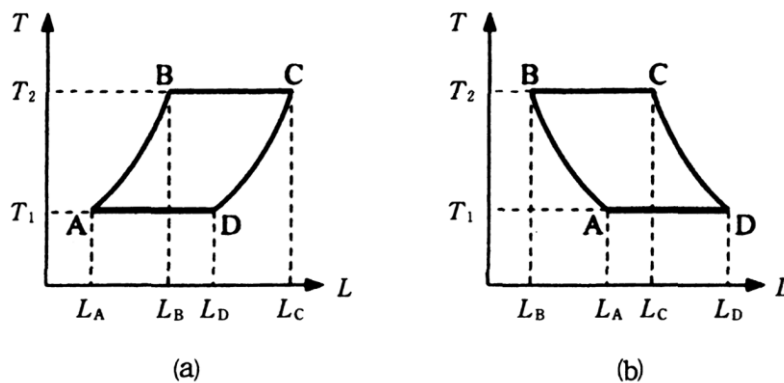


図1

[IV] 図1のように横軸を物体の長さ $L$ とし、縦軸を温度 $T$ としてこの物体の状態変化を表す。物体を温度 $T_2$ に保ちゆっくりと等温変化をさせ、その後ゆっくりと $T_1$ まで断熱変化させ、さらに温度 $T_1$ でゆっくりと等温変化をさせた後、断熱的にゆっくりと温度 $T_2$ の初めの状態に戻すサイクルを考えよう。高温熱源（温度 $T_2$ ）から熱を吸収して仕事をし、低温熱源（温度 $T_1$ ）に熱を放出するようなサイクルは、

{き： ① (a)を時計回りに回る。 ② (a)を反時計回りに回る。  
 ③ (b)を時計回りに回る。 ④ (b)を反時計回りに回る。}

(2) このサイクルでは、 $L_C - L_B$ と $L_D - L_A$ が等しくなる。その理由を述べよ。

[V] 一般にサイクルでの熱効率は、物体がサイクルを通じて外にする正味の仕事を、高温熱源から吸収する熱量 $Q_{in}$ で割った量として導入される。よって、サイクルを動かす間の熱効率は、 $Q_{in}$ とサイクルを動かす間に放出する熱量 $Q_{out}$ を用いて  と書ける。

(3) これまでの結果を用いて、[IV] のサイクルの熱効率が  $1 - \frac{T_1}{T_2}$  となる理由を説明せよ。

(2007年 京都大)

### <演習問題> (25分)

【1】次の文を読んで、には適した式を、また{ }からは正しいものを選びその番号を、それぞれの解答欄に記入せよ。

(1) 一般に熱の出入りを伴わない状態変化を断熱変化と呼ぶが、気体の断熱変化では、変化の各段階で平衡状態が実現しているならば、 $(\text{圧力}) \times (\text{体積})^\gamma = \text{一定}$ という関係が成り立つ。べき定数 $\gamma$ は気体の種類によって異なるが、必ず1より大きい値をもつ。以下では、空気に対するべき定数を、 $\gamma$ と表す。

空気は断熱性がよいので、大気中の空気のゆっくりとした移動は、断熱変化とみなすことができる。いま、こうした断熱変化をくりかえした結果、大気の圧力や温度は、高度によって決定されているとしよう。また、空気1molあたりの質量を $w$ とし、この値は高度によらず一定とする。このとき、地表の気温を絶対温度で $T_0$  (以下、温度はすべて絶対温度とする)、気体定数を $R$ 、地表における空気の密度を $\rho_0$ とすれば、地表における大気の圧力はあで与えられる。また、ある高度における大気の温度を $T$ とするとき、その高度での大気の圧力はい、密度はうと表される。

(2) さて、大気が上に述べたような状態にあるときに、熱気球を飛ばすことを考えてみよう。気球は断熱性の布でできており、気体の部分を除いた気球の質量は $M$ である。最初、気球は空気が入っていない体積0 (ゼロ) の状態であった。飛ばないように気球を固定し、気球の下部が開いた状態で、外気を熱して温度 $T_1$ にした空気を体積えだけ詰めたところ、気球は浮かび始めた。さらに続けて、温度 $T_1$ の空気を気球の体積が $V$ になるまで入れた。このときの気球内の空気の物質量はおmolである。また、空気の定積モル比熱を $C_V$ とすると、気球内に入った空気には、もとの大気の状態からかの熱が加えられ、内部エネルギーはきだけ増加したことになる。

(3) ここで、気球の下部を閉じ、固定をはずして気球を飛ばしたところ、ある高度まで上がって静止した。気球内の空気の温度 $T_1$ と体積 $V$ が変化しないとすると、この高度での大気の温度はくである。さらに、気球の下部を開き、体積は $V$ のまま気球内の空気の温度をけにしたとき、気球の高度は変わらなかった。このときの気球内の空気の温度は、{こ: ① $T_1$ より高い, ② $T_1$ より低い, ③ $T_1$ と同じである}。

(2006年 京都大)



<NOTE>

## ◆第8回 波動方程式◆

### <重要事項>

○ 正弦波の式 (基本)  $y = A \sin \omega t = A \sin \frac{2\pi}{T} t = A \sin 2\pi f t$

**位相** — 媒質がどの振動状態にあるかを表す。

※媒質の単振動を表す等速円運動の回転角のこと。

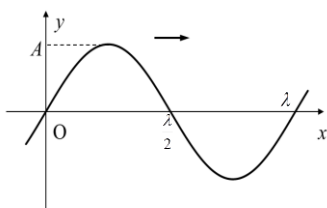
位置  $x$  における波の式の作り方

- ① 原点における媒質の単振動を表す式  $y_0(t)$  をつくる。(初期位相により  $\sin, \cos$  など)
- ② 位置  $x$  まで波 (振動状態) が伝わってくる時間を考えて  $t$  を  $t \pm \frac{x}{v}$  に置き換える。

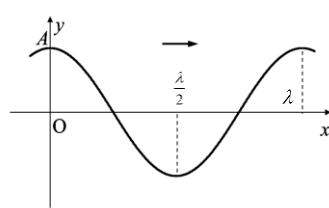
### <必須典型問題>

波長  $\lambda$ , 振動数  $f$  の正弦波があり,  $t=0$  での波形は図のようにになっている。矢印は波の進む向きを示している。これらの波の式を求めよ。

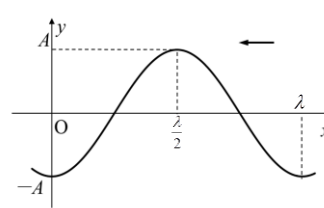
(1)



(2)



(3)



### 【解答】

(1)  $y_0 = A \sin(\omega t + \pi) = -A \sin 2\pi f t$  より,

$$y_x = -A \sin 2\pi f \left( t - \frac{x}{v} \right) = -A \sin 2\pi f \left( t - \frac{x}{\lambda f} \right) = -A \sin \left( 2\pi f t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

(2)  $y_0 = A \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos 2\pi f t$  より,

$$y_x = A \cos 2\pi f \left( t - \frac{x}{v} \right) = A \cos 2\pi f \left( t - \frac{x}{\lambda f} \right) = A \cos \left( 2\pi f t - \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

(3)  $y_0 = A \sin \left( \omega t + \frac{3\pi}{2} \right) = -A \cos 2\pi f t$  より,

$$y_x = -A \cos 2\pi f \left( t + \frac{x}{v} \right) = -A \cos 2\pi f \left( t + \frac{x}{\lambda f} \right) = -A \cos \left( 2\pi f t + \frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

<予習問題>

【1】無限に長い管の中での空気の振動について考える。 $x$  軸を管に沿って図 1 のようにとる。平面波とみなせる音速  $v$  の音波が  $x$  軸正の向きに進んでいる。以後この波を入射波と呼び、簡単のため管の内壁の影響は考えないことにする。

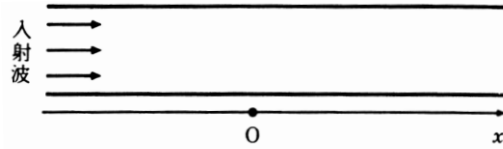


図 1

(1)  $x$  軸の原点  $O$  で入射波の変位  $y_1$  を調べたら時刻  $t$  の関数として  $y_1 = A\sin(2\pi ft)$  となっていた。ここで変位の正の向きは  $x$  軸正の向きとし、 $A$  と  $f$  は正の定数である。

- (a) 位置  $x$ , 時刻  $t$  における入射波の変位  $y_1$  を求めよ。
- (b) 時刻  $t = 0$  において空気が最も密となる位置  $x_A$  を求めよ。

(2) 次に図 2 のように原点  $O$  の位置に壁を作り、壁の左側における空気の振動について考える。空気の変位  $y$  を入射波の変位  $y_1$  と反射波の変位  $y_R$  の重ね合わせとして調べよう。必要なら以下の式を用いてもよい。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

- (a) 時刻  $t$  における壁の位置での反射波の変位  $y_R$  を求めよ。
- (b) 一般の位置  $x$ , 時刻  $t$  における反射波の変位  $y_R$  を求めよ。
- (c) 位置  $x$ , 時刻  $t$  における変位  $y$  を計算せよ。また変位の腹の位置  $x_B$  を求めよ。

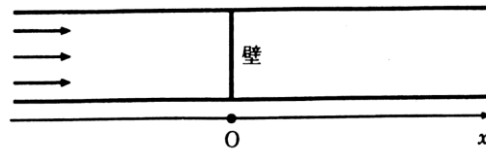


図 2

(3) 最後に図 3 のように壁が速さ  $v_0 (> 0)$  で右へ移動している場合、壁の左側の空気の振動について考える。時刻  $t$  における壁の位置  $X$  は  $X = v_0 t$  で与えられ、 $v_0$  は音速より十分小さく空気の流れはおこらないとする。反射波の振動数  $f_R$  および位置  $x$ , 時刻  $t$  における反射波の変位  $y_R$  を求めよ。解答欄には考え方・計算方法を簡潔に記せ。

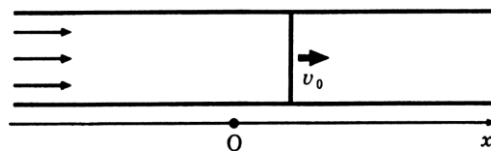
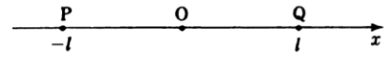


図 3

(2000 年 大阪大・後期)

【2】図に示すように、水面上に距離  $2\ell$  だけ離れた点 P, Q に波動発生装置を置き振幅  $A$ , 波長  $\lambda$ , 周期  $T$  の波を同時に発生させた。PQ を結ぶ線を  $x$  軸とし、その中点に原点 O をとる。このとき、 $x$  軸に沿った水面の変位だけを考えると、2つの波が重なりあい、定常波をつくったとする。

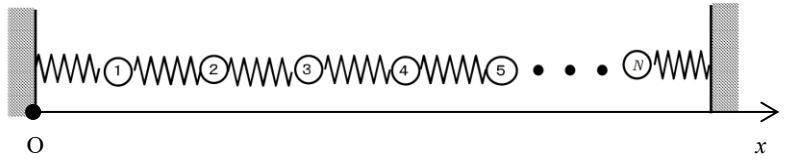


波の式を、位置  $x$ , 時刻  $t$  を変数として  $A \sin(bt + cx + d)$  と表すことにし、壁などによる波の反射や波動発生装置によって定常波の形がくずれないものとして、以下の問いに答えよ。

- (1) P 点および Q 点から正の方向に進む波、また、Q 点から負の方向に進む波の式を  $A$ ,  $\lambda$ ,  $T$  および  $\ell$  を用いて示せ。
- (2) P 点から正の方向に、Q 点から負の方向に進む波を合成したとき、波の式が  $x$  を変数とする関数  $f(x)$  と、 $t$  を変数とする関数  $g(t)$  の積で表されることを示し、 $f(x)$ ,  $g(t)$  を求めよ。必要であれば、三角関数の公式  $\sin(X \pm Y) = \sin X \cos Y \pm \cos X \sin Y$  を使用せよ。
- (3)  $x = \ell/2$  で、いつでも腹になるためには、波長はどのような条件を満足すればよいか。また、そのときの定常波の式を 1 つ示せ。
- (4)  $x = \ell/2$  で、いつでも節になるためには、波長はどのような条件を満足すればよいか。また、そのときの定常波の式を 1 つ示せ。

(横浜市立大)

【3】ばね定数が  $K$  で自然長が  $L_0$  のばねが  $N+1$  本ある ( $N$  は自然数)。ばねはフックの法則に従い、



ばね自体の質量や空気抵抗の影響は無視できるとする。

図のように、 $N$  個の質量  $M$  の小物体をばねで連結し、摩擦のない水平な床上を動くようにする。最も左のばねの左端と最も右端は壁に固定されており、壁の間隔は  $(N+1)L$  である ( $L > L_0$  とする)。左の壁面に原点をもつ  $x$  軸を図のようにとり、 $N$  個の小物体が  $x$  軸上を運動

する場合を考える。



以下の問いに答えよ。

ただし、結果だけでなく、考え方および計算の過程も示せ。

(1) 左から  $n$  番目 ( $n=1, 2, 3, \dots, N$ ) の小物体の、つりあいの位置から  $x$  軸正方向への変位を  $u_n$ 、加速度を  $a_n$  としたとき、その小物体の運動方程式は

$Ma_n = K(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$  となることを導け。ただし、 $u_0 = 0$ 、 $u_{N+1} = 0$  とする。

$N$  が十分に大きいときの  $N$  個の小物体の縦波運動を考える。今の場合の進行波の進む速さは、波長  $\lambda$  に依存して変化する。すなわち、周期  $T$  と  $\lambda$  とは比例関係にない。

そこで、 $T$  と  $\lambda$  の関係を調べよう。

(2) まず、周期  $T$  で波長  $\lambda$  の  $x$  軸正方向への進行波  $u_n = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{nL}{\lambda} \right) \right]$  と

$x$  軸負方向への進行波  $u_n = B \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{nL}{\lambda} \right) \right]$  とを考える。ここで、 $A$  と  $B$  は定数で

ある。この二つの進行波の重ね合わせによって縦波定常波が生じる。左の壁面が固定端

であることを用いて、この定常波が  $u_n = 2A \sin \left( 2\pi \frac{nL}{\lambda} \right) \sin \left( 2\pi \frac{t}{T} \right)$  で表されることを

示せ。

(3) (2) の定常波は各小物体の単振動を表している。これが (1) の運動方程式を満たすためには、周期  $T$  と波長  $\lambda$  との間に、ある関係が成り立たねばならない。

このときの  $T$  を  $\lambda$ 、 $K$ 、 $L$ 、 $M$  を用いて表せ。

(1999年 東北大)

<演習問題> (25分)

【4】多数の質点が、互いにばねによってつながれて、直線状になっているものを考える。質点の質量を  $m$ 、バネ定数を  $G$  とする。

平衡状態では、図1 (平衡状態) のように、すべての質点が静止していて、隣りあう質点の間隔は  $d$  である。ある質点が直線に沿った方向に振動すると、それが音波などに見られる縦波 (疎密波) となって、次々に他の質点に伝わってゆく。その振動の様子は、

図1 (振動状態) のように、各質点の平衡状態での位置、 $\bar{x}_n = nd$  からの変位  $z_n = x_n - \bar{x}_n$

の時間変化によって表される。この媒質中を  $x$  の正方向に進む波は、たとえば、

時刻  $t$  での変位、 $z_n = A \sin(\omega t - kx_n) \cdots (1)$  で表される。(ただし、 $A > 0$ 、 $\omega > 0$ 、 $k > 0$

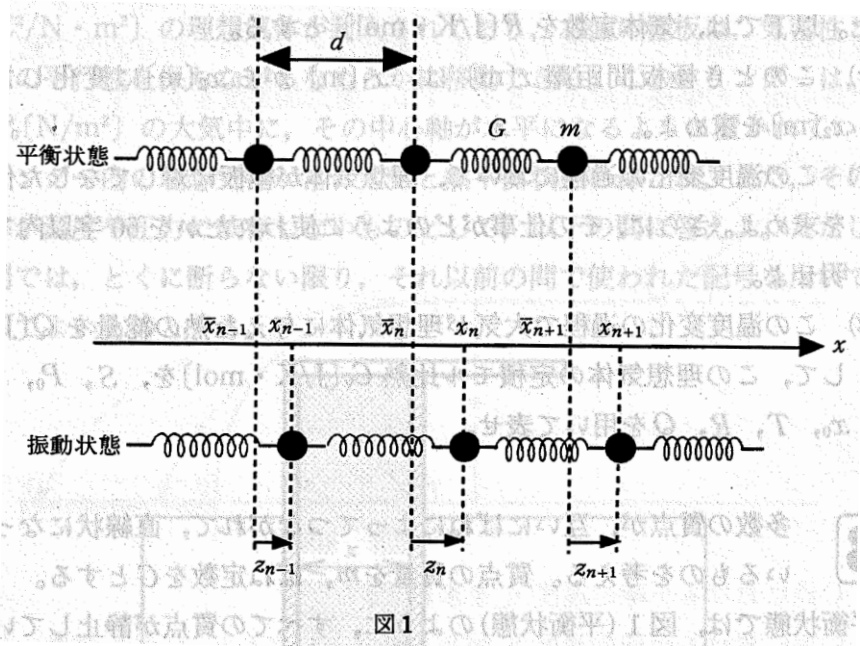
とする。) 波長が  $d$  よりもずっと長い場合のみを考えることにすると、(1)式の波は連続な

媒質を伝わっていくと考えてよい。そのとき、波の速さ  $v = \sqrt{\frac{G}{m}} d$ 、また、(1)の波が

運ぶエネルギーは、単位時間当たり  $S = \frac{\omega^2}{2d} m v A^2$  である。

(a) (1)式の波の波長と振動数を求めよ。

(b) 波の速さ  $v$  を(1)の  $\omega$  と  $k$  で表せ。



次に、バネ定数  $G$ 、および質点の間隔  $d$  が同じで、質点の質量が異なる ( $M \neq m$ ) 2つの媒質を図2のようにつないだものを考える。この媒質に上の(1)式で表される波が左から進入したとする。以下でも、波の波長は  $d$  に比べて十分長いものとせよ。

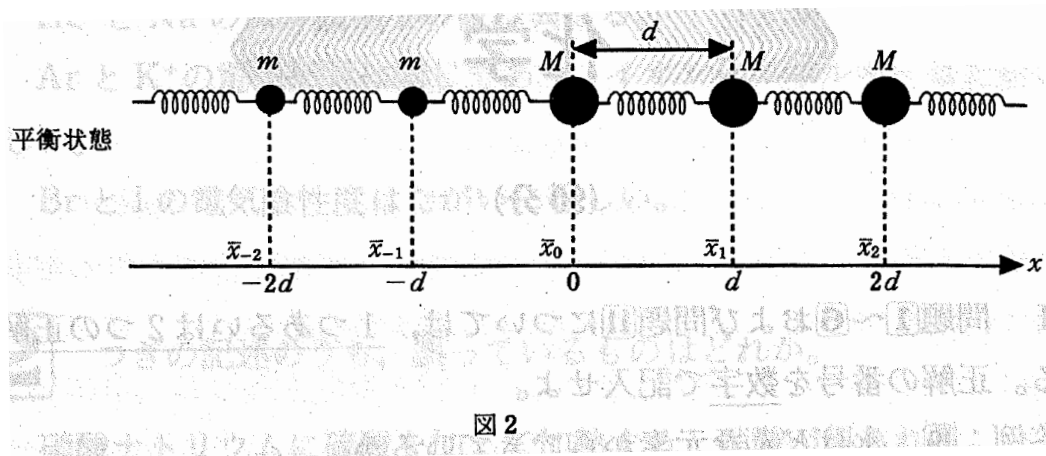


図 2

- [A] 質量  $M$  が  $m$  に比べて非常に大きいときには、入射波(1)は  $x=0$  で完全に反射される。反射波は入射波と重ね合わせられて定常波ができた。
- (c) この定常波における  $z_n$  ( $n < 0$ ) の時間的変化を入射波と反射波の重ね合わせとして表す式を求め、空欄を埋めよ。

$$z_n = ( \quad ) + A \sin(\omega t - kx_n)$$

- (d) この定常波の節はどこにできるか。  $x \leq 0$  の範囲で  $x=0$  に最も近い 2 つの節の位置を求めよ。波の波長は  $d$  の偶数倍であると仮定してよい。
- [B] 質量  $M$  が  $m$  に比べて非常に小さいときには、  $x > 0$  には波を伝える媒質がないものとする。  $x=0$  で反射された反射波は入射波と同じ振幅をもっている。
- (e) この場合の  $z_n$  ( $n < 0$ ) を表す式を求め、空欄を埋めよ。

$$z_n = ( \quad ) + A \sin(\omega t - kx_n)$$

- [C]  $M=4m$  のとき、光の波がガラス面などに入射したときに起こるように、入射波の一部が反射されて振幅  $B$  で  $x$  負の向きに、残りは振幅  $C$  で  $x$  正の向きに伝わってゆく。このとき、  $x=0$  での波の変位の連続性の条件より、  $A-B=C$  が成り立つ。ここで  $A$ ,  $B$ ,  $C$  は正である。
- (f)  $B$  と  $C$  を  $A$  で表せ。

(1994 年 東京工業大)

<NOTE>



<NOTE>

## ◆第9回 単スリット回折・Nスリット回折①◆

<重要事項>

■単スリットとは・Nスリットとは（講義）■



### <予習問題>

【1】次の文章を読んで、(1)～(3)に答えよ。

光の干渉について考えよう。図1のように4つのスリット $S_1 \sim S_4$ を持つつい立てとスクリーンがある。スリットの左からはつい立てに垂直に単一波長 $\lambda$ の平行光線がくるとする。スリット $S_i$ のみを開けて他を閉じた場合を考えよう。図のようにスクリーン上の点 $O$ を原点とした点 $P$ の座標を $x$ とする。つい立てとスクリーンの間の距離 $L$ は $OP$ の長さに比べ十分大きく、スリット $S_i$ からの時刻 $t$ における光波は点 $P$ 上で

$$F_0 = A \sin 2\pi \left( \frac{L_i}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

とあらわせるとする。ここで $L_i$ は $S_i$ と $P$ の距離、 $\lambda$ は波長、 $T$ は周期、 $A$ は時間によらない振幅である。強度 $I_0$ は、 $F_0$ の2乗の時間的平均( $F_0^2$ )で与えられ、交流の実効値の計算と同様に、

$$I_0 = \langle F_0^2 \rangle = A^2 \langle \sin^2 2\pi \left( \frac{L_i}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \rangle = \frac{A^2}{2}$$

であることが知られている。

まず、 $S_3$ と $S_4$ を閉じて、 $S_1$ と $S_2$ からの光波のみを考える。

$L_1^2 - L_2^2$ を $x$ と $d$ であらわすと

$$L_1^2 - L_2^2 = \boxed{\text{(ア)}}$$

である。 $L$ は $d$ や $|x|$ に比べ十分大きいので、 $L_1 + L_2 \cong 2L$ と考えてよい。

したがって

$$L_1 - L_2 = \boxed{\text{(イ)}}$$

となる。点 $P$ での $S_1$ と $S_2$ からの光波の合成を調べると

$$\begin{aligned} F_1 &= A \sin 2\pi \left( \frac{L_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + A \sin 2\pi \left( \frac{L_2}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \\ &= \boxed{\text{(ウ)}} \end{aligned}$$

となり、スクリーン上の強度 $I_1$ は $F_1^2$ の時間的平均であるから

$$I_1 = 2A^2 \cos^2 2\pi \left( \frac{xd}{2L\lambda} \right) \quad \text{①}$$

となる。この強度は $x$ に関して図2(a)のようにふるまい、スクリーン上には干渉じまが現れる。

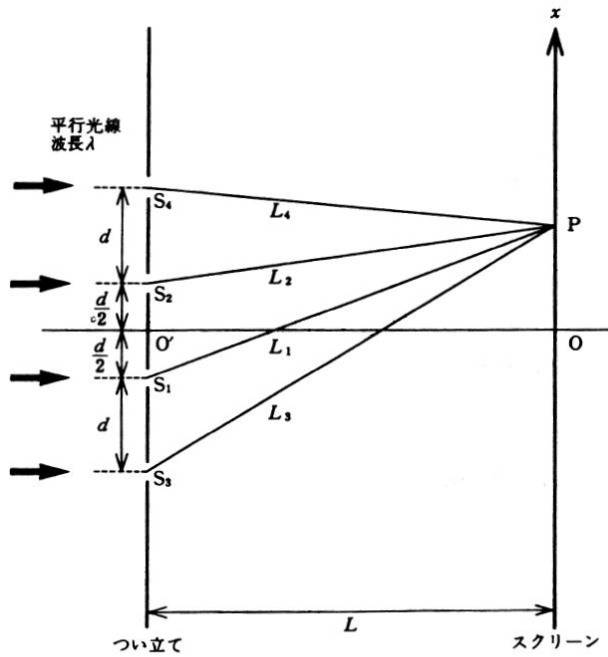


図 1

この結果、明線と暗線の位置 $x$ は

$$x = \frac{L\lambda}{2d} \times \begin{cases} 2m & \dots\dots\dots \text{明線} \\ (2m+1) & \dots\dots \text{暗線} \end{cases} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots\dots)$$

と表される。

次に、 $S_1$ と $S_2$ を閉じ、 $S_3$ と $S_4$ を開け、点Pでの $S_3$ と $S_4$ からの光波の合成を調べると

$$F_2 = A \sin 2\pi \left( \frac{L_3}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + A \sin 2\pi \left( \frac{L_4}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

$$= \text{〔エ〕}$$

となり、スクリーン上の強度 $I_2$ は $F_2^2$ の時間的平均であるから

$$I_2 = \text{〔オ〕} \quad \text{②}$$

となる。この場合、明線の間隔は $I_1$ の場合に比べて〔カ〕倍になる。

さらに、 $S_1, S_2, S_3, S_4$ を開けた場合の点Pでの光波の合成を調べると

$$F_3 = A \sin 2\pi \left( \frac{L_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + A \sin 2\pi \left( \frac{L_2}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + A \sin 2\pi \left( \frac{L_3}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + A \sin 2\pi \left( \frac{L_4}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

$$= \text{〔キ〕}$$

である。スクリーン上の強度 $I_3$ は $F_3^2$ の時間的平均であるから

$$I_3 = \text{〔ク〕} \quad \text{③}$$

である。この結果、式③の最大値は式①の最大値の〔ケ〕倍であることが分かる。

ここでは、4つのスリットの場合までを調べたが、これを等間隔に並んだ多数のスリットの場合に拡張すれば、スリットの数が多いほど明線が鋭く現れることが分かる。

必要ならば

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

または

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 2 \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

を用いよ。

- (1) 上の文中の空欄 (ア) ~ (ケ) を  $A, d, L, t, T, x, \lambda$  を用いた式または数値で埋めよ。
- (2) ②と③に対応するグラフを下の図 2(a)~(f)の中から選べ。
- (3) 単色光のかわりに白色光を用いると干渉じまはどうか説明せよ。

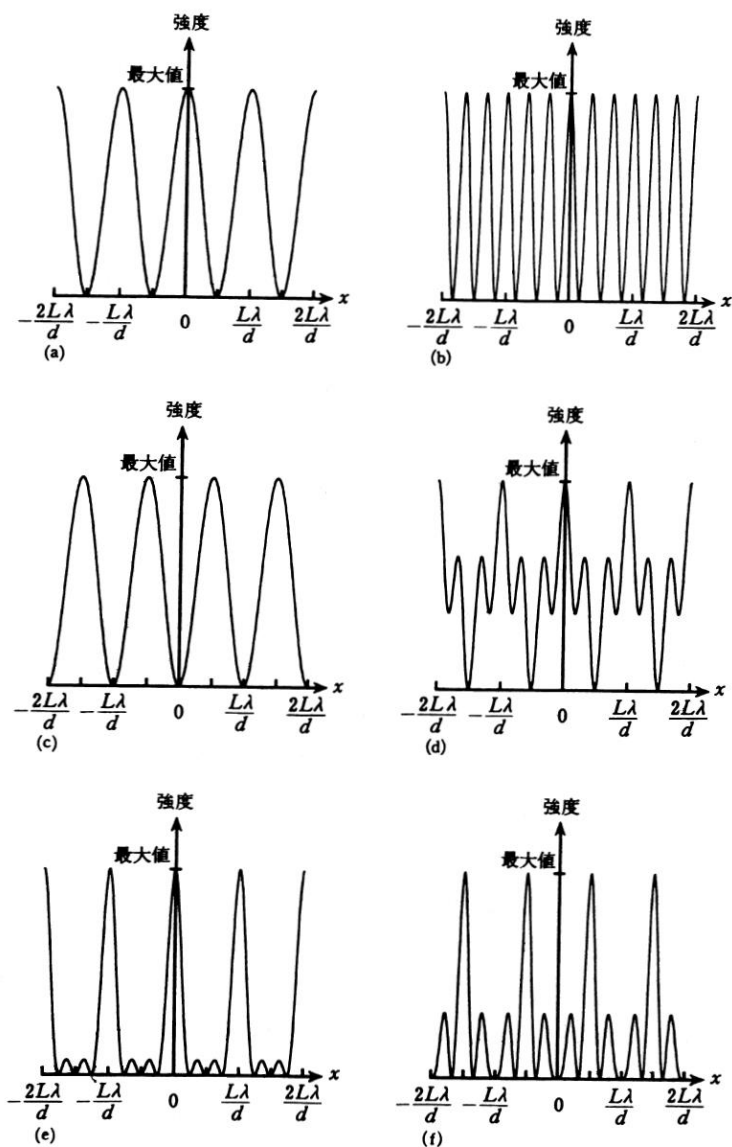


図 2

(1997年 神戸大)

<NOTE>

## ◆第 10 回 単スリット回折・N スリット回折②◆

### <予習問題>

【1】次の文を呼んで、に適した式または数をそれぞれの解答欄に記入せよ。

格子定数  $d$  [m] で  $N$  個のスリットを持つ回折格子に、図 1 のように波長  $\lambda$  [m] の平行光線を垂直に入射させる。スリットを  
通って角度  $\theta$  [rad] 方向に回折する光を  $d$  に比べて十分遠方の  
点で観測するとき、隣り合うスリットを通る光の道のりの  
差は  あ  [m] となり、位相差は  $\Delta =$   い  [rad] である。  
そして、整数  $m$  を用い、 $\Delta$  が  う  と表されるとき、全ての  
回折光が強め合って明線となる。以下、この位相差を  
 $\Delta_m$  [rad] とする。整数  $m$  を明線の次数という。

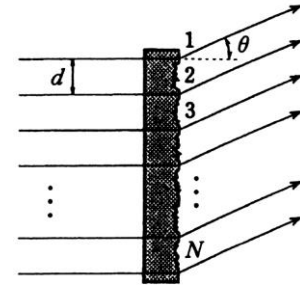


図 1

光は一種の波動であり、正弦波で表すことができる。光の強度は振幅の 2 乗に等しい  
ので、各スリットからの光の波の振幅を  $A_0$  とすると、明線の位置での光の強度  $K_0$  は、  
 $N$ ,  $A_0$  を使って  $K_0 =$   え  と表される。実際には、明線と明線との間には弱い回折光  
が現れる。以下では、 $m$  次と  $(m+1)$  次の明線の間での回折光の振舞いを一般的に考察  
する。なお、必要に応じて、微小な角  $\alpha$  に対して、 $\sin \alpha \cong \alpha$ ,  $\cos \alpha \cong 1$  と近似しても  
よい。

観測点でのスリット 1 からの光の波の変位は、図 2(a) のように、大きさ  $A_0$  の  
ベクトル  $\vec{A}_1$  の  $y$  軸への射影に対応し、その位相は  $x$  軸と  $\vec{A}_1$  とのなす角に対応する。

ここで、 $N$  個の各スリットからの光の波を同じ大きさ  $A_0$  を持つベクトル  $\vec{A}_1$ ,  $\vec{A}_2$ ,  
 $\vec{A}_3$ , ...,  $\vec{A}_N$  で表そう。隣り合うスリットからの光の位相差は全て  $\Delta$  であるので、  
これらのベクトルは、 $\Delta_m$  からのずれを  $\delta = \Delta - \Delta_m$  として、図 2(a) のように表される。

重ねあわされた光のベクトル  $\vec{A}_S = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \dots + \vec{A}_N$  は、図 2(b) のように表せ、その

強度は  $|\vec{A}_S|^2$  で与えられる。



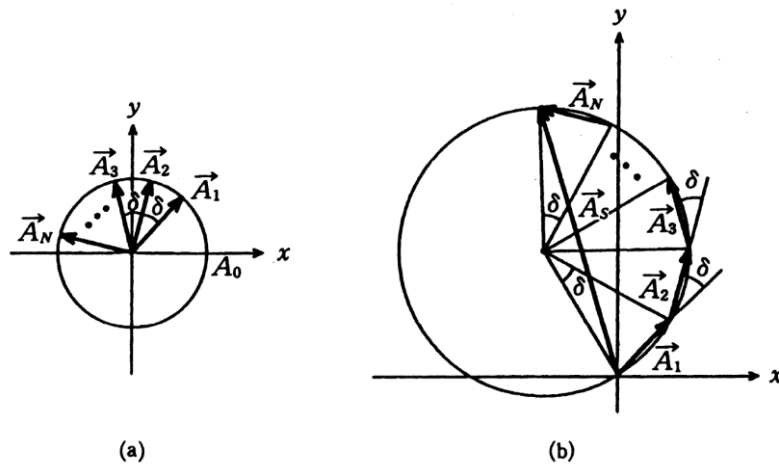


図 2

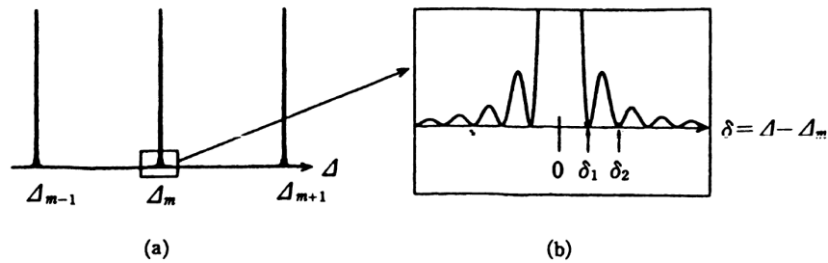


図 3

図 3(a)は、位相差 $\Delta$ を横軸にとり、 $m$ 次と $(m \pm 1)$ 次の明線を含む光の強度を示したものである。

図 3(b)は、図 3(a)の横軸を $\delta$ にとり、 $m$ 次の明線の付近を拡大したものであるが、重ね合わされた光の強度 $|\vec{A}_S|^2$ が厳密に 0 となる点が存在する。これらの点は、

図 2(b)のベクトル $\vec{A}_S$ の大きさが 0 となる条件から決まる。 $\delta=0$ から数えて  $n$  番目のこのような点は $\delta = \boxed{\text{お}}$ で与えられる。以下、これを $\delta_n$ と書く。

次に、任意の $\delta$ での回折光の強度 $|\vec{A}_S|^2$ を求める。図 2(b)のように $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \dots, \vec{A}_N$ の始点と終点がすべて同一の円周上にあることに着目すると、 $A_0, \delta, N$ を用いて $|\vec{A}_S|^2 = \boxed{\text{か}}$ となる。図 3(b)の $\delta_1$ と $\delta_2$ の間には極大値が現れるが、この値は $\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ での $|\vec{A}_S|^2$ の値 $K_1$ に非常に近い。この強度 $K_1$ と明線の位置での強度 $K_0$ の比は $N$ が非常に大きいときには一定の数となり、 $\pi$ を用いて $\frac{K_1}{K_0} = \boxed{\text{き}}$ と書ける。

したがって、この極大値は図3に示されるように、明線の位置での光の強度に比べて小さいことがわかる。

$m$  次の明線の位相差 $\Delta_m$ に対応して  $m$  次の明線が観測される角度を $\theta_m$  [rad]、位相差 $\Delta_m + \delta_1$ に対応して回折光の強度が0になる角度 $\theta_m'$  [rad]を $\theta_m + \beta_m$ とする。

角度 $\theta_m'$  方向での隣り合うスリットからの光の道のりの差は、 $\lambda$ 、 $N$ 、 $m$  を用いて

と表される。 $N$  が非常に大きいときには、 $\beta_m$  は非常に小さくなり $\beta_m = \frac{b_m}{N}$  と書け、 $b_m$  は

$d$ 、 $\lambda$ 、 $\theta_m$  を用いて  $b_m =$   と表される。

以上の考察から、非常に多数のスリットを持つ回折格子によって作られる明線は、非常に強く、鋭いピークを形成することが定量的に理解できる。

(1997年 京都大)

【2】以下の問の答を解答用紙の該当欄に記入せよ。

はじめに、水面上を広がる波について考えよう。静水面を  $xy$  平面とする。

問1 水面上の波源  $S$  が一定の振動数  $f$  で振動し、水面に波が広がっている。

図1のように、 $xy$  平面上での  $S$  の位置は原点に固定されているものとする。

時刻  $t=0$  に  $S$  を出た波の山は時刻  $t=T$  において  $S$  を中心とした半径  $3L$  の円であり、その内側には  $S$  を中心としてそれぞれ半径  $2L$ ,  $L$  の山が観測された。波源の振動数  $f$  を求めよ。

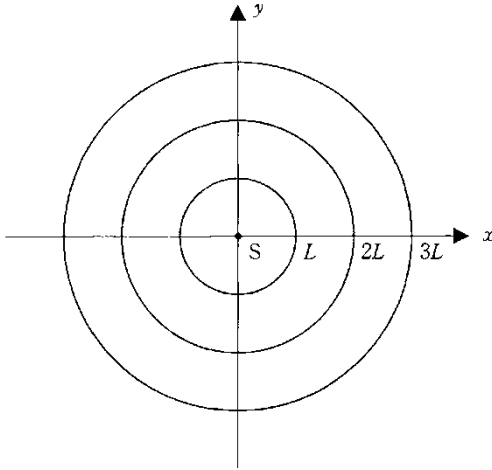


図1

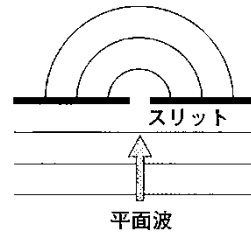


図2

問2 問1と同じ波源  $S$  が、 $xy$  平面上を  $x$  軸正の方向に一定の速度  $V = \frac{3L}{2T}$  で

動いている。時刻  $t=0$  において  $S$  は原点にあり、波の山を発した。時刻  $t=T$  における

$S$  の位置を黒丸( $\bullet$ )で示すとともに、その時刻における波の山のうち  $t \geq 0$  に  $S$  を

出たものを図1にならって図示せよ。ただし、解答欄(省略)に点線で描かれた格子の間隔は  $L$  である。

つぎに、スリットによる光の回折について考えよう。

図2に示すように、スリットの面に垂直に、波長  $\lambda$  の平面波の光を入射する。

スリットは紙面に垂直な方向に十分長く、またその幅は十分狭いため、スリットを通過した光は回折によって広がり、紙面上で円形波とみなせる。

問3 図3に示すように、スリットの数をも2本に増やし、その間隔を  $w$  とする。

スリットの面に垂直な方向から角度  $\theta$  の方向に距離  $R$  だけ離れた観測点  $P$  における明るさ(光の強度)を  $\theta$  を変えながら測定したところ、 $\theta=0$  の付近では図4

のようになった。図中に示した  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  について  $\sin \theta_1$ ,  $\sin \theta_2$  を求めよ。ただし、 $R$  は  $w$  に比べて十分大きく、それぞれのスリットと  $P$  を結ぶ直線は平行とみなせるものとする。

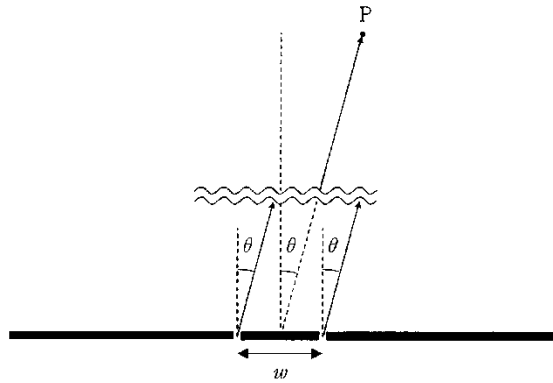


図 3

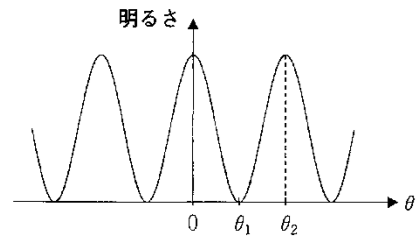


図 4

問 4 図 5 に示すように、スリットの数を 5 本に増やし、隣り合うスリットの間隔を左から順に  $60d$ 、 $30d$ 、 $45d$ 、 $45d$  とする。問 3 と同様の測定をしたところ、 $P$  における明るさは  $\theta=0$  の付近では図 6 のようになった。図中に示した  $\theta_3$  について  $\sin \theta_3$  を求めよ。ただし、 $R$  は  $d$  に比べて十分大きいものとする。



図 5

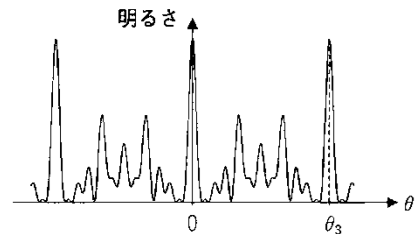


図 6

さらに、スリットの幅が無視できない場合について考える。

図 7 に示すように、幅  $D$  の単スリットに対して問 3 と同様の測定をしたところ、 $P$  における明るさは  $\theta=0$  の付近では図 8 のようになった。この理由について考えよう。ただし、 $R$  は  $D$  に比べて十分大きいものとする。

$P$  における光の波は、スリットに入射した光の波面上の各点を波源とする円形波（素元波）が  $P$  において重なり合ってつくられると考えることができる。そこで、図 9 に示すように、スリットの内側を  $2N$  等分した小さな線分に分け、それぞれの線分の中点  $Q_1 \sim Q_{2N}$  から円形波が発生し、それらが  $P$  において重なり合うと考えよう。

まず、 $N=1$  の場合(図 10)は問 3 で考えた 2 重スリットと等価である。

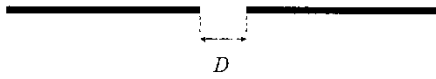


図7

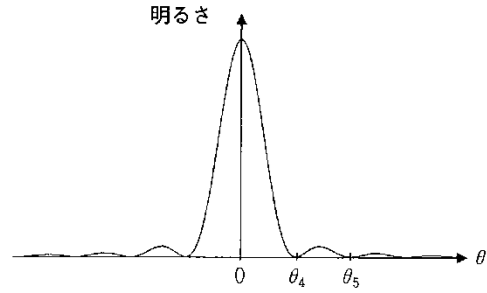


図8

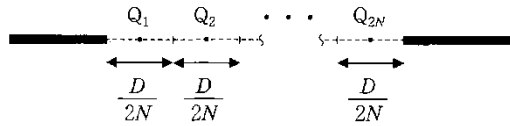


図9

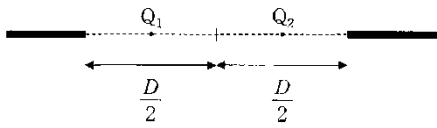


図10

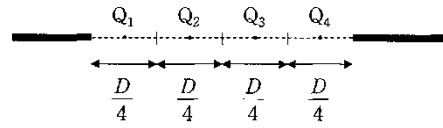


図11

問5 つぎに、 $N=2$ の場合（図11）について、 $\theta$ を0から少しずつ大きくしていった

とき、Pにおける明るさが最初に0となる $\theta$ を $\theta_4'$ 、2回目に0となる $\theta$ を $\theta_5'$ としよう。

4つの波源を2つずつ対にして考えれば、Pにおける明るさが0になるとき、それぞれの波源の対に関してPにおける波の打ち消し合いの条件が成り立っている。

波源の対の選び方に複数の組み合わせがあることに注意して、 $\sin\theta_4'$ 、 $\sin\theta_5'$ を求めよ。

問6 同様にしてNを大きくしていくことで、図8における $\theta_4$ 、 $\theta_5$ を求めることができる。 $\sin\theta_4$ 、 $\sin\theta_5$ を求めよ。

(2013年 早稲田大)

【3】暗箱に小さな円形の穴（ピンホール）を開け、これを通して外部の物体をスクリーン上に投影する図1のような装置をピンホールカメラと呼ぶ。実際には物体の一点から出た光がピンホールを通過してスクリーンに達するとき、次の二つの要因によってボケが生じる。

- A. 点光源から出た光が直進し、スクリーン上に写しだすピンホールの大きさ： $w_1$
- B. 回折による光の広がり： $w_2$

この結果、点光源はスクリーン上において大きさ $(w_1 + w_2)$ の像をつくると考えよう（図2）。この光の像が小さいほどボケは少なくカメラの性能（分解能）は良い。この二つの光の広がりを以下の考察にしたがって導き、最も分解能の良いピンホールカメラを設計しよう。

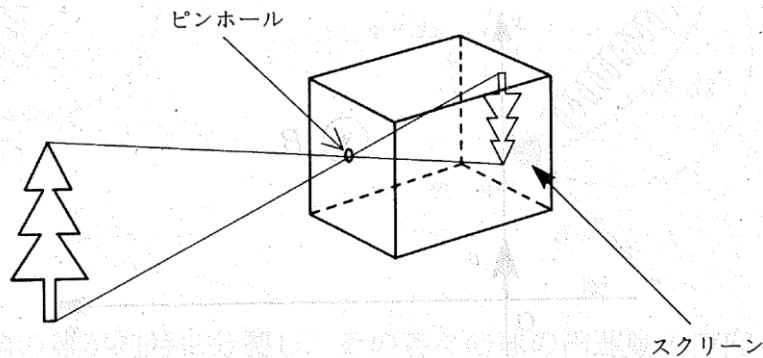


図1

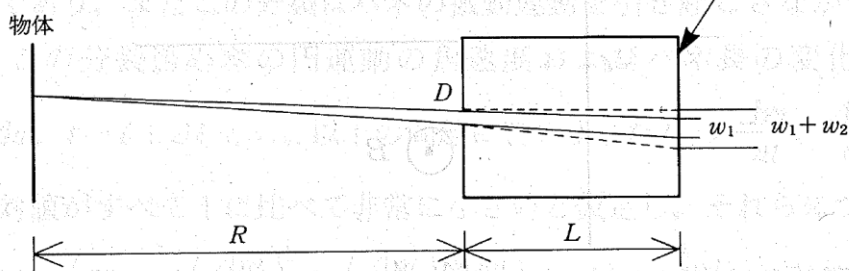


図2

- 〔I〕 図2のように物体とピンホールの距離を  $R$ 、ピンホールとスクリーンの距離を  $L$ 、ピンホールの直径を  $D$  としたときの  $w_1$  を求めよ。
- 〔II〕 考察を容易にするために、直径  $D$  のピンホールを通った光の回折広がりとは幅  $D$  の単スリットを通った平行光線の回折広がりと同じとする。  
これを以下のように求めよう。
- (1) 単スリットによる光の回折を求めるために、まずよく知られた複スリットによる光の回折を考察する。図3のように左方から波長  $\lambda$  の平行光が、距離  $2d$  だけ離れた十分幅の狭い二つのスリット  $S_1$ 、 $S_2$  に垂直に入射し、スリットから距離  $L$  離れたスクリーンに干渉縞をつくる。図3のようにスクリーン上に座標軸  $x$  をとり、スクリーン上にできる干渉縞の暗い部分の位置を  $x = a$  としたとき、 $\lambda$ 、 $d$ 、 $L$ 、 $a$  が満たすべき条件を求めよ。

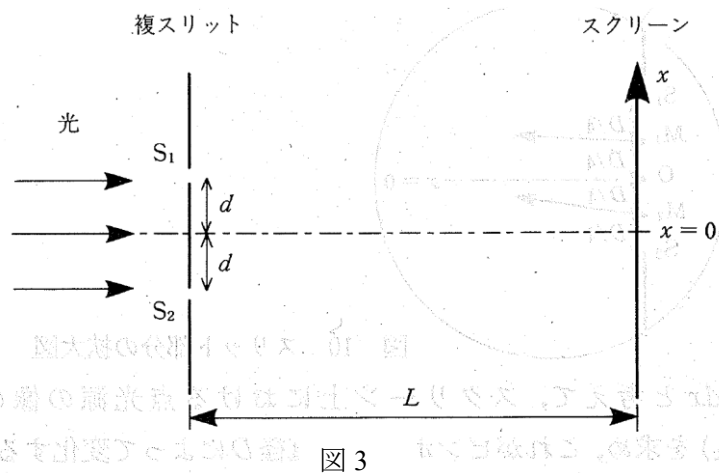


図 3

(2) 図 4 のように複スリットを幅  $D$  の単スリットに置き換える。単スリットを通過した光は回折のためスリット幅よりも広がり、スクリーン上で図 5 のような干渉縞をつくることが知られている。この光の広がりをおよびの考え方にしたがって求めよう。

図 6 のようにスリットを  $S_1O$ 、および  $OS_2$  の長さの等しい二つの部分に分け、それぞれを通る光の光路を各部分の中心  $M_1$ 、 $M_2$  を通る光線の光路で代表させる。すなわち図 5 の干渉縞は、 $M_1$ 、 $M_2$  を通過する光の干渉によって現れると考える。スクリーン上において  $x=0$  の上下で最初に暗くなる位置を  $x_1$ 、 $x_2$  とすると光の広がり  $\Delta x$  は、 $\Delta x = |x_1 - x_2|$  と近似してよい。  $\Delta x$  を求めよ。  $D$ 、 $\lambda$  は  $L$  に比べ十分に小さいものとする。このとき次の近似式を用いてよい。

$$|\alpha| \ll 1 \text{ のとき } \sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha$$

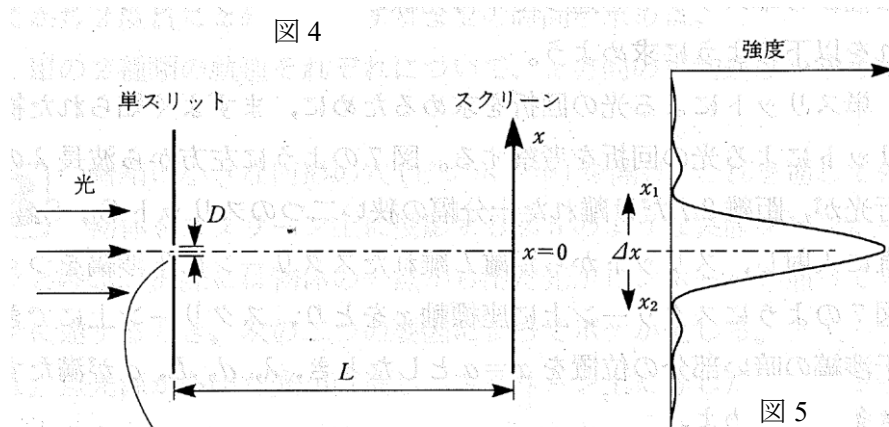


図 4

図 5

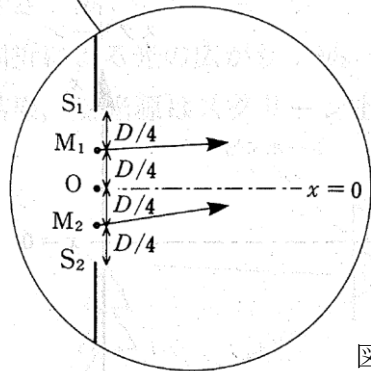


図 6 スリット部分の拡大図

[Ⅲ]  $w_2 = \Delta x$  と考えて、スクリーン上における点光源の像の大きさ( $w_1 + w_2$ )を求め、これがピンホールの直径  $D$  によって変化する様子を示すグラフをかけ。次に像の大きさを最小にするピンホールの直径  $D_0$  を、 $R$  ,  $L$  ,  $\lambda$  を用いて表せ。

[Ⅳ]  $L = 0.1\text{m}$  のピンホールカメラで  $R = 0.9\text{m}$  の位置に置かれた大きさ  $0.1\text{m}$  の人形を撮影したい。光の波長が  $\lambda = 5 \times 10^{-7}\text{m}$  のとき以下の問いに答えよ。

- (1) このとき像のボケの大きさを最小にするピンホールの直径  $D_0$  の値を求めよ。
- (2) スクリーン上での像の大きさを求めよ。また  $D = D_0$  のとき、像のボケの大きさ ( $w_1 + w_2$ )はいくらになるか。

(1996年 東京大一後期)



<演習問題> (20分)

【1】幅  $a$  の狭いスリットに、レーザー光のような単色光を通すと、図1のように十分遠方の距離  $l$  にあるスクリーン上に明暗の縞ができる。空气中で波長  $\lambda$  の平行な光をスリットに垂直に入射させたとき、最初の暗い縞の位置は次のように考えて求めることができる。スリット幅の上端を  $A$ 、下端を  $B$ 、中点を  $M$  とし、また  $AM$  の中点を  $M_1$ 、 $MB$  の中点を  $M_2$  とする。 $AM$  を通る光の束と  $MB$  を通る光の束とのスクリーン上での重なりで明暗の縞を説明するものとし、 $AM$  を通る光の束は  $M_1$  を通る光線、 $MB$  を通る光の束は  $M_2$  を通る光線で代表されたとする。図1のように  $\angle OMP = \theta$  であるスクリーン上の点  $P$  には、

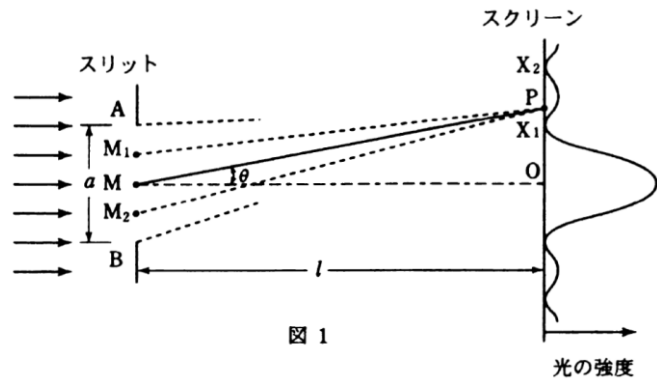


図 1

$M_1$ 、 $M_2$  を通りほぼ  $\theta$  の角で進んだ光線が重なるものとする。

- (1) この2つの光線のみちのりの差はどれほどか、 $a$ 、 $\theta$  で示せ。
- (2) この2つの光線のみちのりの差が最短で、スクリーン上で弱め合う条件を、 $a$ 、 $\theta$ 、 $\lambda$  を用いて示せ。

このときの  $\theta$  がスクリーン上の点  $X_1$  に現れる最初の暗い縞の方向である。

距離  $OX_1$  は  $l$  に比べて十分小さく、 $\sin\theta = \tan\theta = \theta$  とおけるとき、

- (3)  $OX_1$  を  $a$ 、 $l$ 、 $\lambda$  で示せ。

なお、この縞模様は

- (4)  $a$  を小さくすると、拡がるか、狭まるか、それとも変わらないか。

幅  $a$  のスリットのかわりに、十分に狭いスリットを等間隔  $d$  で多数並べた回折格子を入射光に垂直に置いた場合は、図2のように距離  $l$  のスクリーン上には何本かの鋭い明線ができる。

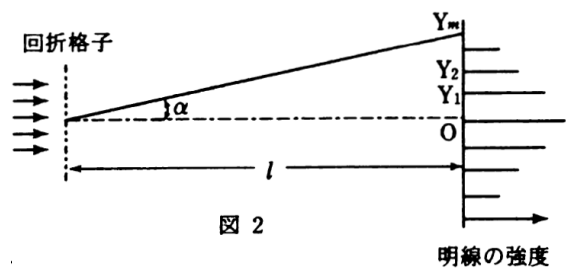


図 2

- (5) 各スリットから角  $\alpha$  の方向に進む光がスクリーン上の点  $Y_m$  で互いに強め合い  $m$  番目の明線をつくるとき、 $\sin\alpha$  を  $d$ 、 $\lambda$ 、整数  $m$  で示せ。ただし回折格子の大きさは  $l$  および距離  $OY_1$  に比べて十分小さいとする。
- (6)  $O$  近くの明線の間隔はどれほどか、 $d$ 、 $l$ 、 $\lambda$  で示せ。ただし、 $OY_1$ 、 $OY_2$ 、 $\dots$  は  $l$  に比べて十分小さいとする。

(7) 明線の強度は中央の O で最も強く、O から離れるにつれて減少する。この現象の主な理由と考えられるものを (イ) ~ (ホ) の中から一つ選び、記号で答えよ。

(イ) 光が完全にはコヒーレント (可干渉性) でないため。

(ロ) 完全な平行光でないため。 (ハ) 回折格子の大きさが有限なため。

(ニ) スリットに幅があるため。 (ホ) 真空でなく空気があるため。

(千葉大)

<NOTE>

<NOTE>

<NOTE>

## ◆第 11 回 ドップラー効果◆

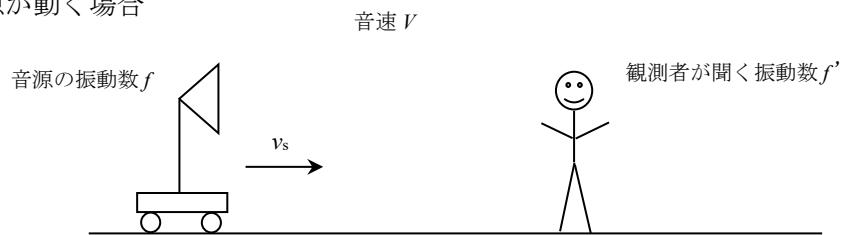
### <重要事項>

#### ■ ドップラー効果 ■

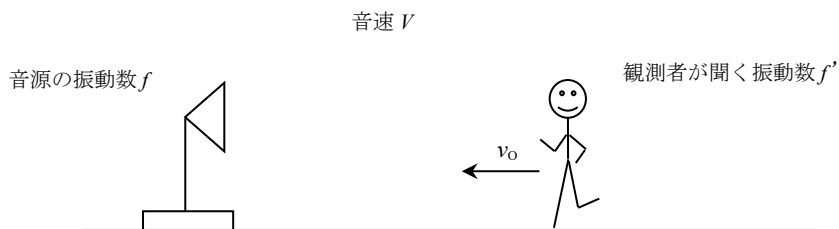
解法のコツ

- ① 音源が出す波長を考える。
- ② その波長の音をどういう音速で観測者が聞いたのかを考える。
- ③  $v = \lambda f$

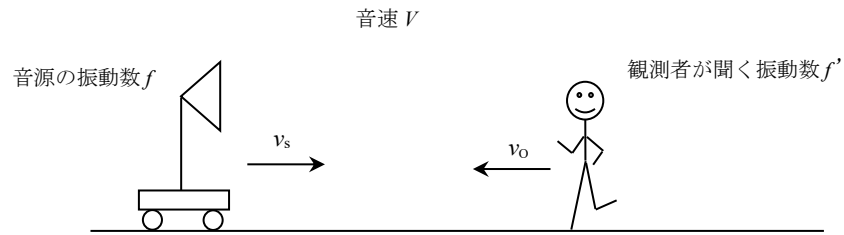
(i) 音源が動く場合



(ii) 観測者が動く場合



(iii) 音源と観測者が動く場合



(iv) 反射板のはたらき

①観測者⇒②音源として考える。

(v) 風が吹いている場合

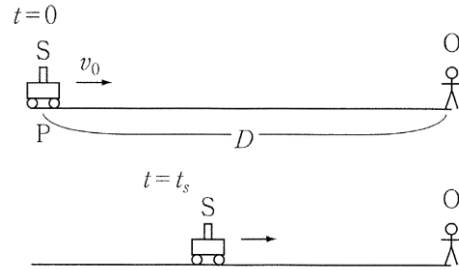
音速の変化を考慮する。

(vi) 斜めに動く場合

音源または観測者の速度を成分分解する。

<予習問題>

【1】一定の加速度で加速しながら近づいてくる音源の音は時間とともにどのように変化するか考察してみよう。図のように音源  $S$  は時刻  $t=0$  において距離  $D$  離れた点  $P$  を観測者  $O$  に向かって走っており、そのときの速さは  $v_0$  であった。音源から出される音の周波数は  $f_0$ ，音速は  $V$  であり，音源の速さは音速  $V$  を超えないものとして，以下の問いに答えよ。



〔I〕最初に音源の速さが  $v_0$  で一定であった場合を考えよう。

- (1) 時刻  $t_s (> 0)$  から時刻  $\Delta T$  の間に音源  $S$  から発射された波の個数はいくらか求めよ。ただし，1 波長の波を 1 個と数えることとする。
- (2) 時刻  $t_s + \Delta T$  において，時刻  $t_s$  で発射された波面と音源との間の距離を求めよ。
- (3) 観測者  $O$  に聞こえる音の周波数を求めよ。

〔II〕次に音源  $S$  が一定の加速度  $a (> 0)$  で加速している場合を考える。〔I〕と同様に，音源  $S$  は時刻  $t=0$  において点  $P$  を観測者  $O$  に向かって走っており，その速さは  $v_0$  であった。

- (1) 時刻  $t_s (> 0)$  から微小時間  $\Delta T$  の間に音源  $S$  から発射された波の個数はいくらかを求めよ。
- (2) 時刻  $t_s + \Delta T$  において，時刻  $t_s$  に発射された波面と音源  $S$  との間の距離を求めよ。ただし，加速度  $a$  は十分小さく，微小時間  $\Delta T$  の間に音源の速さは変化しないものとする。
- (3) 音源  $S$  から時刻  $t_s$  に発射された音を観測者  $O$  が聞いた。このとき，観測者  $O$  に聞こえる音の周波数を求めよ。
- (4) 音源  $S$  が観測者  $O$  に到達する時刻を求めよ。
- (5) 音源  $S$  が距離  $D$  離れた点  $P$  から観測者  $O$  を通り過ぎるまでの間に音源  $S$  から発射された音を，観測者  $O$  が聞いた。このとき，観測者  $O$  に聞こえる音の周波数の範囲を求めよ。

〔III〕音波は音源  $S$  から観測者  $O$  に伝わるまでに時間を要するので，観測者  $O$  が時刻  $t$  に聞く音はそれより以前に音源  $S$  から発射された音波である。いま，〔II〕と同じく音源  $S$  が一定の加速度  $a (> 0)$  で加速している場合を考える。時刻  $t=0$  における音源  $S$  の速さは  $v_0$ ，音源  $S$  と観測者  $O$  との間の距離は  $D$  である。

- (1) 時刻  $t_s$  に音源  $S$  から発射された音が観測者  $O$  に届くまでの時間を求めよ。
- (2) この音波が観測者  $O$  に届く時刻  $t$  は  $t_s$  に (1) で求めた時間を加えたものである。このことを利用して， $t_s$  を， $D$ ， $V$ ， $v_0$ ， $a$  および  $t$  を用いて書き表せ。
- (3) 時刻  $t$  において観測者  $O$  に聞こえる音の周波数を， $D$ ， $V$ ， $v_0$ ， $a$ ， $f_0$  および  $t$  で書き表せ。ただし，時刻  $t$  には音源  $S$  はまだ観測者  $O$  を通り過ぎていないものとする。

(千葉大)



【2】図1のように、振動数 $f_0$ の音を発する音源が、O点で静止している観測者に向かって、一定の速さ $v$ でまっすぐに進んでいる。音源は、時刻 $t = 0$ にA点を通過し、時刻 $t = \Delta t (\Delta t > 0)$ にA'点を通過した。無風状態での音速を $c$ として、風の状態が以下のⅠ、Ⅱ、Ⅲそれぞれの場合に、観測者が聞く音の振動数を考えよう。以下の文中の□に適切な数式を書き入れよ。ただし、音源の移動する速さ $v$ 、風速 $w$ は、ともに音速 $c$ に比べて十分に小さいものとする。

〔Ⅰ〕まず、風のない状態( $w = 0$ )について考えよう。A点で時刻 $t = 0$ に発した音の波面は、時刻 $t = t_1$ にO点に達した。また、A'点で時刻 $t = \Delta t$ に発した音の波面は、時刻 $t = t_1 + \Delta t_1$ にO点に達した。時間 $\Delta t$ の間に音源が発した音を時間 $\Delta t_1$ の間に観測者が

聞くので、観測者が聞く音の振動数 $f_1$ は、 $f_0$ 、 $\Delta t$ 、 $\Delta t_1$ を用いて、 $f_1 = \square (1)$ と

表される。AO間の距離 $d$ は $d = ct_1$ 、A'O間の距離 $d'$ は $d' = c(t_1 + \Delta t_1 - \Delta t)$ で与え

られる。したがって、 $\frac{\Delta t}{\Delta t_1}$ は、 $v$ 、 $c$ を用いて、 $\frac{\Delta t}{\Delta t_1} = \square (2)$ と表される。これらのこと

から、観測者が聞く音の振動数 $f_1$ は、 $v$ 、 $c$ 、 $f_0$ を用いて、 $f_1 = \square (3)$ と表される。

〔Ⅱ〕図2のように、突然、風が $\overrightarrow{AO}$ の向きに吹き始める場合について考えよう。

時刻 $t = 0$ では風は吹いていなかった。A点で時刻 $t = 0$ に発した音の波面がO点に達する前の時刻 $t = t_0$ に、速さ $w$ の風が、 $\overrightarrow{AO}$ の向きにすべての場所でいっせいに吹き始めた。その後、この音の波面は、時刻 $t = t_2 (t_2 > t_0)$ にO点に達した。また、風が吹き始める前の時刻 $t = \Delta t (\Delta t < t_0)$ に音源はA'点を通過し、A'点で発した音の波面は、時刻 $t = t_2 + \Delta t_2$ にO点に達した。このとき、AO間の距離 $d$ は、 $t_0$ 、 $t_2$ 、 $w$ 、 $c$ を

用いて、 $d = \square (4)$ と表され、A'O間の距離 $d'$ は $t_0$ 、 $t_2$ 、 $\Delta t$ 、 $\Delta t_2$ 、 $w$ 、 $c$ を

用いて、 $d' = \square (5)$ と表される。したがって、 $\frac{\Delta t}{\Delta t_2}$ は、 $v$ 、 $w$ 、 $c$ を用いて、

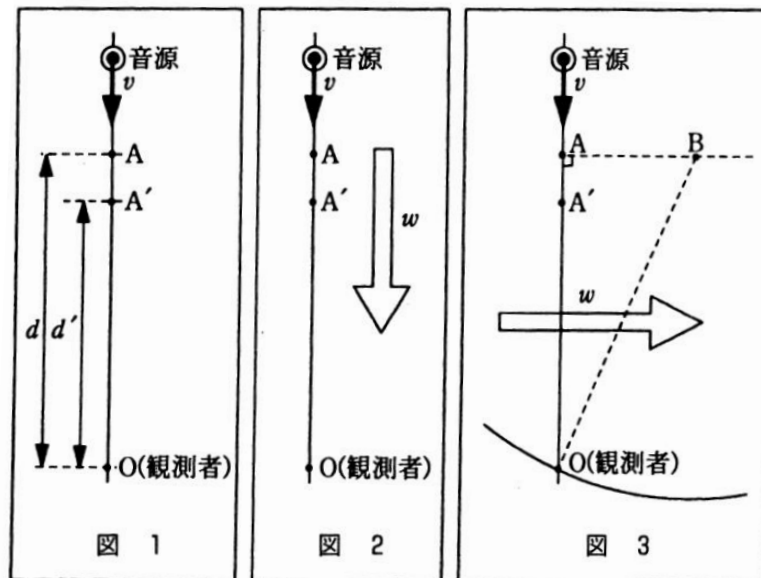
$\frac{\Delta t}{\Delta t_2} = \square (6)$ と表される。これらのことから、観測者が聞く音の振動数 $f_2$ は、

$v$ 、 $w$ 、 $c$ 、 $f_0$ を用いて、 $f_2 = \square (7)$ と表される。

その後、音源がO点を通過する前に、O点の観測者が聞く音の振動数は $f_2$ から $f_2'$ に

変化した。振動数 $f_2'$ は、 $v$ 、 $w$ 、 $c$ 、 $f_0$ を用いて、 $f_2' = \square (8)$ と表される。

〔Ⅲ〕 図 3 のように、速さ  $w$  の一様な風が常に真横に吹いている場合について考えよう。  
 A 点で時刻  $t = 0$  に発した音の波面は、時刻  $t = t_3$  に O 点に達した。そのときの波面を表す円の中心を B 点とする。AB 間の距離  $s$  は、 $t_3$  を含んだ式で、 $s = \boxed{\text{(9)}}$  と表される。また、BO 間の距離  $s'$  は、 $t_3$  を含んだ式で、 $s' = \boxed{\text{(10)}}$  と表される。このとき、AO 間の距離  $d$  は、 $t_3$ 、 $w$ 、 $c$  を用いて、 $d = \boxed{\text{(11)}}$  と表される。音源は、時刻  $t = \Delta t$  に A' 点を通り、A' 点で発した音の波面は、時刻  $t = t_3 + \Delta t_3$  に O 点に達した。したがって、 $\frac{\Delta t}{\Delta t_3}$  は、 $v$ 、 $w$ 、 $c$  を用いて表され、これらのことから、観測者が聞く音の振動数  $f_3$  は、 $v$ 、 $w$ 、 $c$ 、 $f_0$  を用いて、 $f_3 = \boxed{\text{(12)}}$  と表される。



(2004 年 大阪大)

【3】図1のように、音波をよく反射する高さ  $H$  の鉛直断崖の下部にトンネルがある。トンネルの手前、入口からの距離が  $X$  の地点を  $P$  とする。一定の速さ  $u$  でトンネルに近づいてきた列車の先頭が、時刻  $t=0$  に地点  $P$  を通過した。その瞬間に列車の先頭にある振動数  $f_0$  の警笛が鳴り始め、列車の先頭がトンネルに進入した瞬間に警笛は鳴り終えた。

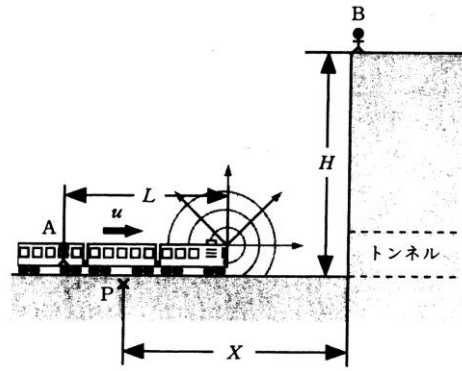


図1

列車の先頭から距離  $L$  だけ離れた客車中には A 君が、また断崖上の縁には B 君がいる。A 君には振動数が  $f_1$  と  $f_2$  ( $f_1 < f_2$ ) の2つの異なる高さの警笛音が届いた。一方、B 君には振動数  $f_B$  の警笛音が届いた。以下の問いに答えよ。ただし、音速は  $V$  である。また、列車の高さ、トンネルの大きさ、A 君および B 君の背の高さは無視してよい。

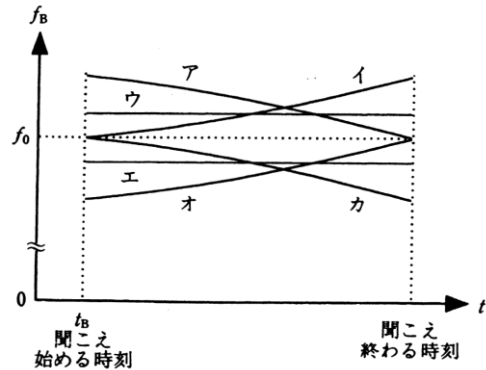


図2

〔I〕 A 君には警笛音がどのように聞こえたか。次の(ア)~(エ)の中から正しいものを一つ選べ。

- (ア) まず低い方の振動数  $f_1$  の警笛音が聞こえ、少しして振動数  $f_2$  の警笛音が混じりうなりが聞こえた。その後、うなりが消えると同時に何も聞こえなくなった。
- (イ) まず低い方の振動数  $f_1$  の警笛音が聞こえ、少しして振動数  $f_2$  の警笛音が混じりうなりが聞こえた。その後、まずうなりが消え、振動数  $f_2$  の警笛音が少しの間残ったのちに何も聞こえなくなった。
- (ウ) まず高い方の振動数  $f_2$  の警笛音が聞こえ、少しして振動数  $f_1$  の警笛音が混じりうなりが聞こえた。その後、うなりが消えると同時に何も聞こえなくなった。
- (エ) まず高い方の振動数  $f_2$  の警笛音が聞こえ、少しして振動数  $f_1$  の警笛音が混じりうなりが聞こえた。その後、まずうなりが消え、振動数  $f_1$  の警笛音が少しの間残ったのちに何も聞こえなくなった。

〔II〕  $f_1$  と  $f_2$  を  $f_0$ ,  $u$ ,  $V$  を用いて表せ。

〔III〕 振動数  $f_1$  と  $f_2$  の警笛音が A 君に届いた時刻  $t_{A1}$  と  $t_{A2}$  を求めよ。

〔IV〕 B 君に聞こえた警笛音の振動数  $f_B$  は時間とともにどのように変化したか。図2のア~カの中から正しいものを一つ選べ。

〔V〕 B 君に警笛音が聞こえ始めた時刻  $t_B$  を求めよ。

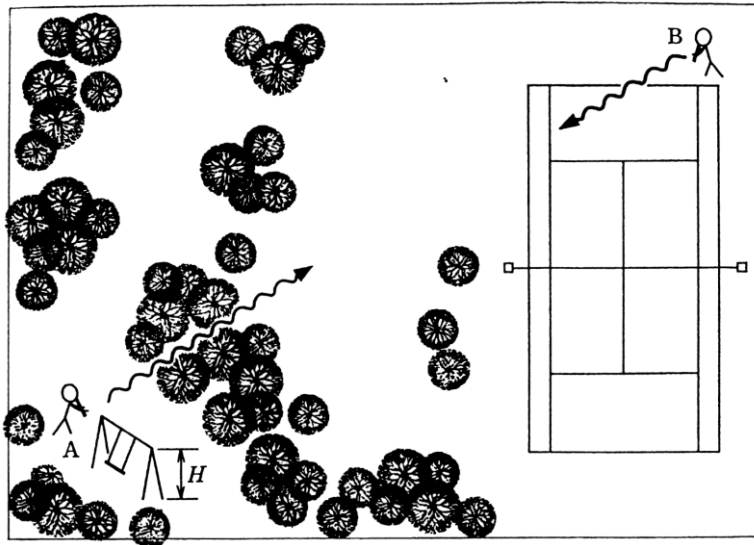
〔VI〕 B 君に警笛音が聞こえた時間間隔は警笛が鳴っていた時間間隔よりどれだけ短いか、あるいは長いかを答えよ。

〔VII〕 断崖の高さ  $H$  が距離  $X$  に等しく、列車の速さ  $u$  が  $V/10$  のとき、B 君には A 君の何倍の時間だけ警笛音が聞こえるか。

(1999年 東京大)

<演習問題> (25分)

【1】郊外のある静かな公園の一方の端の場所 A に木立ちがあり、その木陰にブランコがおかれている。他方の端にはテニスコートがあり、その先に場所 B がある。場所 A, B には、朝夕おのおの 1 人ずつ子供が来て、たて笛の練習をしている。そして、ときどき合奏のために、



互いのたて笛の音の高さを合わせようとするが、おのおのの笛から出る音の振動数は、状況によって微妙に変化する。場所 A, B にいる人々は互いには見えないが音や声は聞こえ、また各自の場所から動かないものとして、以下の設問に答えよ。

ただし、場所 A の気温は常に  $\theta_0$  [°C]、場所 B の気温は朝夕は  $\theta_0$  だが、夜には  $(\theta_0 - \Delta\theta)$  に下がる。その際、気温  $\theta$  における音速  $c$  [m/s] は、 $c = c_0 + a(\theta - \theta_0)$  ; ( $a > 0$ ) にしたがって変化する。また重力加速度は  $g$  [m/s<sup>2</sup>] である。

〔I〕朝、一方の場所 A で子供が振動数  $f_0$  [Hz] の音を出していた。ある高校生が場所 B でその音波の波長  $\lambda_0$  [m] を測定したいと考えた。この場合に必要でできるだけ簡易な方法を工夫し、その原理を図で示して説明せよ。特に独自に工夫した点があれば、その特色をのべよ。

〔II〕夕方には、場所 B にたて笛を持ってもう 1 人の子供が現れ、場所 A からの音の振動数  $f_0$  に等しくなるように自分のたて笛の音の振動数を合わせた。やがて夜になり、先に合わせた音を再確認するために、2 人の子供がおのおのの音をそれぞれの場所で先程合わせたままで出した。ところが、B にいる子供のたて笛の音の振動数の方が  $\Delta f_0$  だけ低いことが分かった。温度差  $\Delta\theta$  を求めよ。

〔III〕夜、場所 A にいる子供は疲れたので、自分のたて笛の振動数  $f_0$  の音を小さなテープレコーダーに吹きこんでブランコの台の上にのせた。場所 B で聞いていると、そのうちに場所 A から聞こえてくるたて笛の音の振動数が最小値  $(f_0 - \Delta f)$  と最大値  $(f_0 + \Delta f)$  の間で周期的に変動することが認められた。そこでまた熱心な高校生がその周期を測ったところ、 $T$  [s] であった。このとき A の音源が A, B を結ぶ鉛直面内で単振動しているものと推測して、その速度  $v$  [m/s] を時刻  $t$  [s] の関数として式で表せ。

〔IV〕ところが、しばらくして場所 A から聞こえてくる音の振動数が  $(f_0 + \Delta f)$  で  $\Delta T$  [s] の時間だけが持続した後、急に  $f_0$  に戻り、その後は変化しなくなった。テープレコーダーがブランコから落ちたものと推測される。ブランコの水平な支持棒の地面からの高さ  $H$  [m] を求めよ。ただし、ブランコの綱の質量は無視してよい。

(1985年 東京大)

<NOTE>

## ◆第12回 フェルマーの原理とレンズ◆

### <重要事項>

#### ■光の性質と進み方■

○光の種類

波長	770	700	600	500	380	[nm]
		赤	橙	黄	緑	青
			紫			
赤外線	可視光線					紫外線

単色光：単一波長からなる光

白色光：複数の波長の色を含み、色合いを感じない光。(太陽光線など)

○光の速さ

真空中(空气中)の光の速さ： $c = 3.00 \times 10^8 \text{m/s}$

その他の媒質中の光の速さは  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}$  で考える。

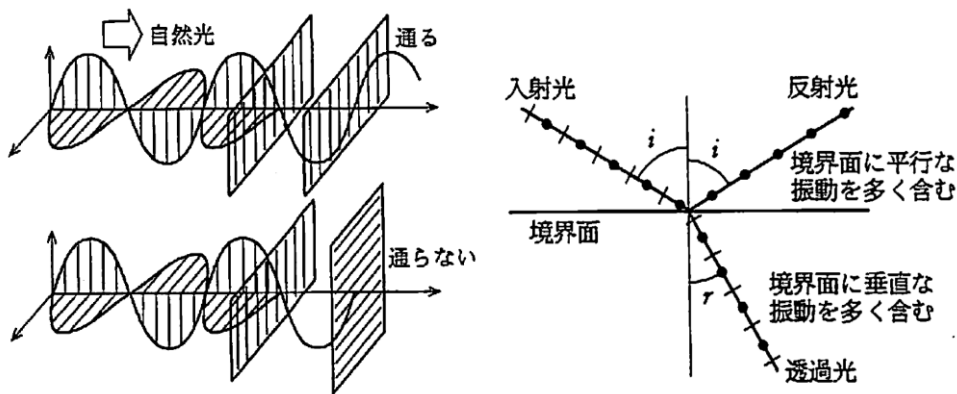
光の速さと波長は比例関係にある。 $\frac{c}{\lambda} = \frac{c'}{\lambda'} = f(\text{一定})$

○偏光

自然光：いろいろな方向の振動面をもつ光。(太陽光, 電球の光など)

偏光：特定な方向の振動面だけの光。自然光を偏光板に通すとできる。

※光の偏りの現象は、光が横波であることを示している。水面やガラス板での反射光は、特定方向の偏光を多く含む。



○光と音の違い

	光	音
波の種類	横波であるから、偏り(偏光)の現象がある。	縦波であるから、偏りの現象はない。
媒質中の速さ	波長によって異なるから、プリズムによって分散スペクトルが得られる。(後述)	振動数や波長によって異なるから、光の分散のような現象は起こらない。
波長の長さ	短いので、回折現象は目立たない。	長いので、音の回折現象は著しい。

○光学的疎密

光学的に疎	⇒	絶対屈折率小
密	⇒	大
光学的に疎な媒質での反射	⇒	位相の変化なし
密	⇒	位相が $\pi$ 変化

○光路長

光路長 = 屈折率 × 距離

(説明)光が真空中を距離  $l$  進むのに要する時間  $t$  は  $t = \frac{l}{c}$  であるが、屈折率  $n$  の

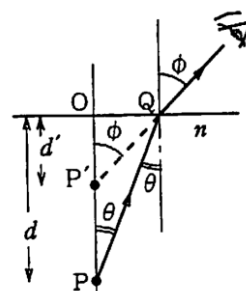
媒質中を同じ距離を進むには  $t' = \frac{l}{c/n} = \frac{nl}{c}$  ( $> t$ ) だけの時間がかかる。これから、

屈折率  $n$  の媒質中の距離  $l$  は、光の進行に対しては真空中での距離  $nl$  に相当することになる。この  $nl$  を光路長または光学距離という。

○屈折による浮き上がり

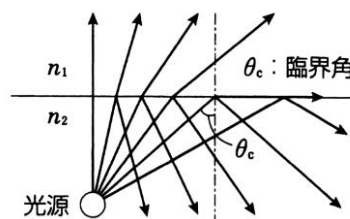
屈折率  $n$  の液体中で深さ  $d$  にある物体 P を真上の空気中から見ると、物体 P は、深さ  $d' = \frac{d}{n}$  の位置にあるように見える。(見かけの深さ)

逆に、屈折率  $n$  の液体中から空気中の高さ  $H$  の物体を見ると、 $H' = nH$  の高さに見える。



○全反射

屈折率の大きい媒質から小さい媒質に光が進むとき、入射角がある角度 (臨界角  $\theta_c$ ) より大きくなると、屈折光線は全くなく、反射光線だけとなる。この現象を全反射という。



臨界角の求め方：屈折の法則で「屈折角 =  $90^\circ$ 」を代入。

### ○光の散乱

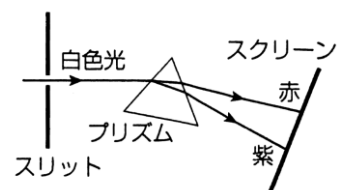
散乱：光が、空気中の気体分子やちりなどの微粒子に当たると、四方に散っていく現象。

※波長が短いほど散乱されやすい。⇒青は散乱され\_\_\_\_\_，赤は散乱され\_\_\_\_\_。

<具体例>

### ○光の分散・スペクトル

光の分散：スリットを通した自然光（白色光）をプリズムに当てると、光は色によって屈折率が違うため各色の光が分離する現象。



光のスペクトル：光が波長の順に並んだ色帯。

分散スペクトル：プリズムを用いて得られるスペクトル。

回折スペクトル：回折格子によるスペクトル。（赤色の方が大きく曲がる。 $d\sin\theta = m\lambda$ ）



■ レンズの性質 ■

**写像公式**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{倍率} \left| \frac{b}{a} \right|$$

$a$  : 物体の位置

$b$  : 像の位置

$f$  : 焦点距離

物体の位置関係	$a > f$	$a < f$
凸レンズ ( $f > 0$ )	倒立実像 $b > 0$	正立虚像 $b < 0$
凹レンズ ( $f < 0$ )	正立虚像 $b < 0$	

$b$  : 像の位置
 

- 物体と反対側⇒正
- 物体と同じ側⇒負

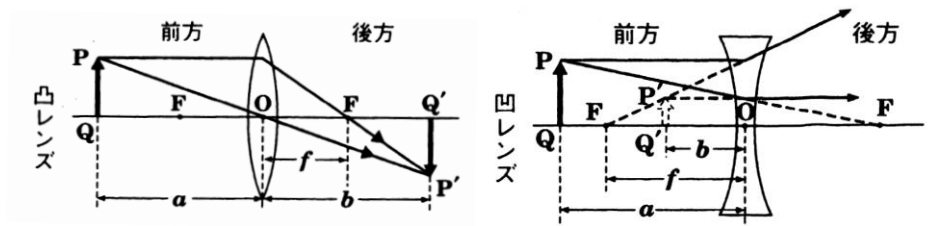
$f$  : 焦点距離
 

- 凸レンズ⇒正
- 凹レンズ⇒負

○作図の基本

光はレンズの厚い方に屈折する。

- ①中心を通る光：直進する
- ②焦点を通る光：光軸に平行に進む
- ③光軸に平行な光：焦点を通る



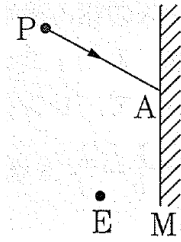
○組合せレンズ

複数枚のレンズを用いる場合、はじめのレンズによる像を次のレンズの物体とみなし、順次レンズの公式を適用すればよい。

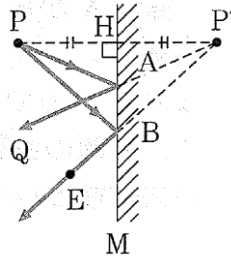
< 必須典型問題 1 >

平面鏡 M の前に点光源 P がある。

- (1) P から出た光線 PA は、M で反射後どの方向に進むか。
- (2) E 点に目を置くと、P から出て M で反射したのち、目 E に入る光線を描け。



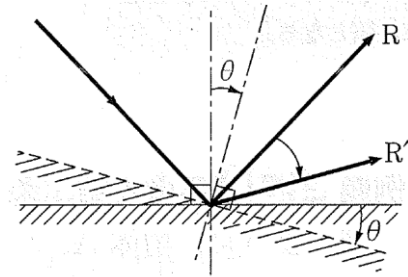
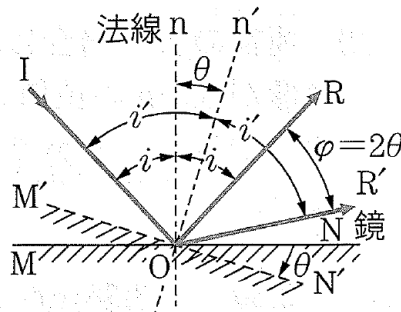
【解答】



< 必須典型問題 2 >

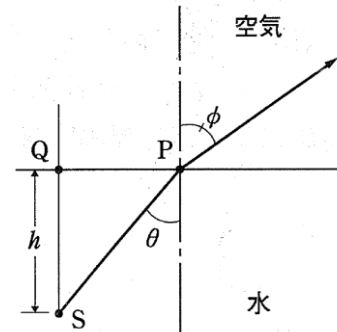
平面鏡を角  $\theta$  だけ回転させると、反射光はいくら回転するか。

【解答】  $2\theta$



< 必須典型問題 3 >

図に示されるように、水深  $h$  のところに点光源をおく。S を出て水中から空气中へ進む光線の P における入射角を  $\theta$ 、屈折角を  $\phi$  とする。また、空気に対する水の屈折率を  $n$  とする。



- (1)  $\sin\phi$  を  $n$  と  $\theta$  で表せ。
- (2) 光源 S をほぼ真上から見るときの S の見かけの深さ  $h'$  を  $n$  と  $h$  で表せ。ただし、 $\theta$  が十分に小さいとき  $\sin\theta \doteq \tan\theta$  である。
- (3) 水面に円板を浮かべて、その中心を Q に一致させる。光源 S を空気中のどこからも、見えなくするための円板の最小の半径  $r$  を求めよ。

【解答】 (1)  $\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{1}{n}$  より  $\sin\phi = n\sin\theta$

(2)  $\frac{1}{n} = \frac{\sin\theta}{\sin\phi} \doteq \frac{\tan\theta}{\tan\phi} = \frac{a/h}{a/h'} = \frac{h'}{h}$  よって  $h' = \frac{h}{n}$

(3)  $\sin i_0 = \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} \dots \textcircled{1}$ ,  $\sin i_0 = \frac{1}{n} \dots \textcircled{2}$  ①, ②より  $\frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{1}{n}$

よって  $nr = \sqrt{h^2 + r^2}$  両辺 2 乗して  $n^2 r^2 = h^2 + r^2 \therefore r = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}$

<予習問題>

【1】 レンズの焦点距離は、レンズの材質の屈折率とレンズ表面の曲がりぐあいによって決まる。このことを説明した以下の文章中の空欄のうち、～, , には適当な式を、には適当な語句または文字を入れよ。

(1) 図1では、屈折率が  $n$  および  $n'$  の二種類の媒質が、球面を境界にして接している。ただし、 $n < n'$  とする。球面の中心は点  $O$  であり、球の半径は  $R$  である。図の左側から点  $A$  に向かって光が入射したとき、光は球面上の点  $D$  で方向を変え、点  $B$  に向かって進むとする。図の  $AC$ ,  $BC$  の

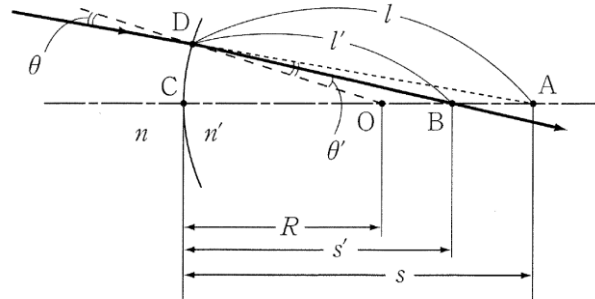


図1

長さをそれぞれ  $s$ ,  $s'$  とし、 $AD$ ,  $BD$  の長さを  $l$ ,  $l'$  とする。 $\theta$ ,  $\theta'$  は図1に示されている角度である。 $\triangle OAD$  と  $\triangle OBD$  の面積比に着目すると、

$$\frac{l \sin \theta}{l' \sin \theta'} = \frac{\triangle OAD \text{の面積}}{\triangle OBD \text{の面積}} = \text{ア}$$

となり、 $l$ ,  $l'$ ,  $\theta$ ,  $\theta'$  と  $R$ ,  $s$ ,  $s'$  の間の関係を得る。一方、屈折の法則によれば、

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \text{イ}$$

という関係が知られている。これらの関係式より、 $n$ ,  $n'$ ,  $l$ ,  $l'$ ,

$$s, s', R \text{ の間の関係を求めると、 } \text{イ} = \text{ア} \times \frac{l'}{l} \dots \text{①}$$

という式を得ることができる。

$\theta$  および  $\angle COD$  が十分小さく、 $l \approx s$ ,  $l' \approx s'$  と近似してよいとすると、式①は

$$n \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{s} \right) = n' \times \text{ウ} \dots \text{②}$$

となり、 $n$ ,  $n'$ ,  $R$ ,  $s$ ,  $s'$  の間の単純な関係式に帰着する。この式の特徴として、

に関係した量を含んでいない、ということがあげられる。したがって、点  $A$  に向かって入射する光は、によらず全て点  $B$  の方向に曲げられるということがわかる。ここでは  $n < n'$  としたが、式①, ②は  $n > n'$  の場合にも成り立つ。

(2) 次に式②を図2の場合に応用してみよう。図2においては、屈折率が  $n, n', n''$  の三種類の媒質が球面を境界にして接している。球の半径は、左側のものが  $R$ 、右側のものが  $R'$  で、 $R < R'$  とする。

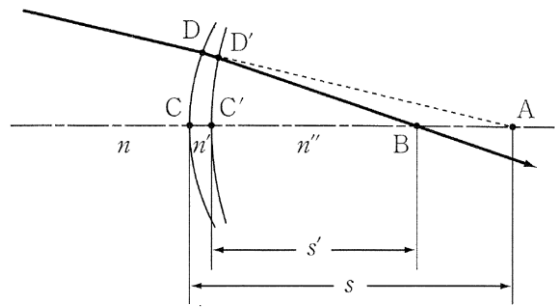


図2

図2に示したように、左側から点Aに向けて入射した光が点Dと点D'で二度屈折した後、点Bを通過したとしよう。AC = s, BC' = s' とし、二つの球面間の距離は s, s' に比べて十分小さく、無視できるものとする。二度の屈折のおおのに対して式②を適用し、二つの式を組み合わせると、s, s', n, n', n'', R, R' の間の

関係として  $\frac{n''}{s'} - \frac{n}{s} = \boxed{\text{オ}}$  …③

という式を得る。特に屈折率  $n, n''$  の媒質が空気で、 $n = 1, n'' = 1$  とすると、二つの球面にはさまれた領域は、屈折率  $n'$  のレンズと考えることができる。この場合、軸 CA (光軸) に平行に光を入射したときの  $s'$ 、つまり焦点距離は、 $\boxed{\text{カ}}$  となることがわかる。

(大阪大)

【2】次の文を読んで、には適した式を、また、{ }には適切なものの番号を一つ選んで、それぞれの解答欄に記入せよ。なお、はすでにで与えられたものと同じとする。

晴れた寒い夜や、上空に強い風が吹いているとき、地上の音源から遠く離れた場所での音が大きく聞こえることがある。この現象を理解するために、大気の状態を図1のように単純化して考察してみる。すなわち、水平な2つの境界面（境界面Ⅰおよび境界面Ⅱ）を境にして大気が3つの層から成っており、地表から境界面Ⅰまでの層では音速が $v_1$ で無風状態、境界面Ⅰから境界面Ⅱまでの層では音速が $v_2$ で無風状態、さらに境界面Ⅱ以上の層では（無風時の）音速が $v_3$ であって、風速 $w$ の風が左から右に向かって水平方向に吹いているとする。この状況において、地上の音源Xより、鉛直から右へ角度 $\theta_1$ をなす方向に発せられた音波の、各境界面での屈折・反射を考えよう。境界面Ⅰでの音波の屈折角を $\theta_2$ 、境界面Ⅱでの屈折角を $\theta_3$ 、反射角を $\theta_4$ とする。

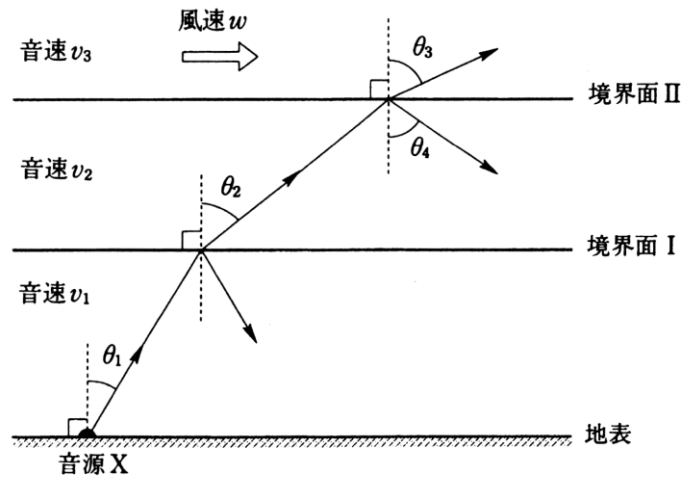


図1

境界面Ⅰは地表から十分離れており、そこに届いた音波は平面波とみなせる。このとき、境界面Ⅰにおける入射角と屈折角の関係を与える式として、 $\frac{v_1}{v_2}$ を $\theta_1$ 、 $\theta_2$ を用いて表す関係式 $\frac{v_1}{v_2} =$  ア

が成り立つ。次に、境界面Ⅱにおける入射角と屈折角の関係式をホイヘンスの原理にもとづいて考えよう。図2において、速さ $v_2$ で進む入射波の波面PQが境界面Ⅱに達すると、Pから素元波が発せられ球面状に広がっていく。Pが境界面Ⅱに達してから時間 $t$ の後、Qが境界面上のSに達したとする。このとき、Pから発せられた素元波のなす半円の中心は水平右方向の風のために点P'まで移動している。Sからこの半円に対して引いた接線RSが屈折波の波面である。距離 $\overline{PP'}$ 、 $\overline{P'R}$ 、 $\overline{QS}$ を $v_2$ 、 $v_3$ 、 $w$ 、 $t$ を用いて表すと、

$$\overline{PP'} = \text{イ} , \overline{P'R} = \text{ウ} , \overline{QS} = \text{エ}$$

である。したがって、境界面Ⅱでの入射角と屈折角の関係を与える式として、 $w$ を $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 、 $v_2$ 、 $v_3$ を用いて表す関係式 $w =$  オ …(1)

が成り立つ。この境界面Ⅱを透過した屈折波の波面は、鉛直からの角度 $\theta_3$ 方向に、

$v_3, w, \theta_3$ で表される速さ  で進んでいく。また、境界面Ⅱにおける入射角 $\theta_2$ と反射角 $\theta_4$ の関係を与える式として  が成り立つ。

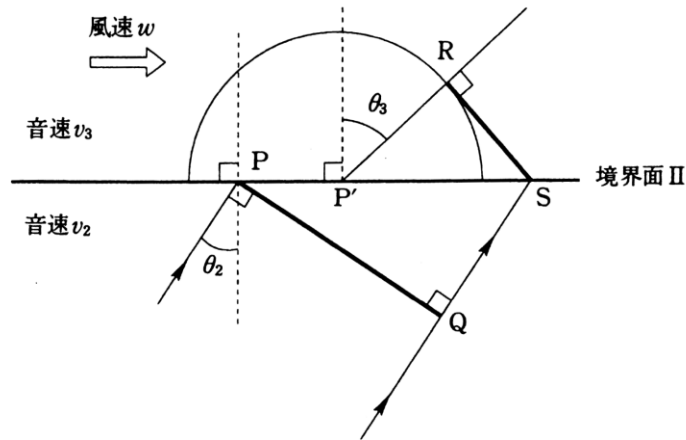


図2

さて、音源から遠く離れた地点でその音が大きく聞こえるという現象は、今の場合音源 X から発せられた音波が境界面で全反射されて地上に返ってくる現象であると考えられる。まず、境界面Ⅰにおける全反射を考えよう。この全反射が起きるような角度 $\theta_1$ が存在するためには、 $v_1, v_2$ に関する条件   $< 1$  が成り立つ必要がある。つまり、境界面ⅠとⅡの間の層の気温が境界面Ⅰ以下の層の気温に比べて {ケ: ①高く, ②低く} なければならない。この条件が成り立っている場合、 $\sin \theta_A =$   で与えられる角度 $\theta_A$ よりも大きい $\theta_1$ に対して境界面Ⅰでの全反射が起きる。

次に、境界面Ⅱでの全反射を考えよう。ここでの全反射が起きるためには、関係式(1)より、風速  $w$  と音速  $v_2, v_3$  に関する条件   $< 1$  …(2)が成り立たなければならない。このとき、境界面Ⅱに対する入射角 $\theta_2$ が、 $\sin \theta_B =$   で与えられる角度 $\theta_B$ よりも大きければ、境界面Ⅱでの全反射が起きる。 $\theta_2$ がちょうどこの角度 $\theta_B$ に等しくなるような音波を音源 X が発する角度 $\theta_1$ を $\theta_c$ とする。このとき、 $\sin \theta_c$ は  $w, v_1, v_3$ を用いて  $\sin \theta_c =$   と与えられる。したがって、音源 X を発した音波が境界面Ⅱで全反射するためには、さらに   $< 1$  …(3)条件も成り立っていないなければならない。条件(2)と(3)が成り立っている場合、 $\theta_c$ よりも {シ: ①大きい, ②小さい} 角度 $\theta_1$ で音源 X を発し境界面Ⅰを透過した音波は、境界面Ⅱで全反射する。

(1999年 京都大)

【3】「光が空間の点 A から点 B まで進むとき、光は 2 点を結ぶすべての経路のうち到達時間が最小となる経路を選ぶ。」これをフェルマーの原理という。この原理を用いて以下の設問に答えよ。

〔I〕図 1 の点 A から出た光が平面鏡  $MM'$  で反射して点 B に到達するとき、到達するまでの時間が最小になるのはどのような経路か。理由とともに述べよ。

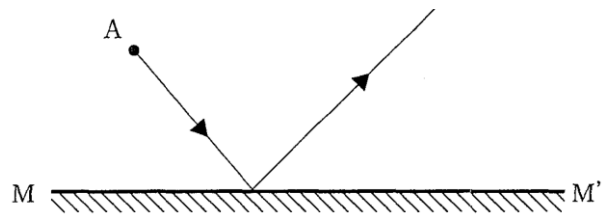


図 1

〔II〕図 2 で、空気中の点 A を出発した光が角度  $\theta$  でガラスに入射すると、一般にその経路は折れ曲がる（光の屈折）。点 A からガラス中の点 B に到達する光は、図 2 の経路 ACB を進む。空気の屈折率を 1、ガラスの屈折率を  $n$  として、入射角  $\theta$  と屈折角  $\phi$  との間にはスネルの法則  $\sin\theta = n\sin\phi$  が成り立つ。スネルの法則に従う経路は光が点 A から点 B に到達する最小時間の経路に一致することを、以下の手順で示せ。

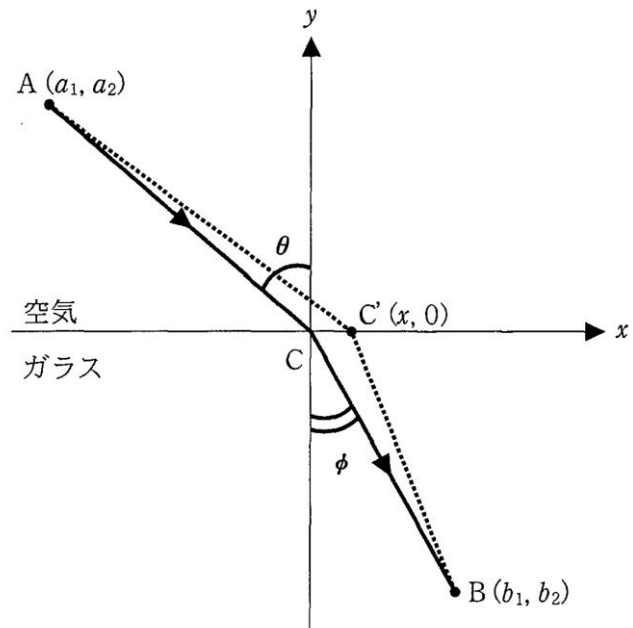


図 2

- (1) 図 2 のように C を原点とする座標軸をとり、点 A の座標を  $(a_1, a_2)$ 、点 B の座標を  $(b_1, b_2)$  とする。光が経路 ACB を進むのに要する時間  $t_0$  を求めよ。空気中の光の速さを  $c$  とするとき、ガラス中での光の速さは  $c/n$  となる。
- (2) 光がガラスに到達する地点が原点 C から左右どちらにずれても、ずれた経路を進むのに要する時間  $t$  は  $t_0$  よりも長くなる。すなわち、 $t$  は原点 C を通るときに最小値をとる。したがって、光が原点 C から微小距離（線分 AC や線分 CB の長さに比べて十分短い距離）だけずれた点  $C'$ （座標  $(x, 0)$ ）を通る経路を進むのに要する時間  $t$  は  $t_0$  にほぼ等しい。このことを用いてスネルの法則を導け。ただし、 $x^2$  を含む項は小さいとして無視してよい。また、 $\delta$  の絶対値が 1 に比べて十分小さいとき、

$$\sqrt{1+\delta} \doteq 1 + \frac{1}{2}\delta \text{ と近似できる。}$$

〔Ⅲ〕光が図3のような光学装置（レンズ）を通過して点Aから点Bに至る経路を考える。レンズにより点Aが点Bに結像されるとき、すなわち点Aから出てレンズに入射した光が必ず点Bに到達するとき、点Aから点Bに至る光の到達時間は経路によらず等しい。これもフェルマーの原理に基づいて導かれる光学法則の一つである。

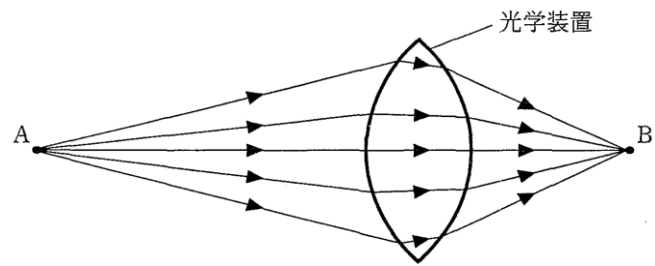


図3

いま、別の光学装置として、図4のように点Oを中心とする凹面鏡 MOM' を考える。星から地上に光が届く場合のように点Aが

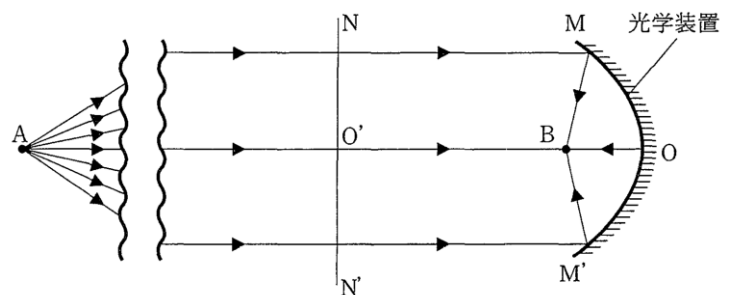


図4

遠方にあるとすると、点Aから出た光はほぼ平行光線となって鏡にやってくる。光線に垂直な面 NN' に同時刻に到着した平行光線が凹面鏡 MOM' で反射して、中心軸 OO' 上の点Bに焦点を結ぶものとする。このとき、線分 BO の長さを  $b$  として適当な座標系を設定し、この鏡の形状を表す式を求めよ。

(2004年 東京大・後期)



<演習問題> (25分)

【1】光の屈折および干渉の実験に関する以下の問いに答えよ。実験は空気中で行い、空気の屈折率は1とする。空気とプリズムなどの物体との境界における光の反射は無視して考えるものとする。解答は答案用紙の所定の場所に記入せよ。ただし、結果だけでなく、考え方や過程も記せ。

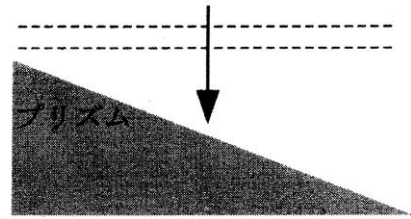


図1

(1) 図1のような、断面が直角三角形の均一な材質のプリズムに、上側から平面波の光を入射する。ここで図中の矢印は入射光の進行方向を、点線は波面を表す。プリズムの屈折率は1より大きいものとする。

- (a) プリズム内部およびプリズムより下側での平面波の波面を正しく示した図を、図2の(ア)～(エ)の中から一つ選べ。  
 (b) その図を選択した理由を、簡潔に述べよ。

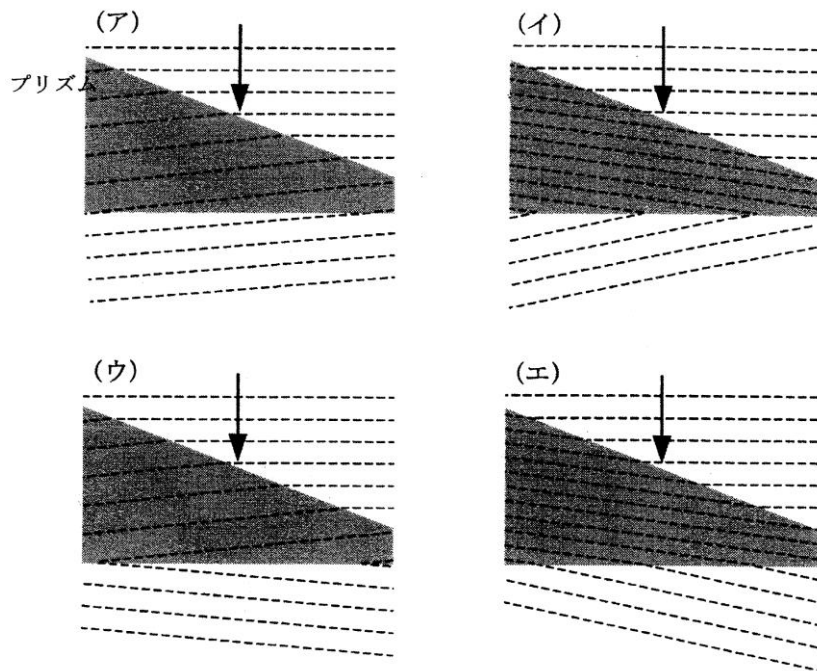


図2

(2) 図3(a)は光源、小さな孔（ピンホール）の開いた板、レンズ、プリズム、スクリーンからなる実験装置の断面であり、ピンホールとレンズの光軸は紙面上にある。図3(b)のようにレンズとプリズムの間に透明な物質からできた膜を挿入することで、この装置を用いて物質の屈折率を測定することができる。光源から出た光は単色光で、空気中の波長を $\lambda$ とする。レンズは、通過した光が平面波となるように調整されている。この光を、図3(c)に示すような直角三角柱のプリズムを2つ組み合わせた複プリズムに通す。複プリズムの上面は平面波の波面に平行であり、その稜（点Aと点Bを結ぶ線）は紙面に垂直である。複プリズムの頂角は $\alpha$ 、屈折率は $n_p (> 1)$ であるとする。光の進行方向は複プリズムの左右のプリズムでそれぞれ角度 $\theta$ だけ曲げられ、光軸に垂直なスクリーン上に到達して紙面に垂直な細かい干渉じまを作る。

角度 $\theta$  および $\alpha$  は小さく、 $\sin\theta \doteq \tan\theta \doteq \theta$ 、 $\sin\alpha \doteq \tan\alpha \doteq \alpha$  などとしてよい。

なお、レンズなどの物体の端からの回折の効果は無視できるものとする。

- (a) 複プリズム内での光の波長 $\lambda_p$ を、 $\lambda$ 、 $n_p$ を用いて表せ。
- (b) 複プリズムで光が曲げられる角度 $\theta$ を、 $\alpha$ 、 $n_p$ を用いて表せ。

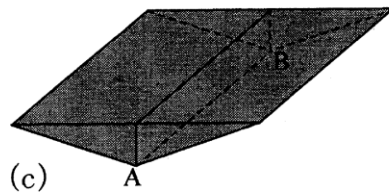
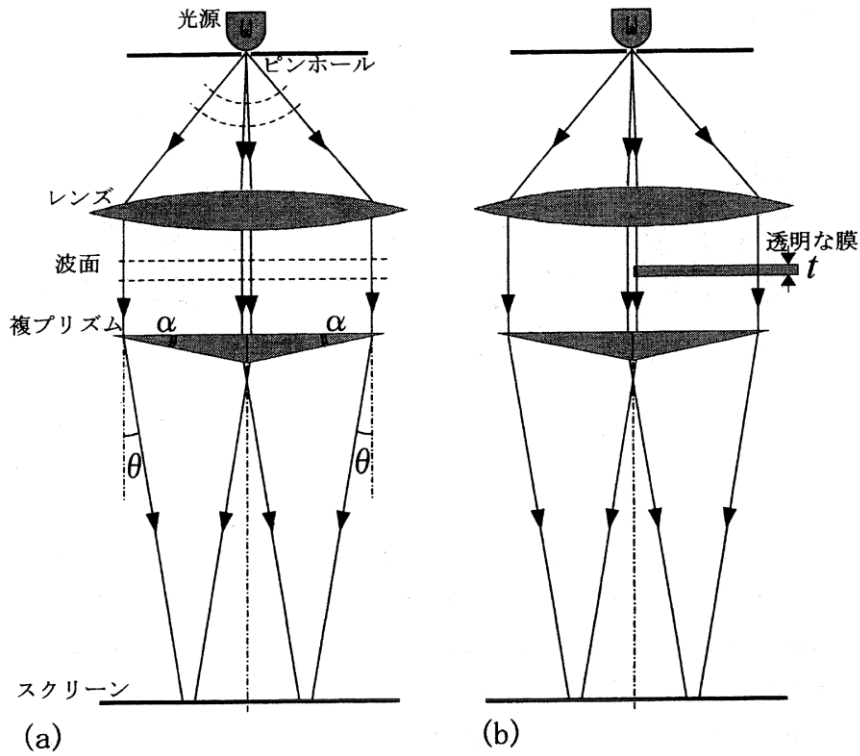


図 3

- (c) 図 4 のように、紙面上にあるスクリーン上の 2 点 O と P を考える。点 O では波が強めあっている。点 O から距離  $l$  だけ離れた点 P においても波が強めあうとき、 $l$  を、 $\lambda$ 、 $n_p$ 、 $\theta$  および任意の正の整数  $k$  の中から必要なものを用いて表せ。

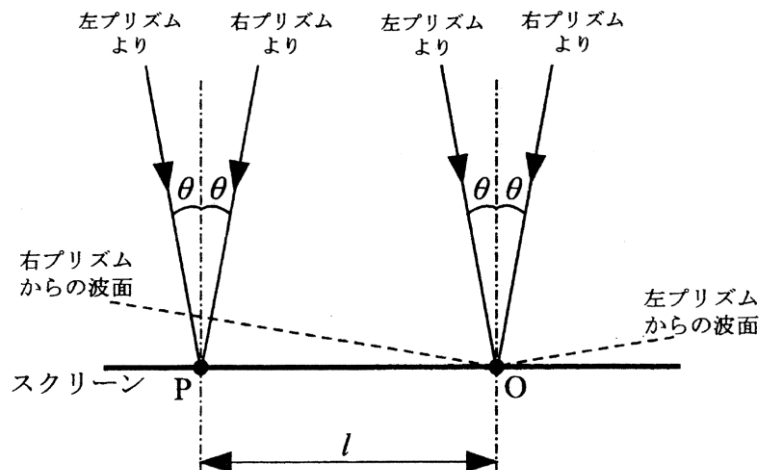


図 4

(d) 図 3(b)のように、屈折率  $n$  の物質でできた一定の厚さ  $t$  の透明な膜を、レンズと右側のプリズムの間に平面波の波面に平行に置いた。このとき、干渉じまの間隔は変わらず、その位置が膜を入れる前に比べて  $\delta$  だけずれた。膜は右側のプリズムを覆うほど十分に大きいとする。 $n$  が 1 より大きい場合、干渉じまのずれは、紙面に向かって左右いずれの向きに起こるかを答えよ。また、干渉じまの間隔を  $d$  としたとき、 $n$  を  $\delta$ ,  $t$ ,  $\lambda$ ,  $d$  を用いて表せ。ただし、 $2t(n-1) < \lambda$  であるとする。

(2006 年 東北大)



<NOTE>