$\boxed{1}$

解答　(1)　$2 \leqq x \leqq 6$　(2)　$x<-3,\ 6<x$　(3)　$-1<x<8$

(4)　$x \leqq 2-\sqrt{7},\ 2+\sqrt{7} \leqq x$　(5)　$\frac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$

(6)　$x<1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}<x$　(7)　$x \leqq -2-\sqrt{10},\ -2+\sqrt{10} \leqq x$

解説

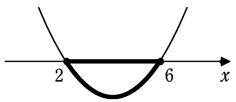
(1)　$x^2-8x+12=0$ を解く。

左辺を因数分解すると　$(x-2)(x-6)=0$

よって　$x=2,\ 6$

したがって，この２次不等式の解は

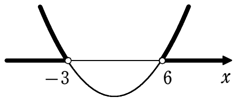
$2 \leqq x \leqq 6$



(2)　$x^2-3x-18=0$ を解くと　$x=-3,\ 6$

よって，$x^2-3x-18>0$ の解は

$x<-3,\ 6<x$



(3)　両辺に -1 を掛けて

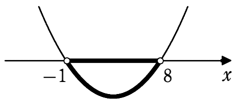
$x^2-7x-8<0$

$x^2-7x-8=0$ を解くと

$x=-1,\ 8$

よって，$-x^2+7x+8>0$ の解は

$-1<x<8$

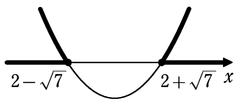


(4)　$x^2-4x-3=0$ を解くと

$x=2\pm\sqrt{7}$

よって，$x^2-4x-3 \geqq 0$ の解は

$x \leqq 2-\sqrt{7},\ 2+\sqrt{7} \leqq x$



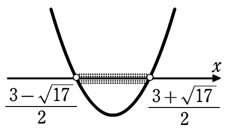
(5)　両辺に -1 を掛けて　$x^2-3x-2<0$

$x^2-3x-2=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

よって，不等式の解は

$\frac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$



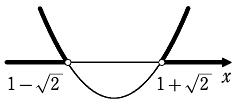
(6)　移項すると　$x^2-2x-1>0$

$x^2-2x-1=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-1)}}{1}=1\pm\sqrt{2}$$

よって，この２次不等式の解は

$x<1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}<x$



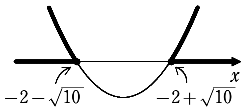
(7)　展開すると　$x^2-4x \leqq 2x^2-6$

式を整理すると　$x^2+4x-6 \geqq 0$

$x^2+4x-6=0$ を解くと　$x=-2\pm\sqrt{10}$

よって，この２次不等式の解は

$x \leqq -2-\sqrt{10},\ -2+\sqrt{10} \leqq x$



$\boxed{2}$

解答　(1)　-5 以外のすべての実数　(2)　すべての実数　(3)　解はない

(4)　$x=\frac{1}{3}$　(5)　すべての実数　(6)　解はない

解説

(1)　$x^2+10x+25=(x+5)^2$ であるから，不等式は　$(x+5)^2>0$

よって，解は　-5 以外のすべての実数

(2)　$x^2-12x+36=(x-6)^2$ であるから，不等式は　$(x-6)^2 \geqq 0$

よって，解は　すべての実数

(3)　$4x^2-4x+1=(2x-1)^2$ であるから，不等式は　$(2x-1)^2<0$

よって，解は　ない

(4)　整理すると　$9x^2-6x+1 \leqq 0$

$9x^2-6x+1=(3x-1)^2$ であるから，不等式は　$(3x-1)^2 \leqq 0$

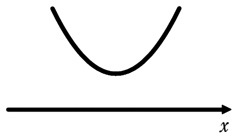
よって，解は　$x=\frac{1}{3}$

(5)　$2x^2-8x+13>0$ について

$D=(-8)^2-4\cdot2\cdot13=-40<0$

かつ，x^2 の係数は正である。

よって，与えられた不等式の解は　すべての実数



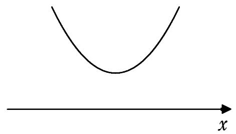
(6)　両辺を３で割って整理すると　$x^2-2x+2 \leqq 0$

$x^2-2x+2 \leqq 0$ について

$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot2=-4<0$

かつ，x^2 の係数は正である。

よって，解はない



$\boxed{3}$

解答　(1)　$-\frac{1}{2}<x \leqq 2$　(2)　$x \leqq -4,\ \frac{1}{2} \leqq x<2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}<x$

解説

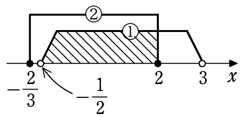
(1)　$2x^2-5x-3<0$ から　$(2x+1)(x-3)<0$

よって　$-\frac{1}{2}<x<3$　……①

$3x^2-4x-4 \leqq 0$ から　$(3x+2)(x-2) \leqq 0$

よって　$-\frac{2}{3} \leqq x \leqq 2$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$-\frac{1}{2}<x \leqq 2$



(2)　$\begin{cases} 2-3x-2x^2 \leqq 4x-2 & \cdots\cdots ① \\ 4x-2<x^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$2x^2+7x-4 \geqq 0$

よって　$(x+4)(2x-1) \geqq 0$

ゆえに　$x \leqq -4,\ \frac{1}{2} \leqq x$　……③

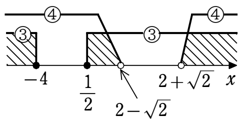
② から　$x^2-4x+2>0$

これを解くと，$x^2-4x+2=0$ の解が $x=2\pm\sqrt{2}$

であるから　$x<2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}<x$　……④

③，④ の共通範囲を求めて

$x \leqq -4,\ \frac{1}{2} \leqq x<2-\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}<x$



$\boxed{4}$

解答　$a=-1,\ b=-6$

解説

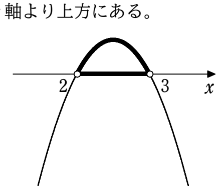
条件から，$y=ax^2+5x+b$ のグラフは $2<x<3$ の範囲で x 軸より上方にある。

すなわち，上に凸の放物線で，２点 $(2,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を通るから

$a<0$　……①

$4a+10+b=0$　……②

$9a+15+b=0$　……③



②，③ を連立して解くと

$a=-1,\ b=-6$　これは ① を満たす。

$\boxed{5}$

解答　(1)　$-2<m<2$　(2)　$-8<m<0$

解説

(1)　２次不等式 $x^2-mx+1>0$ の x^2 の係数が正であるから，解がすべての実数であるための必要十分条件は　$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot1<0$

すなわち　$m^2-4<0$　これを解いて　$-2<m<2$

(2)　２次不等式 $-x^2+mx+2m<0$ の x^2 の係数が負であるから，解がすべての実数であるための必要十分条件は　$D=m^2-4\cdot(-1)\cdot2m<0$

すなわち　$m(m+8)<0$　これを解いて　$-8<m<0$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$a<x<a+1$

(2)　$a<2$ のとき $x<a,\ 2<x$；$a=2$ のとき２以外のすべての実数；

$2<a$ のとき $x<2,\ a<x$

解説

(1)　$x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$ から　$(x-a)\{x-(a+1)\}<0$

よって　$a<x<a+1$

(2)　$x^2-(a+2)x+2a>0$ から　$(x-a)(x-2)>0$

a と２の大小で場合を分ける。

[1]　$a<2$ のとき　$x<a,\ 2<x$

[2]　$a=2$ のとき

不等式は $(x-2)^2>0$ となる。

よって，求める解は　２以外のすべての実数

[3]　$2<a$ のとき　$x<2,\ a<x$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x<-6,\ 1<x$　　(2)　$-5 \leqq x \leqq -3$　　(3)　$x<1,\ \dfrac{3}{2}<x$

(4)　$-\dfrac{1}{2}<x<2$　　(5)　$x<\dfrac{5-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}<x$

(6)　$-2-\sqrt{2} \leqq x \leqq -2+\sqrt{2}$　　(7)　$2-\sqrt{11} \leqq x \leqq 2+\sqrt{11}$

(8)　$2-\sqrt{3} \leqq x \leqq 2+\sqrt{3}$　　(9)　$-\dfrac{5}{2}<x<1$　　(10)　$x<0,\ 2<x$

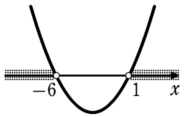
解説

(1)　$x^2+5x-6>0$ の左辺を因数分解して

$$(x+6)(x-1)>0$$

したがって

$$x<-6,\ 1<x$$

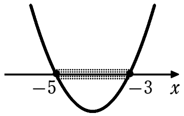


(2)　$x^2+8x+15 \leqq 0$ の左辺を因数分解して

$$(x+5)(x+3) \leqq 0$$

したがって

$$-5 \leqq x \leqq -3$$

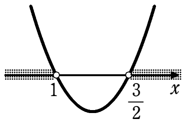


(3)　$2x^2-5x+3>0$ の左辺を因数分解して

$$(x-1)(2x-3)>0$$

すなわち　$2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)>0$

よって　$x<1,\ \dfrac{3}{2}<x$



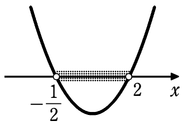
(4)　$2(x^2-1)<3x$ から　$2x^2-3x-2<0$

左辺を因数分解して

$$(2x+1)(x-2)<0$$

すなわち　$2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-2)<0$

よって　$-\dfrac{1}{2}<x<2$



(5)　$-x^2+5x-5<0$ の両辺に -1 を掛けて

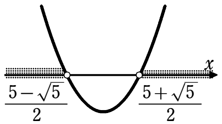
$$x^2-5x+5>0$$

$x^2-5x+5=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって，不等式の解は

$$x<\frac{5-\sqrt{5}}{2},\ \frac{5+\sqrt{5}}{2}<x$$

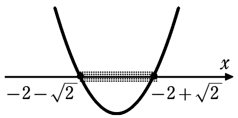


(6)　$x^2+4x+2=0$ を解くと

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot2}}{1}$$

$$=-2\pm\sqrt{2}$$

よって，不等式の解は



$$-2-\sqrt{2} \leqq x \leqq -2+\sqrt{2}$$

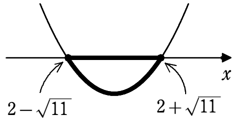
(7)　整理して　$-x^2+4x+7 \geqq 0$

両辺に -1 を掛けて　$x^2-4x-7 \leqq 0$

$x^2-4x-7=0$ を解くと　$x=2\pm\sqrt{11}$

よって，与えられた２次不等式の解は

$2-\sqrt{11} \leqq x \leqq 2+\sqrt{11}$



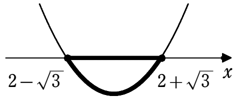
(8)　移項して整理すると　$x^2-4x+1 \leqq 0$

$x^2-4x+1=0$ を解くと

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot1}}{1}=2\pm\sqrt{3}$$

よって，この２次不等式の解は

$$2-\sqrt{3} \leqq x \leqq 2+\sqrt{3}$$



(9)　右辺を展開すると　$3x^2<x^2-3x+5$

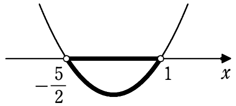
移項して整理すると　$2x^2+3x-5<0$

$2x^2+3x-5=0$ を解く。

左辺を因数分解すると　$(x-1)(2x+5)=0$

よって　$x=1,\ -\dfrac{5}{2}$

したがって，この２次不等式の解は　$-\dfrac{5}{2}<x<1$

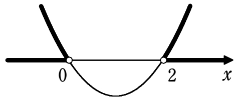


(10)　展開すると　$4x^2+4x+1+24>x^2+10x+25$

式を整理すると　$x^2-2x>0$

$x^2-2x=0$ を解くと　$x=0,\ 2$

よって，この２次不等式の解は　$x<0,\ 2<x$



$\boxed{2}$

解答　(1)　４以外のすべての実数　　(2)　$x=-\dfrac{1}{2}$　　(3)　すべての実数

(4)　解はない

解説

(1)　$x^2-8x+16=(x-4)^2$ から，不等式は　$(x-4)^2>0$

よって，解は　４以外のすべての実数

(2)　$4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ から，不等式は　$(2x+1)^2 \leqq 0$

よって，解は　$x=-\dfrac{1}{2}$

(3)　$x^2-4x+8=(x-2)^2+4$ から，不等式は　$(x-2)^2+4 \geqq 0$

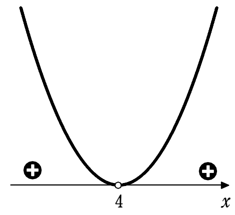
よって，解は　すべての実数

(4)　不等式の両辺に -1 を掛けて　$3x^2-12x+13 \leqq 0$

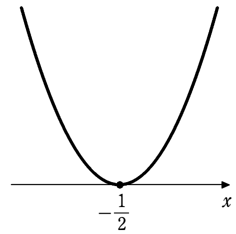
$3x^2-12x+13=3(x-2)^2+1$ から，不等式は　$3(x-2)^2+1 \leqq 0$

よって，解は　ない

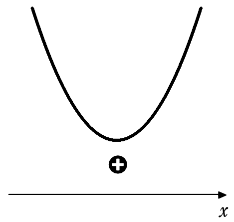
(1)



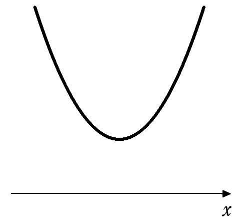
(2)



(3)



(4)



$\boxed{3}$

解答　(1)　$1<x<3,\ 4<x<5$　　(2)　$x \leqq -4,\ 3<x$　　(3)　$2-\sqrt{3} \leqq x \leqq 2+\sqrt{3}$

(4)　$-2<x \leqq 2,\ 4 \leqq x<8$

解説

(1)　$\begin{cases} x^2-6x+5<0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-7x+12>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

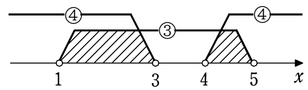
① から　$(x-1)(x-5)<0$

よって　$1<x<5$　……③

② から　$(x-3)(x-4)>0$

よって　$x<3,\ 4<x$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて　$1<x<3,\ 4<x<5$



(2)　$\begin{cases} x^2+4x \geqq 0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-9>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

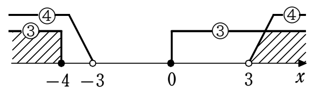
① から　$x(x+4) \geqq 0$

よって　$x \leqq -4,\ 0 \leqq x$　……③

② から　$(x+3)(x-3)>0$

よって　$x<-3,\ 3<x$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて　$x \leqq -4,\ 3<x$



(3)　$\begin{cases} 1-4x+x^2 \leqq 0 & \cdots\cdots ① \\ -3x^2+11x+4>0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$x^2-4x+1 \leqq 0$

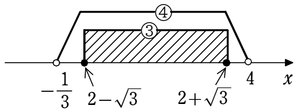
$x^2-4x+1=0$ を解くと　$x=2\pm\sqrt{3}$

よって，① の解は　$2-\sqrt{3} \leqq x \leqq 2+\sqrt{3}$　……③

② から　$3x^2-11x-4<0$

$3x^2-11x-4=0$ を解くと　$x=-\frac{1}{3}$，4

よって，② の解は　$-\frac{1}{3}<x<4$ ……④



③ と ④ の共通範囲を求めて

$2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$

(4)　$-8\leqq x^2-6x<16$ から　$\begin{cases} -8\leqq x^2-6x & \cdots\cdots ① \\ x^2-6x<16 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

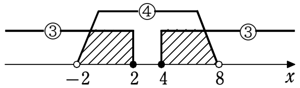
① から　$x^2-6x+8\geqq 0$　　よって　$(x-2)(x-4)\geqq 0$

ゆえに　$x\leqq 2$，$4\leqq x$ ……③

② から　$x^2-6x-16<0$

よって　$(x+2)(x-8)<0$

ゆえに　$-2<x<8$ ……④



③ と ④ の共通範囲を求めて　$-2<x\leqq 2$，$4\leqq x<8$

4

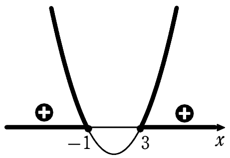
解答　(1)　$a=-2$，$b=-3$　　(2)　$a=-2$，$b=4$

解説

(1)　条件から，2 次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフは，$x\leqq -1$，$3\leqq x$ のときだけ x 軸を含む上側にある。
すなわち，下に凸の放物線で 2 点 $(-1, 0)$，$(3, 0)$ を通るから

$1-a+b=0$，$9+3a+b=0$

これを解いて　$a=-2$，$b=-3$



別解　$x\leqq -1$，$3\leqq x$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$(x+1)(x-3)\geqq 0$

左辺を展開して　$x^2-2x-3\geqq 0$

x^2 の係数は 1 であるから，$x^2+ax+b\geqq 0$ の係数と比較して　$a=-2$，$b=-3$

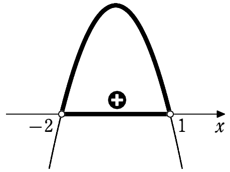
(2)　条件から，2 次関数 $y=ax^2-2x+b$ のグラフは，$-2<x<1$ のときだけ x 軸の上側にある。
すなわち，上に凸の放物線で 2 点 $(-2, 0)$，$(1, 0)$ を通るから

$a<0$，$0=4a+4+b$ ……①

$0=a-2+b$ ……②

①，② を解いて　$a=-2$，$b=4$

これは，$a<0$ を満たす。



5

解答　(1)　$1-2\sqrt{3}<m<1+2\sqrt{3}$　　(2)　$m\leqq -1$，$0\leqq m$

解説

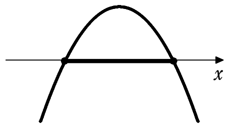
(1)　x^2 の係数は正であるから，この 2 次不等式の解がすべての実数となるための必要十分条件は　$D=\{-(m-1)\}^2-4\cdot 1\cdot 3<0$　すなわち　$m^2-2m-11<0$

これを解いて　$1-2\sqrt{3}<m<1+2\sqrt{3}$

(2)　この 2 次不等式が解をもつための必要十分条件は，$y=-x^2+2mx+m$ のグラフが x 軸と共有点をもつことである。

すなわち　$D=(2m)^2-4\cdot(-1)\cdot m\geqq 0$

よって　$4(m^2+m)\geqq 0$



ゆえに　$m(m+1)\geqq 0$

したがって　$m\leqq -1$，$0\leqq m$

6

解答　(1)　$a>-1$ のとき　$x<-a$，$1<x$

$a=-1$ のとき　1 以外のすべての実数

$a<-1$ のとき　$x<1$，$-a<x$

(2)　$a>0$ のとき　$-a\leqq x\leqq 2a$，　$a=0$ のとき　$x=0$

$a<0$ のとき　$2a\leqq x\leqq -a$

解説

(1)　左辺を因数分解すると　$(x+a)(x-1)>0$ ……①

[1]　$-a<1$ すなわち $a>-1$ のとき

① の解は　$x<-a$，$1<x$

[2]　$-a=1$ すなわち $a=-1$ のとき

① は $(x-1)^2>0$ となり，解は　1 以外のすべての実数。

[3]　$-a>1$ すなわち $a<-1$ のとき

① の解は　$x<1$，$-a<x$

(2)　左辺を因数分解すると　$(x+a)(x-2a)\leqq 0$ ……①

[1]　$-a<2a$ すなわち $a>0$ のとき

① の解は　$-a\leqq x\leqq 2a$

[2]　$-a=2a$ すなわち $a=0$ のとき

① は $x^2\leqq 0$ となり，解は　$x=0$

[3]　$-a>2a$ すなわち $a<0$ のとき

① の解は　$2a\leqq x\leqq -a$

1

解答　(1)　$x<-5$，$4<x$　　(2)　$x\leqq -2$，$0\leqq x$

解説

(1)　[1]　$x\geqq 1$ のとき　$x^2-3(x-1)>7$

よって　$x^2-3x-4>0$

ゆえに　$(x+1)(x-4)>0$

よって　$x<-1$，$4<x$

$x\geqq 1$ との共通範囲は　$x>4$ ……①

[2]　$x<1$ のとき　$x^2+3(x-1)>7$

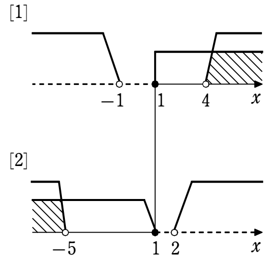
よって　$x^2+3x-10>0$

ゆえに　$(x+5)(x-2)>0$

よって　$x<-5$，$2<x$

$x<1$ との共通範囲は　$x<-5$ ……②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で　$x<-5$，$4<x$



(2)　$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ であるから

$x^2-2x-3\geqq 0$ の解は　$x\leqq -1$，$3\leqq x$

$x^2-2x-3<0$ の解は　$-1<x<3$

[1]　$x\leqq -1$，$3\leqq x$ のとき，不等式は

$x^2-2x-3\geqq 3-x$

ゆえに　$x^2-x-6\geqq 0$

よって　$(x+2)(x-3)\geqq 0$

したがって　$x\leqq -2$，$3\leqq x$ ……①

これは $x\leqq -1$，$3\leqq x$ を満たす。

[2]　$-1<x<3$ のとき，不等式は

$-(x^2-2x-3)\geqq 3-x$

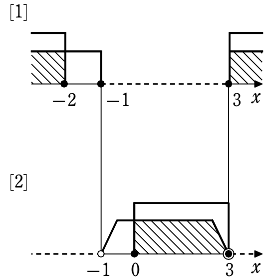
ゆえに　$x^2-3x\leqq 0$

よって　$x(x-3)\leqq 0$

したがって　$0\leqq x\leqq 3$

$-1<x<3$ との共通範囲は　$0\leqq x<3$ ……②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で　$x\leqq -2$，$0\leqq x$



別解　不等式から　$x^2-2x-3\leqq -(3-x)$　または　$3-x\leqq x^2-2x-3$

$x^2-2x-3\leqq -(3-x)$ を解くと　$0\leqq x\leqq 3$ …… ①

$3-x\leqq x^2-2x-3$ を解くと　$x\leqq -2$，$3\leqq x$ …… ②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で　$x\leqq -2$，$0\leqq x$

2

解答　$m<2$，$10<m$ のとき 2 個，　$m=2$，10 のとき 1 個，　$2<m<10$ のとき 0 個

解説

$y=x^2+(m-4)x+m-1$ について

$$D=(m-4)^2-4\cdot 1\cdot(m-1)=m^2-12m+20$$
$$=(m-2)(m-10)$$

この符号を調べると

$m<2$，$10<m$ のとき　$D>0$　　このとき，共有点の個数は　2 個

$m=2$，10 のとき　$D=0$　　このとき，共有点の個数は　1 個

$2<m<10$ のとき　$D<0$　　このとき，共有点の個数は　0 個

3

解答　(1)　$p\leqq -2,\ 2\leqq p$　(2)　$p\leqq 0,\ 4\leqq p$　(3)　$p\leqq -2,\ 4\leqq p$
(4)　$p\leqq 0,\ 2\leqq p$

解説

2つの2次方程式 $x^2+px+1=0$ ……①，$x^2+px+p=0$ ……② の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると　$D_1=p^2-4\cdot1\cdot1=p^2-4$

$D_2=p^2-4\cdot1\cdot p=p^2-4p$

(1)　① が実数解をもつための必要十分条件は

$D_1\geqq 0$　すなわち　$p^2-4\geqq 0$

よって　$(p+2)(p-2)\geqq 0$　ゆえに　$p\leqq -2,\ 2\leqq p$ ……③

(2)　② が実数解をもつための必要十分条件は

$D_2\geqq 0$　すなわち　$p^2-4p\geqq 0$

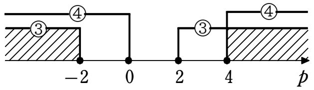
よって　$p(p-4)\geqq 0$　ゆえに　$p\leqq 0,\ 4\leqq p$ ……④

(3)　①，② がともに実数解をもつための必要十分条件は

$D_1\geqq 0$ かつ $D_2\geqq 0$

よって，③ と ④ の共通範囲を求めて

$p\leqq -2,\ 4\leqq p$

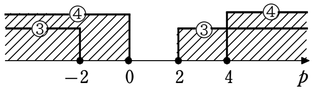


(4)　①，② のうち，少なくとも一方が実数解をもつための必要十分条件は

$D_1\geqq 0$ または $D_2\geqq 0$

よって，③ または ④ の範囲を求めて

$p\leqq 0,\ 2\leqq p$



4

解答　$a>1$

解説

この2次不等式の解がすべての実数であるための必要十分条件は

x^2 の係数について　$a>0$ ……①

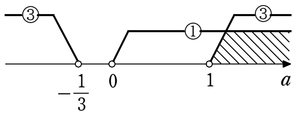
かつ　$D=(a-1)^2-4\cdot a(a-1)<0$ ……②

② から　$(a-1)\{(a-1)-4a\}<0$

すなわち　$(a-1)(-3a-1)<0$

よって　$(a-1)(3a+1)>0$

ゆえに　$a<-\dfrac{1}{3},\ 1<a$ ……③



① と ③ の共通範囲を求めて　$a>1$

5

解答　(ア)　-8　(イ)　15

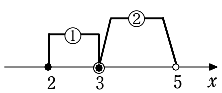
解説

不等式 ① から　$(x-2)(x-3)\leqq 0$　これを解いて　$2\leqq x\leqq 3$

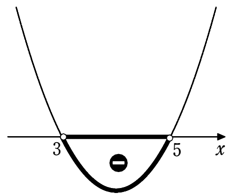
①，② を同時に満たす x の値はなく，① または ② を満たす x の値の範囲が $2\leqq x<5$ であるから，

不等式 ② の解は　$3<x<5$ ……[A]

となる。



[A] は，2次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフが $3<x<5$ のときだけ x 軸の下側にあること，すなわち下に凸の放物線が2点 $(3,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を通ることと同じである。



ゆえに　$3^2+3a+b=0$ ……③

$5^2+5a+b=0$ ……④

④－③ から　$2a+16=0$

よって　$a={}^{ア}-8$

これを ③ に代入して　$9-24+b=0$

よって　$b={}^{イ}15$

別解　(後半)　$3<x<5$ を解とする2次不等式の1つは　$(x-3)(x-5)<0$

左辺を展開して　$x^2-8x+15<0$ ……⑤

② と ⑤ の係数を比較して　$a={}^{ア}-8,\ b={}^{イ}15$

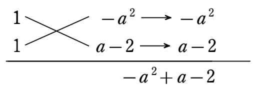
6

解答　$-2<a<1$ のとき　$a^2\leqq x\leqq -a+2$；$a=-2$ のとき　$x=4$；
$a=1$ のとき　$x=1$；$a<-2,\ 1<a$ のとき　$-a+2\leqq x\leqq a^2$

解説

不等式から　$x^2-(a^2-a+2)x-a^2(a-2)\leqq 0$

したがって　$(x-a^2)\{x+(a-2)\}\leqq 0$ ……①



[1]　$a^2<-(a-2)$ のとき

$a^2+a-2<0$ から　$(a+2)(a-1)<0$

よって　$-2<a<1$

このとき，① の解は　$a^2\leqq x\leqq -a+2$

[2]　$a^2=-(a-2)$ のとき

$a^2+a-2=0$ から　$(a+2)(a-1)=0$

よって　$a=-2,\ 1$

$a=-2$ のとき　① は $(x-4)^2\leqq 0$ となり　$x=4$

$a=1$ のとき　① は $(x-1)^2\leqq 0$ となり　$x=1$

[3]　$a^2>-(a-2)$ のとき

$a^2+a-2>0$ から　$(a+2)(a-1)>0$

よって　$a<-2,\ 1<a$

このとき，① の解は　$-a+2\leqq x\leqq a^2$

以上から　$-2<a<1$ のとき　$a^2\leqq x\leqq -a+2$

$a=-2$ のとき　$x=4$

$a=1$ のとき　$x=1$

$a<-2,\ 1<a$ のとき　$-a+2\leqq x\leqq a^2$

1

解答　$x<-\sqrt{5},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{5}<x$

解説

$x^2=t$ とおくと，不等式は　$2t^2-11t+5>0$

ゆえに　$(t-5)(2t-1)>0$　これを解くと　$t<\dfrac{1}{2},\ 5<t$

$x^2\geqq 0$ であるから　$t\geqq 0$

よって　$0\leqq t<\dfrac{1}{2},\ 5<t$　すなわち　$0\leqq x^2<\dfrac{1}{2},\ 5<x^2$

$0\leqq x^2<\dfrac{1}{2}$ を解くと

$0\leqq x^2$ から　x はすべての実数

$x^2<\dfrac{1}{2}$ から　$x^2-\dfrac{1}{2}<0$　因数分解して　$\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$

ゆえに　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

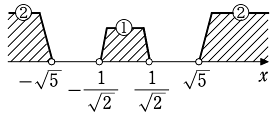
よって，$0\leqq x^2<\dfrac{1}{2}$ の解は　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ……①

$5<x^2$ を解くと　$x^2-5>0$　因数分解して　$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})>0$

ゆえに　$x<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<x$ ……②

よって，① と ② の範囲を合わせて

$x<-\sqrt{5},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{5}<x$



2

解答　$x=2,\ y=0$ で最大値 12，$x=-1,\ y=\pm\sqrt{3}$ で最小値 -6

解説

$x^2+y^2=4$ から　$y^2=4-x^2$ ……①

$y^2\geqq 0$ であるから　$4-x^2\geqq 0$

よって　$(x+2)(x-2)\leqq 0$　ゆえに　$-2\leqq x\leqq 2$ ……②

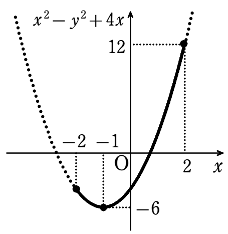
$x^2-y^2+4x=x^2-(4-x^2)+4x$

$=2x^2+4x-4=2(x+1)^2-6$

よって，② の範囲の x について，x^2-y^2+4x は

$x=2$　で最大値 12,

$x=-1$ で最小値 -6　をとる。



① から

$x=2$　のとき　$y^2=0$　よって　$y=0$

$x=-1$ のとき　$y^2=3$　よって　$y=\pm\sqrt{3}$

したがって　$x=2,\ y=0$ で最大値 12

$x=-1,\ y=\pm\sqrt{3}$ で最小値 -6

3

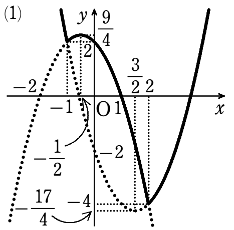
解答 (1)［図］

(2) $k<-4$ のとき 0 個；$k=-4$ のとき 1 個；

$-4<k<2$，$\frac{9}{4}<k$ のとき 2 個；

$k=2$，$\frac{9}{4}$ のとき 3 個；$2<k<\frac{9}{4}$ のとき 4 個

(1)



解説

(1) $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ であるから

$x\leqq-1$，$2\leqq x$ のとき

$y=(x^2-x-2)-2x=x^2-3x-2$

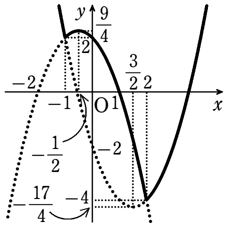
$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}$

$-1<x<2$ のとき

$y=-(x^2-x-2)-2x=-x^2-x+2$

$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$

よって，グラフは図の実線部分である。



(2) 方程式を変形して　$|x^2-x-2|-2x=k$

よって，(1) で求めたグラフと直線 $y=k$ の共有点を調べて

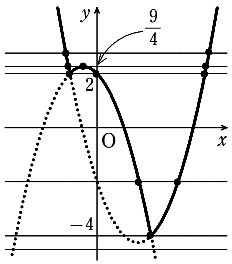
$k<-4$ のとき 0 個

$k=-4$ のとき 1 個

$-4<k<2$，$\frac{9}{4}<k$ のとき 2 個

$k=2$，$\frac{9}{4}$ のとき 3 個

$2<k<\frac{9}{4}$ のとき 4 個



4

解答 (1) ① の解は $a<x<a+3$；

② の解は $0<a<\frac{3}{4}$ のとき $2a-3<x<-2a$，$a=\frac{3}{4}$ のとき解はない，

$\frac{3}{4}<a<4$ のとき $-2a<x<2a-3$

(2) $3<a<4$　(3) $0<a\leqq\frac{7}{2}$

解説

(1) ① から　$(x-a)\{x-(a+3)\}<0$

$a<a+3$ であるから，① の解は　$a<x<a+3$　……③

② から　$(x+2a)\{x-(2a-3)\}<0$

$-2a>2a-3$，$-2a=2a-3$，$-2a<2a-3$ を満たす a の値または a の値の範囲は，

それぞれ　$a<\frac{3}{4}$，$a=\frac{3}{4}$，$a>\frac{3}{4}$

よって，$0<a<4$ に注意して，② の解は

$0<a<\frac{3}{4}$ のとき　$2a-3<x<-2a$　……④

$a=\frac{3}{4}$ のとき，$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2<0$ となり　解はない　……⑤

$\frac{3}{4}<a<4$ のとき　$-2a<x<2a-3$　……⑥

(2) $-2a<0<a$ であるから，③，④ を同時に満たす x は存在しない。

また，③，⑤ を同時に満たす x も存在しない。

③，⑥ を同時に満たす x が存在するのは，$a<2a-3$ のときである。

$a<2a-3$ を解くと　$a>3$

よって，$a>3$ と $\frac{3}{4}<a<4$ の共通範囲を求めて　$3<a<4$

(3) [1] (2) と同様に考えると，$2a-3\leqq a$ すなわち $0<a\leqq3$ のとき ①，② を同時に満たす x は存在しない。すなわち，題意を満たす。

[2] $3<a<4$ のとき，$3<a$ から　$a+3<2a$　よって　$a<2a-3$

また，$2\cdot3-3<2a-3<2\cdot4-3$ から　$3<2a-3<5$　……⑦

$3+3<a+3<4+3$ から　$6<a+3<7$　……⑧

⑦，⑧ から　$2a-3<a+3$

よって，①，② を同時に満たす x の範囲は　$a<x<2a-3$

このとき，題意を満たすための条件は　$2a-3\leqq4$　ゆえに　$a\leqq\frac{7}{2}$

$3<a<4$ との共通範囲を求めて　$3<a\leqq\frac{7}{2}$

[1]，[2] を合わせて，求める範囲は　$0<a\leqq\frac{7}{2}$

5

解答　$a=15$

解説

$6x^2-(16a+7)x+(2a+1)(5a+2)<0$ から　$\{2x-(2a+1)\}\{3x-(5a+2)\}<0$

よって　$\left(x-\frac{2a+1}{2}\right)\left(x-\frac{5a+2}{3}\right)<0$　……①

ここで　$\frac{5a+2}{3}-\frac{2a+1}{2}=\frac{4a+1}{6}>0$　($a>0$ から)

ゆえに　$\frac{2a+1}{2}<\frac{5a+2}{3}$

したがって，① を解くと　$\frac{2a+1}{2}<x<\frac{5a+2}{3}$　……②

これを満たす整数 x が 10 個であるためには，$9<\frac{5a+2}{3}-\frac{2a+1}{2}\leqq11$ であることが必要である。

このとき　$9<\frac{4a+1}{6}\leqq11$　すなわち　$\frac{53}{4}<a\leqq\frac{65}{4}$

a は整数であるから　$14\leqq a\leqq16$

[1] $a=14$ のとき，② から　$\frac{29}{2}<x<24$

これを満たす整数 x は 9 個ある。

[2] $a=15$ のとき，② から　$\frac{31}{2}<x<\frac{77}{3}$

これを満たす整数 x は 10 個ある。

[3] $a=16$ のとき，② から　$\frac{33}{2}<x<\frac{82}{3}$

これを満たす整数 x は 11 個ある。

[1]～[3] から，求める整数 a の値は　$a=15$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$2<a<\sqrt{5}$　　(2)　$m>10$

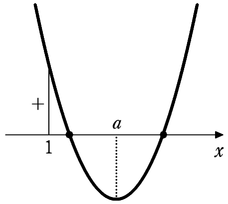
解説

(1)　$f(x)=x^2-2ax+2a^2-5$ とする。

$y=f(x)$のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=a$ である。

このグラフが x 軸の $x>1$ の部分と，異なる２点で交わるのは

$$\begin{cases} D=(-2a)^2-4\cdot 1\cdot(2a^2-5)>0 & \cdots\cdots ① \\ f(1)=1-2a+2a^2-5>0 & \cdots\cdots ② \\ \text{軸について}\quad a>1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

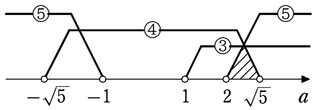


の３つが同時に成り立つときである。

① から　$-4(a^2-5)>0$

よって　$a^2-5<0$

これを解いて　$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$　……④



② から　$2(a^2-a-2)>0$

よって　$a^2-a-2>0$

これを解いて　$a<-1,\ 2<a$　……⑤

③，④，⑤ の共通範囲を求めて　$2<a<\sqrt{5}$

(2)　$f(x)=x^2-(m-4)x+m-1$ とおく。

２次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D=\{-(m-4)\}^2-4\cdot 1\cdot(m-1)$$
$$=m^2-12m+20=(m-2)(m-10)$$

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=\dfrac{m-4}{2}$ である。

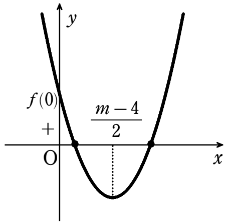
方程式 $f(x)=0$ が異なる２つの正の解をもつことと，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と異なる２点で交わることは同じである。

したがって，次の３つが同時に成り立てばよい。

$D>0$　……①

$f(0)=m-1>0$　……②

軸について　$\dfrac{m-4}{2}>0$　……③



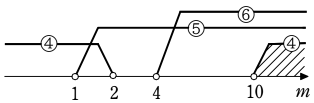
① から　$(m-2)(m-10)>0$

よって　$m<2,\ 10<m$　……④

② から　$m>1$　……⑤

③ から　$m>4$　……⑥

④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて　$m>10$



$\boxed{2}$

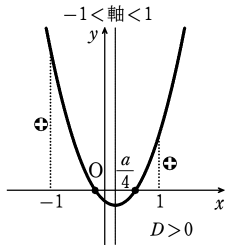
解答　$-\dfrac{1}{2}<a<4-2\sqrt{2}$

解説

判別式を D とし，$f(x)=2x^2-ax+a-1$ とする。

題意を満たすための条件は，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $-1<x<1$ の部分と，異なる２点で交わることである。

したがって，次の [1]〜[4] が同時に成り立つ。



[1]　$D=(-a)^2-4\cdot 2(a-1)=a^2-8a+8>0$

$a^2-8a+8=0$ を解くと　　$a=4\pm 2\sqrt{2}$

よって，$a^2-8a+8>0$ の解は

$a<4-2\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2}<a$　……①

[2]　放物線の軸は直線 $x=\dfrac{a}{4}$ で，この軸について

$-1<\dfrac{a}{4}<1$　　よって　　$-4<a<4$　……②

[3]　$f(-1)>0$ から　　$2\cdot(-1)^2-a\cdot(-1)+a-1>0$

よって　　$a>-\dfrac{1}{2}$　……③

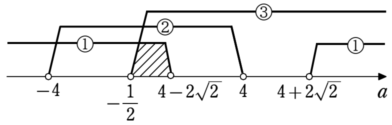
[4]　$f(1)>0$ から

$2\cdot 1^2-a\cdot 1+a-1=1>0$

これは常に成り立つ。

①〜③ の共通範囲から

$-\dfrac{1}{2}<a<4-2\sqrt{2}$



$\boxed{3}$

解答　(1)　$a>3$　　(2)　$a<-\dfrac{9}{2}$

解説

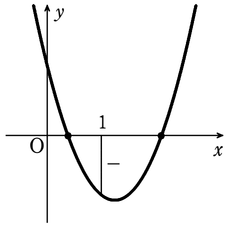
(1)　$f(x)=x^2-2ax+a+2$ とする。

放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $x<1$ と $x>1$ のそれぞれの範囲において１点ずつ交わるのは

$f(1)=-a+3<0$

が成り立つときである。

よって　　$a>3$



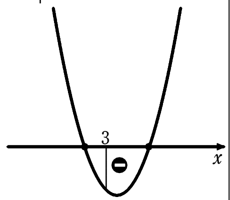
(2)　$f(x)=2x^2+ax+a$ とする。

$f(x)=0$ が３より大きい解と３より小さい解をもつための条件は　　$f(3)<0$

ゆえに　　$2\cdot 3^2+a\cdot 3+a<0$

整理して　　$2a+9<0$

したがって　　$a<-\dfrac{9}{2}$



$\boxed{4}$

解答　$\dfrac{5}{2}<a<\dfrac{10}{3}$

解説

$f(x)=x^2-ax+1$ とおく。

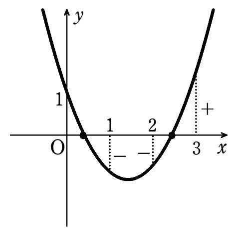
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，$f(0)=1>0$ であるから，２次方程式 $f(x)=0$ の１つの解が０と１の間にあり，他の解が２と３の間にあるのは

$f(1)<0$　かつ　$f(2)<0$　かつ　$f(3)>0$

のときである。

よって　　$2-a<0,\ 5-2a<0,\ 10-3a>0$

これを解いて　　$\dfrac{5}{2}<a<\dfrac{10}{3}$



$\boxed{5}$

解答　$0<a<4$

解説

求める条件は，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲における $f(x)=x^2-2ax+3a$ の最小値が正であることである。

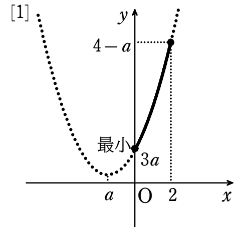
$f(x)=(x-a)^2-a^2+3a$ であるから，軸は直線 $x=a$

[1]　$a<0$ のとき

$f(x)$ は $x=0$ で最小となる。

よって　　$f(0)=3a>0$

これは，$a<0$ を満たさない。



[2]　$0\leqq a\leqq 2$ のとき

$f(x)$ は $x=a$ で最小となる。

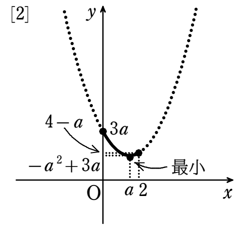
よって　　$f(a)=-a^2+3a>0$

すなわち　$a^2-3a<0$

これを解くと，$a(a-3)<0$ から　　$0<a<3$

これと $0\leqq a\leqq 2$ の共通範囲は

$0<a\leqq 2$　……①



[3]　$2<a$ のとき

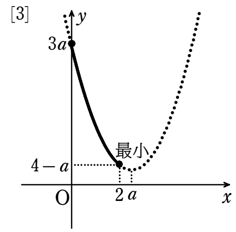
$f(x)$ は $x=2$ で最小となる。

よって　　$f(2)=4-a>0$

ゆえに　　$a<4$

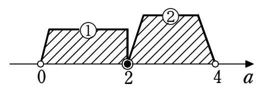
これと $2<a$ の共通範囲は

$2<a<4$　……②



求める a の値の範囲は，① と ② を合わせて

$0<a<4$



1

解答　(1)　(ア)　$m<-2\sqrt{2}$　　(イ)　$2\sqrt{2}<m<3$　　(2)　$m>2$

(3)　(ア)　$m>3$　　(イ)　$m<-1,\ 3<m<\frac{19}{6}$

解説

(1)　$f(x)=x^2+mx+2$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-\frac{m}{2}$ である。

(ア)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる２点で交わるのは

$D=m^2-4\cdot1\cdot2>0$ ……①

軸について　$-\frac{m}{2}>0$ ……②

$f(0)=2>0$ ……③

の３つが同時に成り立つときである。

①から　$m^2-8>0$

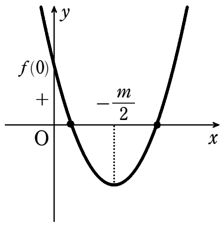
すなわち　$(m+2\sqrt{2})(m-2\sqrt{2})>0$

ゆえに　$m<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<m$ ……④

②から　$m<0$ ……⑤

③は常に成り立つ。

よって，④，⑤の共通範囲を求めて　$m<-2\sqrt{2}$



(イ)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x<-1$ の部分が異なる２点で交わるのは

$D=m^2-4\cdot1\cdot2>0$ ……①

軸について　$-\frac{m}{2}<-1$ ……②

$f(-1)=1-m+2>0$ ……③

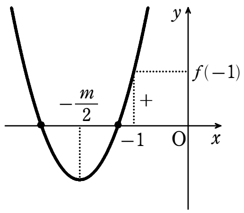
の３つが同時に成り立つときである。

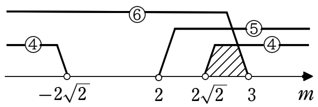
①から　$m<-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}<m$ ……④

②から　$m>2$ ……⑤

③から　$m<3$ ……⑥

よって，④，⑤，⑥の共通範囲を求めて　$2\sqrt{2}<m<3$





(2)　$f(x)=x^2+2(m-1)x+3-m$ とする。

これを変形すると

$f(x)=\{x+(m-1)\}^2-m^2+m+2$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=1-m$ である。

また　$D=\{2(m-1)\}^2-4\cdot1\cdot(3-m)$

$=4(m^2-m-2)$

$=4(m+1)(m-2)$

放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $x<1$ の部分と，異なる２点で交わるのは，次の[1]，[2]，[3]が同時に成り立つときである。

[1]　グラフが x 軸と異なる２点で交わる。

$D>0$ から

$m<-1,\ 2<m$ ……①

[2]　軸 $x=1-m$ について　$1-m<1$

すなわち　$m>0$ ……②

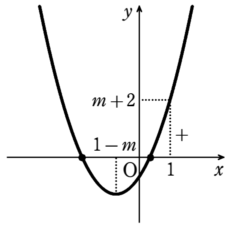
[3]　$f(1)>0$　すなわち　$1^2+2(m-1)\cdot1+3-m>0$

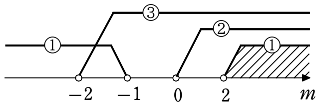
よって　$m+2>0$

したがって　$m>-2$ ……③

①，②，③の共通範囲を求めて

$m>2$





(3)　$f(x)=x^2+2mx+2m+3$ とおく。

これを変形すると　$f(x)=(x+m)^2-m^2+2m+3$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-m$ である。

また，２次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(2m)^2-4(2m+3)=4(m^2-2m-3)=4(m+1)(m-3)$

(ア)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の負の部分が異なる２点で交わることと同じである。

したがって，次の３つが同時に成り立てばよい。

$D=4(m+1)(m-3)>0$ ……①

軸について　$-m<0$ ……②

$f(0)=2m+3>0$ ……③

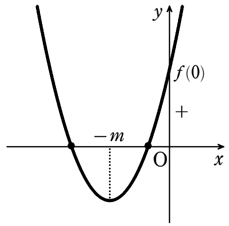
①から　$m<-1,\ 3<m$ ……④

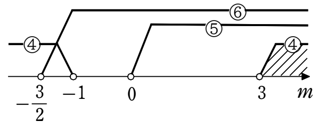
②から　$m>0$ ……⑤

③から　$m>-\frac{3}{2}$ ……⑥

④，⑤，⑥の共通範囲を求めて

$m>3$





(イ)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x>-4$ の部分が異なる２点で交わることと同じである。したがって，次の３つが同時に成り立てばよい。

$D=4(m+1)(m-3)>0$ ……①

軸について　$-m>-4$ ……②

$f(-4)=-6m+19>0$ ……③

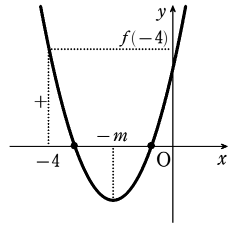
①から　$m<-1,\ 3<m$ ……④

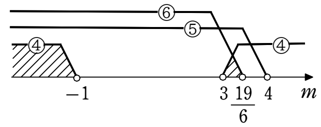
②から　$m<4$ ……⑤

③から　$m<\frac{19}{6}$ ……⑥

④，⑤，⑥の共通範囲を求めて

$m<-1,\ 3<m<\frac{19}{6}$





2

解答　(1)　$\frac{-5+\sqrt{13}}{2}<a<0$　　(2)　$3<a\leqq\frac{7}{2}$

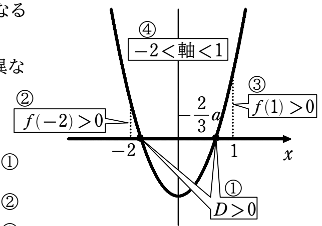
解説

(1)　$f(x)=3x^2+4ax+a^2+a$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とする。

方程式 $f(x)=0$ が $-2<x<1$ の範囲に異なる２つの実数解をもつための条件は，放物線 $y=f(x)$ が x 軸の $-2<x<1$ の部分と，異なる２点で交わることと同じである。

よって，次のことが同時に成り立つ。

$$\begin{cases}\frac{D}{4}=(2a)^2-3(a^2+a)>0 & \cdots\cdots ① \\ f(-2)=a^2-7a+12>0 & \cdots\cdots ② \\ f(1)=a^2+5a+3>0 & \cdots\cdots ③ \\ \text{軸について}\ -2<-\frac{2}{3}a<1 & \cdots\cdots ④\end{cases}$$



①から　$a(a-3)>0$　　よって　$a<0,\ 3<a$

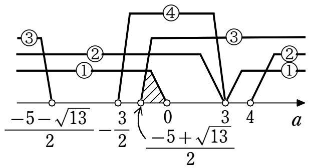
②から　$(a-3)(a-4)>0$

よって　$a<3,\ 4<a$

③から　$a<\frac{-5-\sqrt{13}}{2},\ \frac{-5+\sqrt{13}}{2}<a$

④から　$-\frac{3}{2}<a<3$

共通範囲を求めて　$\frac{-5+\sqrt{13}}{2}<a<0$



(2)　$f(x)=x^2-2ax+2a+3$ とする。

方程式 $f(x)=0$ が $1\leqq x\leqq5$ の範囲に異なる２つの実数解をもつための条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $1\leqq x\leqq5$ の部分と，異なる２点で交わることである。

したがって，次の[1]～[4]が同時に成り立つ。

[1]　$f(x)=0$ の判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(2a+3)=a^2-2a-3>0$

よって　$a<-1,\ 3<a$ ……①

[2]　軸は直線 $x=a$ で，この軸について　$1<a<5$ ……②

[3]　$f(1)=1^2-2a\cdot1+2a+3=4\geqq0$

これは常に成り立つ。

[4]　$f(5)=5^2-2a\cdot5+2a+3=-8a+28\geqq0$

よって　$a\leqq\dfrac{7}{2}$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて　$3<a\leqq\dfrac{7}{2}$

別解　(定数 a を分離する解法)

与式から　$x^2+3=2a(x-1)$

放物線 $y=x^2+3$ と，定点 $(1,\ 0)$ を通る

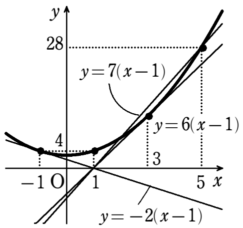
直線 $y=2a(x-1)$ が接するとき，

$D=0$ であるから　$\dfrac{D}{4}=a^2-2a-3=0$

よって　$a=-1,\ 3$

$a=-1$ のとき，接点の x 座標は　$x=-1$

$a=3$ のとき，接点の x 座標は　$x=3$



放物線 $y=x^2+3$ と直線 $y=2a(x-1)$ の共有点の x 座標に着目すると，求める a の値の範囲は，図より　$6<2a\leqq7$

よって　$3<a\leqq\dfrac{7}{2}$

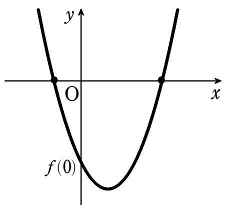
$\boxed{3}$

解答　(1)　$m<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<m$　　(2)　$a>1$

解説

(1)　$f(x)=x^2+2(m-1)x+3-m^2$ とおく。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは，放物線が y 軸の負の部分と交わるときである。



したがって　$f(0)<0$　すなわち　$3-m^2<0$

よって　$m^2-3>0$

ゆえに　$(m+\sqrt{3})(m-\sqrt{3})>0$

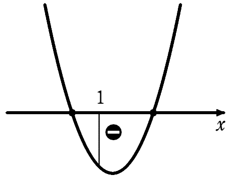
したがって　$m<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<m$

(2)　$f(x)=x^2-4ax+3a$ とする。

方程式 $f(x)=0$ が 1 より大きい解と 1 より小さい解をもつための条件は　$f(1)<0$

ゆえに　$1-a<0$

よって　$a>1$



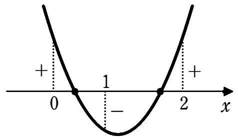
$\boxed{4}$

解答　(1)　$0<a<1$　　(2)　$1<a<\dfrac{3}{2}$

解説

(1)　$f(x)=2x^2-3x+a$ とおく。

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，与えられた 2 次方程式の 1 つの解が 0 と 1 の間にあり，他の解が 1 と 2 の間にあるのは



$f(0)>0$　かつ　$f(1)<0$　かつ　$f(2)>0$

のときである。

$f(0)>0$ から　　$a>0$　……①

$f(1)<0$ から　　$-1+a<0$

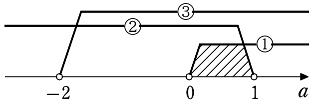
ゆえに　　$a<1$　……②

$f(2)>0$ から　　$2+a>0$

ゆえに　　$a>-2$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて

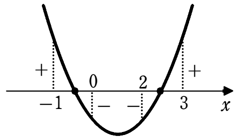
$0<a<1$



(2)　$f(x)=2ax^2-(a+2)x-5$ とおく。

$a>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，$f(0)=-5<0$ である。

よって，与えられた 2 次方程式の 1 つの解が -1 と 0 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にあるのは



$f(-1)>0$　かつ　$f(2)<0$　かつ　$f(3)>0$

のときである。

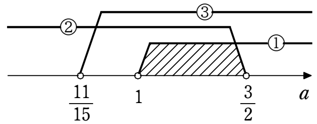
$f(-1)>0$ から　$3a-3>0$　　ゆえに　$a>1$　……①

$f(2)<0$ から　$6a-9<0$　　ゆえに　$a<\dfrac{3}{2}$　……②

$f(3)>0$ から　$15a-11>0$　　ゆえに　$a>\dfrac{11}{15}$　……③

①，②，③ の共通範囲を求めて

$1<a<\dfrac{3}{2}$



$\boxed{5}$

解答　$-6<m<3$

解説

求める条件は，$0\leqq x\leqq8$ における $f(x)=x^2-2mx+m+6$ の最小値が正となることである。$f(x)=(x-m)^2-m^2+m+6$ であるから，軸は　直線 $x=m$

[1]　$m<0$ のとき，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq8$ で増加するから，最小値は　$f(0)=m+6$

ゆえに　$m+6>0$　　よって　$m>-6$

$m<0$ であるから　$-6<m<0$　……①

[2]　$0\leqq m\leqq8$ のとき，最小値は　$f(m)=-m^2+m+6$

ゆえに　$-m^2+m+6>0$　すなわち　$m^2-m-6<0$

これを解くと，$(m+2)(m-3)<0$ から　$-2<m<3$

$0\leqq m\leqq8$ であるから　$0\leqq m<3$　……②

[3]　$8<m$ のとき，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq8$ で減少するから，最小値は　$f(8)=-15m+70$

ゆえに，$-15m+70>0$ から　$m<\dfrac{14}{3}$　　これは $8<m$ を満たさない。

求める m の値の範囲は，①，② を合わせて　　$-6<m<3$

$\boxed{1}$

解答　$-1<a<0,\ \dfrac{7}{2}<a<4$

解説

$f(x)=ax^2+2(a-2)x+2a-7$,

$\dfrac{D}{4}=(a-2)^2-a\cdot(2a-7)=-a^2+3a+4=-(a+1)(a-4)$

とする。

求める条件は，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わることである。

[1]　$a>0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは下に凸であるから，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わるための条件は

$\dfrac{D}{4}=-(a+1)(a-4)>0$　……①

$y=f(x)$ の軸は $x=-\dfrac{a-2}{a}$ で　$-\dfrac{a-2}{a}<0$　……②

$f(0)=2a-7>0$　……③

の 3 つが同時に成り立つことである。

① から　$-1<a<4$

$a>0$ と ② から　$a>2$

③ から　$a>\dfrac{7}{2}$

これらと $a>0$ との共通範囲は　$\dfrac{7}{2}<a<4$

[2]　$a<0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは上に凸であるから，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わるための条件は

$\dfrac{D}{4}=-(a+1)(a-4)>0$　……④

$y=f(x)$ の軸について　$-\dfrac{a-2}{a}<0$　……⑤

$f(0)=2a-7<0$　……⑥

の 3 つが同時に成り立つことである。

④ から　$-1<a<4$

$a<0$ と ⑤ から　$a<2$

⑥ から　$a<\dfrac{7}{2}$

これらと $a<0$ との共通範囲は　$-1<a<0$ である。

したがって，条件を満たす a の値の範囲は

$-1<a<0,\ \dfrac{7}{2}<a<4$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a\leqq-\dfrac{21}{16}$　　(2)　$a\geqq-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

解説

$x^2-6x+8\leqq0$ から　$(x-2)(x-4)\leqq0$

よって　$2\leqq x\leqq4$

(1)　条件を満たすためには，$2\leqq x\leqq4$ が $x^2+4ax+5\leqq0$ の解に含まれればよい。

$f(x)=x^2+4ax+5$ とおくと　$f(2)\leqq 0$，$f(4)\leqq 0$

したがって　$2^2+4a\cdot 2+5\leqq 0$ より　$a\leqq -\dfrac{9}{8}$

$4^2+4a\cdot 4+5\leqq 0$ より　$a\leqq -\dfrac{21}{16}$

よって　$a\leqq -\dfrac{21}{16}$

(2)　$f(x)=(x+2a)^2-4a^2+5$ であるから $f(x)$ の軸は　$x=-2a$

$2\leqq x\leqq 4$ において $f(x)\geqq 0$ となるためには，$f(x)$ の軸に着目して

$-2a<2$ すなわち $a>-1$ のとき　$f(2)=2^2+4a\cdot 2+5\geqq 0$ より

$a\geqq -\dfrac{9}{8}$　よって　$a>-1$

$2\leqq -2a\leqq 4$ すなわち $-2\leqq a\leqq -1$ のとき　$-4a^2+5\geqq 0$ より

$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\leqq a\leqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$　よって　$-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\leqq a\leqq -1$

$4<-2a$ すなわち $a<-2$ のとき　$f(4)=4^2+4a\cdot 4+5\geqq 0$

このとき a の解はない。

以上から　$a\geqq -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

1

解答　$2\leqq a<3$

解説

判別式を D とし，$f(x)=x^2+(2-a)x+4-2a$ とする。

$f(-1)=-a+3$，$f(1)=-3a+7$

[1]　２つの解がともに $-1<x<1$ の範囲にあるための条件は

$$\begin{cases} D=(2-a)^2-4\cdot 1\cdot(4-2a)\geqq 0 \ \cdots\cdots ① \\ 軸\ x=-\dfrac{2-a}{2}\ について\quad -1<-\dfrac{2-a}{2}<1 \ \cdots\cdots ② \\ f(-1)=-a+3>0 \ \cdots\cdots ③,\ f(1)=-3a+7>0 \ \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

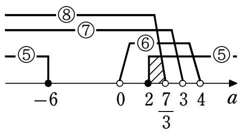
① から　$a^2+4a-12\geqq 0$　よって　$(a-2)(a+6)\geqq 0$

ゆえに　$a\leqq -6,\ 2\leqq a$ ……⑤

②～④ を解くと，解は順に

$0<a<4$ ……⑥，$a<3$ ……⑦，

$a<\dfrac{7}{3}$ ……⑧



⑤～⑧ の共通範囲は　$2\leqq a<\dfrac{7}{3}$

[2]　解の１つが $-1<x<1$，他の解が $x<-1$ または $1<x$ にあるための条件は

$f(-1)f(1)<0$　ゆえに　$(-a+3)(-3a+7)<0$

よって　$(a-3)(3a-7)<0$　ゆえに　$\dfrac{7}{3}<a<3$

[3]　解の１つが $x=-1$ のときは　$f(-1)=0$

よって　$-a+3=0$　ゆえに　$a=3$

このとき，方程式は　$x^2-x-2=0$　よって　$(x+1)(x-2)=0$

ゆえに，他の解は $x=2$ となり，条件を満たさない。

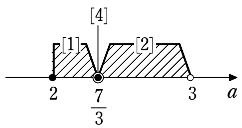
[4]　解の１つが $x=1$ のときは　$f(1)=0$

よって　$-3a+7=0$　ゆえに　$a=\dfrac{7}{3}$

このとき，方程式は　$3x^2-x-2=0$

よって　$(x-1)(3x+2)=0$

ゆえに，他の解は $x=-\dfrac{2}{3}$ となり，条件を満たす。



[1]～[4] から　$2\leqq a<3$

2

解答　略

解説

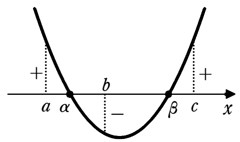
$f(x)=(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)$ とする。

$a<b<c$ であるから

$f(a)=(a-b)(a-c)>0$

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$



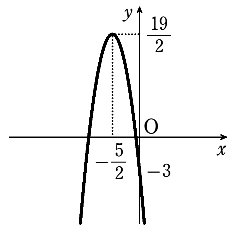
よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のような下に凸の放物線であり，$a<x<b$ および $b<x<c$ の範囲で x 軸と交わる。

ゆえに，与えられた２次方程式 $f(x)=0$ は異なる２つの解をもち，２つの解のうち１つは a と b の間にあり，他の１つは b と c の間にある。

1

解答　(1)　[図]，軸 $x=-\dfrac{5}{2}$，頂点 $\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{19}{2}\right)$

(2)　$a=\pm\dfrac{3}{2}$



解説

(1)　$f(x)=-2x^2-10x-3=-2(x^2+5x)-3$

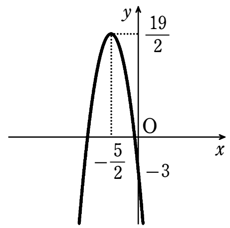
$=-2\left\{\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right\}-3$

$=-2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+2\cdot\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-3$

$=-2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{19}{2}$

よって，$y=f(x)$ は　$y=-2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{19}{2}$

したがって，この関数のグラフは右の図のような放物線である。



また，軸は　直線 $x=-\dfrac{5}{2}$，

頂点は　点 $\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{19}{2}\right)$

(2)　$f(x)=-2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{19}{2}$ であるから

$f\left(a-\dfrac{5}{2}\right)=-2\left\{\left(a-\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{5}{2}\right\}^2+\dfrac{19}{2}=-2a^2+\dfrac{19}{2}$

よって，$f\left(a-\dfrac{5}{2}\right)=5$ から　$-2a^2+\dfrac{19}{2}=5$

すなわち　$a^2=\dfrac{9}{4}$　ゆえに　$a=\pm\dfrac{3}{2}$

2

解答　$a=7$，$b=3$

解説

放物線 $y=x^2+ax+b$ を原点に関して対称移動すると

$-y=(-x)^2+a(-x)+b$

すなわち　$y=-x^2+ax-b$

さらに，この放物線を y 軸方向に 8 だけ平行移動すると

$y-8=-x^2+ax-b$

すなわち　$y=-x^2+ax-b+8$

これが $y=-x^2+7x+5$ に一致するから

$a=7$，$-b+8=5$

よって　$a=7$，$b=3$

別解　移動後の放物線 $y=-x^2+7x+5$ を y 軸方向に -8 だけ平行移動すると

$$y-(-8)=-x^2+7x+5$$

すなわち　$y=-x^2+7x-3$

さらに，この放物線を原点に関して対称移動すると

$$-y=-(-x)^2+7(-x)-3$$

すなわち　$y=x^2+7x+3$

これが移動前の放物線 $y=x^2+ax+b$ と一致するから

$$a=7,\ b=3$$

$\boxed{3}$

解答　$y=-\dfrac{3}{4}(x+1)^2+5\ \left(y=-\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{17}{4}\right)$

解説

最大値が 5 であるから，求める 2 次関数は

$$y=a(x-p)^2+5\ (a<0)$$

と表される。

そのグラフが 2 点 $(-3,\ 2)$，$(1,\ 2)$ を通るから

$2=a(-3-p)^2+5$　すなわち　$a(3+p)^2=-3$

$2=a(1-p)^2+5$　すなわち　$a(1-p)^2=-3$

これを解くと　$a(3+p)^2=a(1-p)^2$

$a<0$ から　$9+6p+p^2=1-2p+p^2$

よって　$p=-1$

$a(3+p)^2=-3$ に代入して　$a(3-1)^2=-3$

ゆえに　$4a=-3$　よって　$a=-\dfrac{3}{4}$

これは，$a<0$ を満たす。

ゆえに，求める 2 次関数は

$$y=-\frac{3}{4}(x+1)^2+5\quad\left(y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{17}{4}\text{ でもよい}\right)$$

別解　(p の求め方)

通過する 2 点の y 座標が等しいから，軸は 2 点を結ぶ線分の中点を通る。

よって，軸の直線は　$x=\dfrac{-3+1}{2}=-1$

ゆえに　$p=-1$

$\boxed{4}$

解答　(1)　最大値 5，最小値 -4　(2)　$2<y\leqq\dfrac{10}{3}$

解説

(1)　この関数の式は

$$y=(x-2)^2-4\ (0<x\leqq5)$$

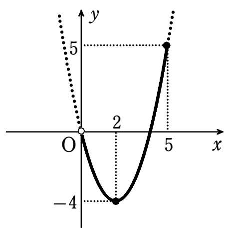
と変形され，そのグラフは右の図の実線の部分である。

よって，この関数は

$x=5$ で最大値 5，

$x=2$ で最小値 -4

をとる。



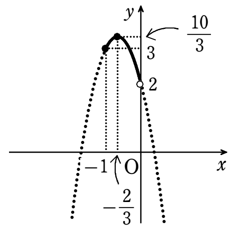
(2)　この関数の式は

$$y=-3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}\ (-1\leqq x<0)$$

と変形され，そのグラフは右の図の実線の部分である。

よって，この関数の値域は

$$2<y\leqq\frac{10}{3}$$



$\boxed{5}$

解答　$20\sqrt{2}$

解説

長方形の縦と横の長さをそれぞれ x，y とする。

$2x+2y=80$ であるから　$y=40-x$

辺の長さは正の数であるから　$x>0$　かつ　$40-x>0$

すなわち　$0<x<40$　…… ①

三平方の定理により　$l^2=x^2+y^2=x^2+(40-x)^2=2x^2-80x+1600$

$$=2(x-20)^2+800$$

よって，① において，l^2 は $x=20$ で最小値 800 をとる。

$l>0$ であるから，l^2 が最小のとき，l も最小となる。

したがって，l の最小値は　$\sqrt{800}=20\sqrt{2}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$0<a<3$ のとき　$x=a$ で最大値 $-a^2+6a$，$a\geqq3$ のとき　$x=3$ で最大値 9

(2)　$0<a<6$ のとき　$x=0$ で最小値 0，$a=6$ のとき　$x=0$，6 で最小値 0，

$a>6$ のとき　$x=a$ で最小値 $-a^2+6a$

解説

$y=-x^2+6x$ を変形すると　$y=-(x-3)^2+9$

(1)　[1]　$0<a<3$ のとき　グラフは図 ① のようになる。

よって　$x=a$ で最大値 $-a^2+6a$

[2]　$a\geqq3$ のとき　グラフは図 ②，③，④ のようになる。

よって　$x=3$ で最大値 9

(2)　定義域の中央の値は　$\dfrac{a}{2}$

[1]　$0<\dfrac{a}{2}<3$ すなわち $0<a<6$ のとき

グラフは図 ①，② のようになる。

よって　$x=0$ で最小値 0

[2]　$\dfrac{a}{2}=3$ すなわち $a=6$ のとき

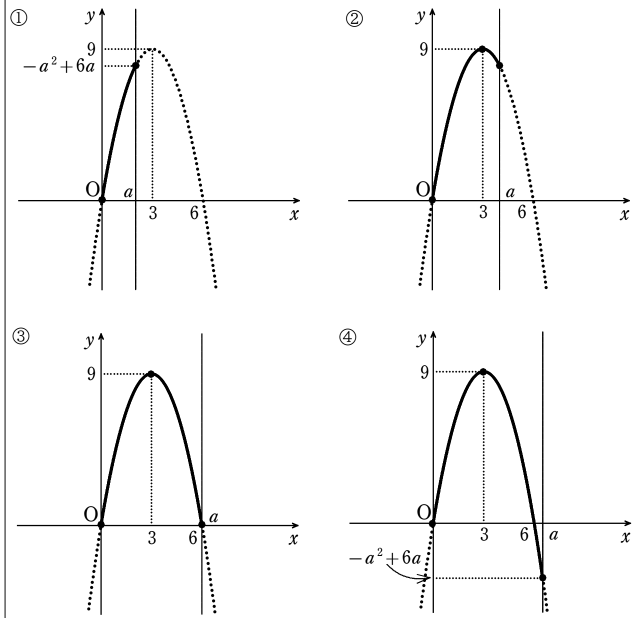
グラフは図 ③ のようになる。

よって　$x=0$，6 で最小値 0

[3]　$3<\dfrac{a}{2}$ すなわち $a>6$ のとき

グラフは図 ④ のようになる。

よって　$x=a$ で最小値 $-a^2+6a$



$\boxed{7}$

解答　(1)　$a=1$ のとき $(0,\ 1)$，$a=5$ のとき $(-2,\ -1)$

(2)　$k>-\dfrac{1}{2}$ のとき 2 個，$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき 1 個，$k<-\dfrac{1}{2}$ のとき 0 個

解説

(1)　$y=x^2+ax+a$ と $y=x+1$ から y を消去して

$$x^2+ax+a=x+1$$

整理すると　$x^2+(a-1)x+a-1=0$　…… ①

2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$D=(a-1)^2-4(a-1)=(a-1)(a-5)$$

与えられた放物線と直線が接するための必要十分条件は　$D=0$

ゆえに　$(a-1)(a-5)=0$　よって　$a=1,\ 5$

このとき，① の重解は　$x=-\dfrac{a-1}{2\cdot1}=\dfrac{1-a}{2}$

$a=1$ のとき　$x=0$　このとき　$y=1$

したがって，接点の座標は　$(0,\ 1)$

$a=5$ のとき　$x=-2$　このとき　$y=-1$

したがって，接点の座標は　$(-2,\ -1)$

(2)　$y=x^2-2kx$ と $y=2x-k^2$ から y を消去して

$$x^2-2kx=2x-k^2$$

整理すると　$x^2-2(k+1)x+k^2=0$　…… ①

2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-1\cdot k^2=2k+1$$

$D>0$　すなわち　$2k+1>0$ となるのは　$k>-\frac{1}{2}$

$D=0$　すなわち　$2k+1=0$ となるのは　$k=-\frac{1}{2}$

$D<0$　すなわち　$2k+1<0$ となるのは　$k<-\frac{1}{2}$

よって，求める共有点の個数は

$k>-\frac{1}{2}$ のとき２個，$k=-\frac{1}{2}$ のとき１個，$k<-\frac{1}{2}$ のとき０個

8

解答　$-2\leqq x<-\frac{1}{3}$，$1<x\leqq 2$

解説

$x^2\leqq 4$ から　$x^2-4\leqq 0$　すなわち　$(x+2)(x-2)\leqq 0$

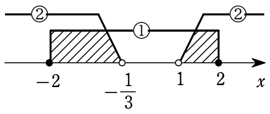
よって　$-2\leqq x\leqq 2$ ……①

$3x^2-2x>1$ から　$3x^2-2x-1>0$　すなわち　$(3x+1)(x-1)>0$

よって　$x<-\frac{1}{3}$，$1<x$ ……②

①と②の共通範囲を求めて

$-2\leqq x<-\frac{1}{3}$，$1<x\leqq 2$



9

解答　(1)　$-2<m<2$　(2)　$-8<m<0$　(3)　$-2<a<6$

解説

(1)　x^2 の係数は正であるから，x 軸と共有点をもたないための必要十分条件は

$D=m^2-4\cdot 1\cdot 1<0$　ゆえに　$m^2-4<0$

これを解いて　$-2<m<2$

(2)　解がすべての実数であるための条件は　$D=(-m)^2-4\cdot 1\cdot(-2m)<0$

すなわち　$m(m+8)<0$　これを解いて　$-8<m<0$

(3)　x^2 の係数は正であるから，常に不等式が成り立つ条件は

$D=a^2-4\cdot 1\cdot(a+3)<0$

よって　$a^2-4a-12<0$　ゆえに　$(a+2)(a-6)<0$

したがって，求める a の値の範囲は　$-2<a<6$

10

解答　$m<-\frac{1}{2}$

解説

２次不等式 $mx^2-3x+m-4<0$ がすべての実数 x で成り立つための条件は，$m<0$ であり，２次方程式 $mx^2-3x+m-4=0$ の判別式 D について，$D<0$ が成り立つことである。

$D=(-3)^2-4\cdot m\cdot(m-4)=-4m^2+16m+9$ であるから，$D<0$ より

$-4m^2+16m+9<0$　よって　$4m^2-16m-9>0$

すなわち　$(2m+1)(2m-9)>0$　ゆえに　$m<-\frac{1}{2}$，$\frac{9}{2}<m$

$m<0$ であるから　$m<-\frac{1}{2}$

11

解答　(1)　$m<-14$　(2)　$-14<m\leqq 2$　(3)　$m>22$

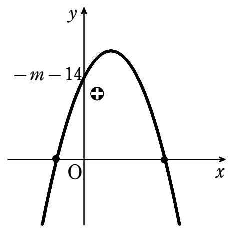
解説

$f(x)=-x^2+(m-10)x-m-14$ とし，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(m-10)^2-4\cdot(-1)\cdot(-m-14)$

$=m^2-24m+44$

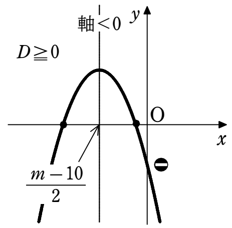
$=(m-2)(m-22)$



(1)　$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線であるから，x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは，$f(0)=-m-14>0$ のときである。

したがって　$m<-14$

(2)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸の負の部分とのみ共有点をもつのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。



（x 軸に接する場合も含める）

[1]　グラフと x 軸が共有点をもつから

$D=(m-2)(m-22)\geqq 0$

よって　$m\leqq 2$，$22\leqq m$　……①

[2]　グラフの軸は直線 $x=\frac{m-10}{2}$ で，この軸について　$\frac{m-10}{2}<0$

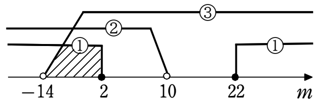
よって　$m<10$　……②

[3]　$f(0)<0$ であるから　$-m-14<0$

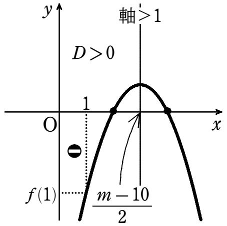
よって　$m>-14$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて

$-14<m\leqq 2$



(3)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x>1$ の部分と，異なる２点で交わるのは，次の [1]，[2]，[3] が同時に成り立つときである。



[1]　グラフと x 軸が異なる２点で交わるから

$D=(m-2)(m-22)>0$

よって　$m<2$，$22<m$　……①

[2]　グラフの軸：直線 $x=\frac{m-10}{2}$ について

$\frac{m-10}{2}>1$　よって　$m>12$　……②

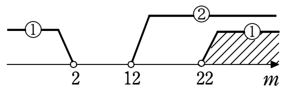
[3]　$f(1)<0$ から

$-1+m-10-m-14=-25<0$

これは常に成り立つ。

①，②の共通範囲を求めて

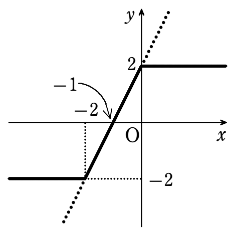
$m>22$



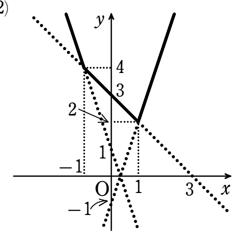
1

解答　(1)　［図］の実線部分　(2)　［図］の実線部分

(1)



(2)



解説

(1)　$x<-2$ のとき

$y=-(x+2)-(-x)$

$=-2$

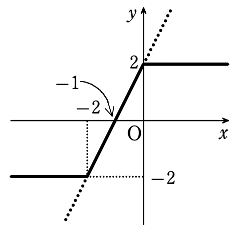
$-2\leqq x<0$ のとき

$y=(x+2)-(-x)=2x+2$

$0\leqq x$ のとき

$y=x+2-x=2$

よって，グラフは右の図の実線部分。



(2)　$x<-1$ のとき

$y=-(x+1)-2(x-1)$

$=-3x+1$

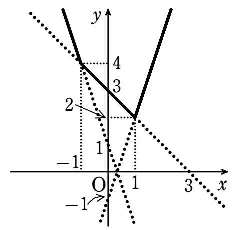
$-1\leqq x<1$ のとき

$y=x+1-2(x-1)=-x+3$

$1\leqq x$ のとき

$y=x+1+2(x-1)=3x-1$

よって，グラフは右の図の実線部分。



2

解答　$x=-\frac{3}{2}$ で最小値 $-\frac{25}{2}$，最大値はない

解説

$y=2(x-1)(x+4)$ を変形すると

$y=2(x^2+3x-4)=2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}-8$

$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{2}$

また　$x=-3$ のとき　$y=-8$

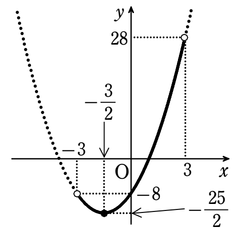
$x=3$　のとき　$y=28$

与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

よって，グラフから

$x=-\frac{3}{2}$ で 最小値 $-\frac{25}{2}$ をとり，

最大値はない。



3

解答 $a=2\sqrt{3}$，$b=\frac{3}{2}$

解説

$y=2x^2+ax+b$ から　$y=2\left(x+\frac{a}{4}\right)^2+b-\frac{a^2}{8}$

この2次関数のグラフが x 軸と接するから

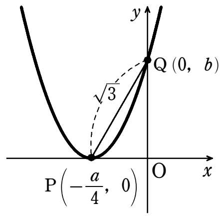
$b-\frac{a^2}{8}=0$ ……①

このとき，Pの座標は　$\left(-\frac{a}{4},\ 0\right)$

また，Qの座標は　$(0,\ b)$

$PQ=\sqrt{3}$ より，$PQ^2=3$ であるから

$\left(-\frac{a}{4}-0\right)^2+(0-b)^2=3$　　すなわち　$\frac{a^2}{16}+b^2=3$ ……②



①から　$a^2=8b$ ……③

これを②に代入して整理すると　$2b^2+b-6=0$　　よって　$(2b-3)(b+2)=0$

上のグラフより，$b>0$ であるから　$b=\frac{3}{2}$　　③に代入して　$a^2=8\cdot\frac{3}{2}=12$

$a>0$ であるから　$a=2\sqrt{3}$

4

解答 (1)　$y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+2$ $\left(y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\right)$　　(2)　$a=-1$，$b=2$，$c=3$

解説

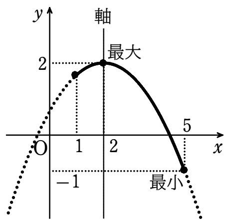
(1)　$1\leqq x\leqq 5$ の範囲で $x=2$ のとき最大値2をとるから，この2次関数のグラフは上に凸で，頂点は点 $(2,\ 2)$ である。

よって，求める2次関数は

$y=a(x-2)^2+2$，$a<0$　と表される。

ゆえに，$1\leqq x\leqq 5$ の範囲で，y は $x=5$ のとき最小になる。$x=5$ のとき $y=-1$ であるから

$-1=a(5-2)^2+2$　　よって　$a=-\frac{1}{3}$



これは $a<0$ を満たす。ゆえに，求める2次関数は

$y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+2$　$\left(y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}\ でもよい\right)$

(2)　$f(-1)=f(3)=0$ であるから，放物線 $y=f(x)$ の軸は，2点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を結ぶ線分の中点 $(1,\ 0)$ を通る。

ゆえに，$f(x)$ は $x=1$ で最大値4をとる。よって，

$f(x)$ は　$f(x)=a(x-1)^2+4$，$a<0$　と表される。

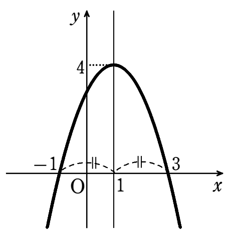
$f(-1)=0$ から　$4a+4=0$

したがって　$a=-1$　　これは $a<0$ を満たす。

ゆえに　$f(x)=-(x-1)^2+4$

よって　$f(x)=-x^2+2x+3$

したがって　$b=2$，$c=3$



別解　$f(-1)=f(3)=0$ であるから，$f(x)=a(x+1)(x-3)$ と表される。

$a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)=a(x-1)^2-4a$ であるから

$f(x)=a(x-1)^2-4a$

最大値が4であるから　$a<0$　かつ　$-4a=4$

よって　$a=-1$　　これは $a<0$ を満たす。

したがって　$f(x)=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$

ゆえに　$a=-1$，$b=2$，$c=3$

5

解答 (ア) 4　(イ) 77　(ウ) 3　(エ) $-4\leqq y\leqq 5$

解説

$t=x^2-2x$ から　$t^2=(x^2-2x)^2=x^4-4x^3+4x^2$

よって　$y=x^4-4x^3+8x=(x^4-4x^3+4x^2)-4x^2+8x$

$=(x^2-2x)^2-4(x^2-2x)=t^2-{}^{\text{ア}}4t$

$x=1+2\sqrt{3}$ のとき

$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$

$=\{(1+2\sqrt{3})-1\}^2-1=(2\sqrt{3})^2-1=11$

ゆえに　$y=t^2-4t=11^2-4\cdot 11={}^{\text{イ}}77$

また，$y=5$ のとき　$t^2-4t=5$

これを解いて　$t=-1,\ 5$

$t=-1$ のとき　$x^2-2x=-1$

これを満たす実数 x の値は，$x=1$ の　1個

$t=5$ のとき　$x^2-2x=5$

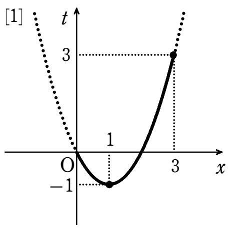
これを満たす実数 x の値は，$x=1\pm\sqrt{6}$ の　2個

したがって，$y=5$ となる実数 x の値は　$1+2={}^{\text{ウ}}3$ (個)

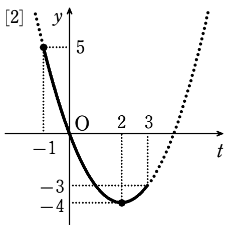
$t=x^2-2x=(x-1)^2-1$ であるから，$0\leqq x\leqq 3$ のとき，t のとりうる値の範囲は，下の図[1]より　$-1\leqq t\leqq 3$

さらに，$y=t^2-4t=(t-2)^2-4$ であるから，$0\leqq x\leqq 3$ すなわち $-1\leqq t\leqq 3$ のとき，y のとりうる値の範囲は，下の図[2]より　${}^{\text{エ}}-4\leqq y\leqq 5$

[1]



[2]



6

解答 $x=0$，$y=0$ で最小値2

解説

$f(x,\ y)=x^2-4xy+5y^2+2y+2$

$=\{(x-2y)^2-(2y)^2\}+5y^2+2y+2$

$=(x-2y)^2+y^2+2y+2$

$=(x-2y)^2+\{(y+1)^2-1^2\}+2$

$=(x-2y)^2+(y+1)^2+1$

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき　$y+1\geqq 1$，$x-2y$ は任意の実数

よって　$(y+1)^2\geqq 1$，$(x-2y)^2\geqq 0$　　ゆえに　$f(x,\ y)\geqq 2$

したがって，$y+1=1$，$x-2y=0$，すなわち $x=0$，$y=0$ で最小値2をとる。

7

解答 (1)　$a<0$ のとき $-a$，$0\leqq a\leqq 10$ のとき $\frac{a^2}{4}-a$，$10<a$ のとき $-25+4a$

(2)　$a=-3,\ 6$

解説

(1)　関数の式を変形すると　$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-a$

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は直線 $x=\frac{a}{2}$，頂点は点 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{4}-a\right)$ である。

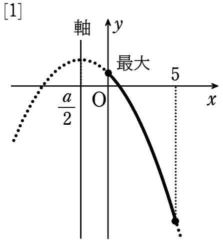
よって，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 5$ における最大値は

[1]　$\frac{a}{2}<0$　すなわち　$a<0$ のとき　$f(0)=-a$

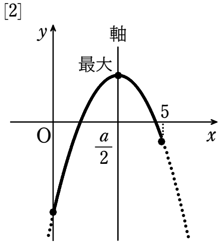
[2]　$0\leqq\frac{a}{2}\leqq 5$　すなわち　$0\leqq a\leqq 10$ のとき　$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}-a$

[3]　$5<\frac{a}{2}$　すなわち　$10<a$ のとき　$f(5)=-25+4a$

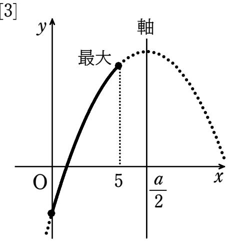
[1]



[2]



[3]



(2)　[1]　$a<0$ のとき，$f(x)$ の最大値が3であるとすると　$-a=3$

よって　$a=-3$　　これは $a<0$ を満たす。

[2]　$0\leqq a\leqq 10$ のとき，$f(x)$ の最大値が3であるとすると　$\frac{a^2}{4}-a=3$

よって　$a^2-4a-12=0$　　ゆえに　$(a+2)(a-6)=0$

$0\leqq a\leqq 10$ であるから　$a=6$

[3]　$10<a$ のとき，$f(x)$ の最大値が3であるとすると　$-25+4a=3$

よって　$a=7$　　これは $10<a$ を満たさず，不適。

[1]～[3] から，求める a の値は　$a=-3,\ 6$

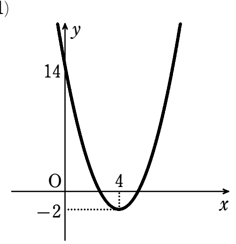
8

解答 (1)　$g(x)=x^2-8x+14$，[図]　(2)　[図]

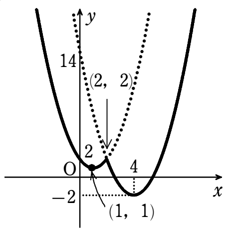
(3)　$0<a<1$ のとき $m=a^2-2a+2$，$1\leqq a<4-\sqrt{3}$ のとき $m=1$，

$4-\sqrt{3}\leqq a<4$ のとき $m=a^2-8a+14$，$4\leqq a$ のとき $m=-2$

(1)



(2)



解説

(1) $y-(-3)=f(x-3)$ から

$y=f(x-3)-3$

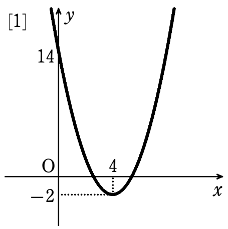
$=(x-3)^2-2(x-3)+2-3$

$=x^2-8x+14$

よって　$g(x)=x^2-8x+14$

$x^2-8x+14=(x-4)^2-2$ であるから，$y=g(x)$ のグラフは右の図 [1] のようになる。

[1]



(2) $f(x)-g(x)=x^2-2x+2-(x^2-8x+14)$

$=6x-12=6(x-2)$

よって

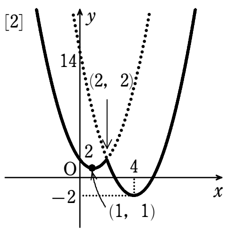
$x\leqq 2$ のとき　$f(x)\leqq g(x)$，

$x>2$ のとき　$f(x)>g(x)$

ゆえに　$h(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & (x\leqq 2) \\ x^2-8x+14 & (x>2) \end{cases}$

したがって，$y=h(x)$ のグラフは右の図 [2] の実線部分。

[2]



(3) $x^2-8x+14=1$ とすると　$x^2-8x+13=0$

これを解くと　$x=4\pm\sqrt{3}$

したがって

$0<a<1$ のとき

$m=h(a)=a^2-2a+2$

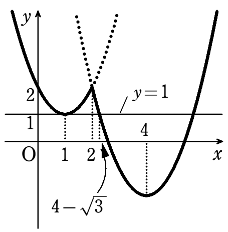
$1\leqq a<4-\sqrt{3}$ のとき

$m=h(1)=1$

$4-\sqrt{3}\leqq a<4$ のとき

$m=h(a)=a^2-8a+14$

$4\leqq a$ のとき　$m=h(4)=-2$



$\boxed{9}$

解答　(1) $3<a<4$　(2) $1<a\leqq 3$，$4\leqq a<6$

解説

①，②，③ の判別式をそれぞれ D_1，D_2，D_3 とすると

$D_1=a^2-4(a+3)=a^2-4a-12=(a+2)(a-6)$

$\dfrac{D_2}{4}=\{-(a-2)\}^2-a=a^2-5a+4=(a-1)(a-4)$

$\dfrac{D_3}{4}=2^2-(a^2-a-2)=-(a^2-a-6)=-(a+2)(a-3)$

(1) ①，②，③ がいずれも実数解をもたないための条件は

$D_1<0$　かつ　$D_2<0$　かつ　$D_3<0$

$D_1<0$ から　$(a+2)(a-6)<0$

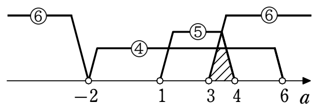
よって　$-2<a<6$　…… ④

$D_2<0$ から　$(a-1)(a-4)<0$

よって　$1<a<4$　…… ⑤

$D_3<0$ から　$-(a+2)(a-3)<0$

よって　$a<-2$，$3<a$　…… ⑥



④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて

$3<a<4$

(2) 方程式 ①，②，③ が実数解をもつための条件は，それぞれ

$D_1\geqq 0$，　$D_2\geqq 0$，　$D_3\geqq 0$

$D_1\geqq 0$ から　$a\leqq -2$，$6\leqq a$　…… ⑦

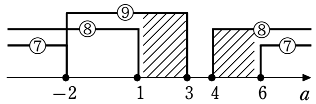
$D_2\geqq 0$ から　$a\leqq 1$，$4\leqq a$　…… ⑧

$D_3\geqq 0$ から　$-2\leqq a\leqq 3$　…… ⑨

⑦，⑧，⑨ のうち，1 つだけが成り立つ a の値の範囲が求めるものである。

したがって，右の図から

$1<a\leqq 3$，$4\leqq a<6$



$\boxed{10}$

解答　順に $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$，$-1<a<0$

解説

(前半) $y=|x(x-4)|$ …… ①，$y=-\dfrac{9}{2}x+4$ …… ② とする。

$x(x-4)\geqq 0$ の解は　$x\leqq 0$，$4\leqq x$

$x(x-4)<0$ の解は　$0<x<4$

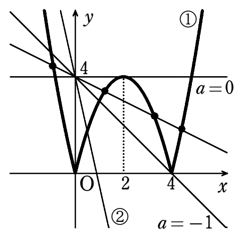
ゆえに，① は

$x\leqq 0$，$4\leqq x$ のとき　$y=x^2-4x=(x-2)^2-4$

$0<x<4$ のとき　$y=-(x^2-4x)=-(x-2)^2+4$

よって，① のグラフは図の太線部分のようになる。

図から，① のグラフと直線 ② の共有点の x 座標が正となるのは，$0<x<4$ のときである。



$-(x^2-4x)=-\dfrac{9}{2}x+4$ とすると　$2x^2-17x+8=0$

すなわち　$(x-8)(2x-1)=0$

$0<x<4$ であるから　$x=\dfrac{1}{2}$

このとき，② から　$y=\dfrac{7}{4}$

よって，求める点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{4}\right)$

(後半) ① のグラフと直線 $y=ax+4$ が 4 つの共有点をもつような a の値の範囲を，図から調べると，

直線 $y=ax+4$ が点 $(2,\ 4)$ を通るとき　$a=0$

直線 $y=ax+4$ が点 $(4,\ 0)$ を通るとき　$a=-1$

であるから　$-1<a<0$

$\boxed{11}$

解答　$k\leqq -1$，$2<k$

解説

$(k^2-1)x^2+2(k+1)x+3>0$ が x のすべての実数の値に対して成り立つ条件は

[1]　$k^2-1>0$　かつ　$D=\{2(k+1)\}^2-4(k^2-1)\cdot 3<0$　または

[2]　$k^2-1=0$　かつ　$2(k+1)=0$

[1] から　$(k+1)(k-1)>0$　かつ　$-8(k+1)(k-2)<0$

すなわち　$k<-1$，$1<k$　かつ　$k<-1$，$2<k$

よって　$k<-1$，$2<k$

[2] から　$k=-1$

したがって，[1]，[2] から求める k の値の範囲は　$k\leqq -1$，$2<k$

$\boxed{12}$

解答　$0\leqq a<1$，$5<a\leqq 6$

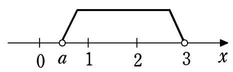
解説

2 次不等式の左辺を因数分解すると　$(x-a)(x-3)<0$ …… ①

[1]　$a<3$ のとき，① の解は　$a<x<3$

これを満たす整数 x がちょうど 2 個あるとき，その整数 x は 1，2 となる。

よって　$0\leqq a<1$



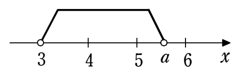
[2]　$a=3$ のとき，① は $(x-3)^2<0$ となるから，解はない。

よって，条件を満たさない。

[3]　$a>3$ のとき，① の解は　$3<x<a$

これを満たす整数 x がちょうど 2 個あるとき，その整数 x は 4，5 となる。

よって　$5<a\leqq 6$



以上から，求める a の値の範囲は　$0\leqq a<1$，$5<a\leqq 6$

1

解答 (1) $n=0,\ 1$　(2) $0\leqq x<2$　(3) $x=\dfrac{3}{2}$

解説

(1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}=0$ を解くと　$n=\dfrac{1\pm\sqrt{6}}{2}$

よって，$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす n の範囲は　$\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<n<\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$

ここで，$2<\sqrt{6}<3$ であるから　$-1<\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<-\dfrac{1}{2}$，　$\dfrac{3}{2}<\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}<2$

ゆえに，$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ すなわち $\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<n<\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$ を満たす整数 n は

$n=0,\ 1$

(2) $[x]=n$ とおくと，不等式は　$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$

これを満たす整数 n は，(1) より　$n=0,\ 1$

$n=0$ すなわち $[x]=0$ のとき　$0\leqq x<1$

$n=1$ すなわち $[x]=1$ のとき　$1\leqq x<2$

よって，求める x の範囲は　$0\leqq x<2$

(3) (i) $0\leqq x<1$ のとき

$[x]=0$ であるから，方程式は　$x^2-\dfrac{5}{4}=0$　　これを解くと　$x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

これらは，$0\leqq x<1$ を満たさないから不適。

(ii) $1\leqq x<2$ のとき

$[x]=1$ であるから，方程式は　$x^2-\dfrac{9}{4}=0$　　これを解くと　$x=\pm\dfrac{3}{2}$

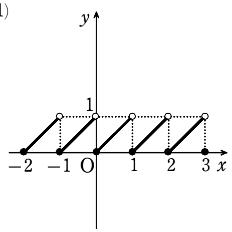
$1\leqq x<2$ であるから　$x=\dfrac{3}{2}$

(i)，(ii) より，求める x は　$x=\dfrac{3}{2}$

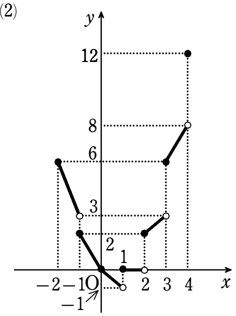
2

解答 (1) [図]　(2) [図]

(1)



(2)



解説

(1) $y=x-[x]$　$(-2\leqq x\leqq 3)$

$-2\leqq x<-1$ のとき　$[x]=-2$　　よって　$y=x+2$

$-1\leqq x<0$ のとき　$[x]=-1$　　よって　$y=x+1$

$0\leqq x<1$ のとき　$[x]=0$　　よって　$y=x$

$1\leqq x<2$ のとき　$[x]=1$

よって　$y=x-1$

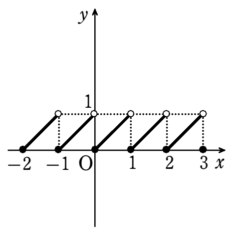
$2\leqq x<3$ のとき　$[x]=2$

よって　$y=x-2$

$x=3$　のとき　$[x]=3$

よって　$y=0$

グラフは右の図のようになる。



(2) $y=x[x-1]$　$(-2\leqq x\leqq 4)$

n を整数とする。

$n\leqq x<n+1$ のとき，$[x-1]=n-1$ であるから

$y=(n-1)x$

$-2\leqq x<-1$ のとき　$y=-3x$

$-1\leqq x<0$　のとき　$y=-2x$

$0\leqq x<1$　のとき　$y=-x$

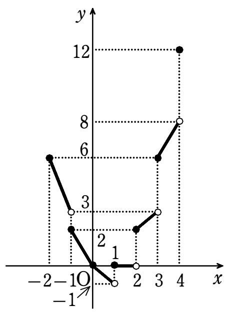
$1\leqq x<2$　のとき　$y=0$

$2\leqq x<3$　のとき　$y=x$

$3\leqq x<4$　のとき　$y=2x$

$x=4$　　のとき　$y=12$

グラフは右の図のようになる。



3

解答 (1) $y=-6\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$　$(y=-6x^2-18x-14)$

(2) $(a,\ b)=(-4,\ 1),\ (-12,\ 9)$　(3) $p=-1,\ q=\dfrac{3}{2}$

解説

(1) $2x^2+6x+4=2(x^2+3x)+4=2\left\{x^2+3x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}-2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+4=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

よって，放物線 $y=2x^2+6x+4$ の頂点は点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ であり，求める2次関数は

$y=a\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$ と表される。

このグラフが点 $(-1,\ -2)$ を通るから　$-2=a\left(-1+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

これを解くと　$a=-6$

よって，求める2次関数は　$y=-6\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$　($y=-6x^2-18x-14$ でもよい)

(2) 放物線 $y=4x^2+ax+b$ は点 $(1,\ 1)$ を通るから　$1=4+a+b$

よって　$b=-a-3$　……①

また，x 軸に接するから，2次方程式 $4x^2+ax+b=0$ の判別式を D とすると

$D=a^2-4\cdot4b=0$　すなわち　$a^2-16b=0$

この等式に①を代入して　$a^2+16a+48=0$

よって　$(a+4)(a+12)=0$　　ゆえに　$a=-4,\ -12$

①から　$a=-4$ のとき $b=1$，　$a=-12$ のとき $b=9$

ゆえに　$(a,\ b)=(-4,\ 1),\ (-12,\ 9)$

別解 放物線 $y=4x^2+ax+b$ は x 軸に接するから，その方程式は $y=4(x-p)^2$ と表される。

点 $(1,\ 1)$ を通るから　$1=4(1-p)^2$

よって　$\pm1=2(1-p)$　　ゆえに　$p=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}$　……①

$y=4(x-p)^2$ から　$y=4x^2-8px+4p^2$

これが $y=4x^2+ax+b$ と一致するから　$a=-8p,\ b=4p^2$

①を代入して　$(a,\ b)=(-4,\ 1),\ (-12,\ 9)$

(3) 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した放物線の方程式は

$y=\dfrac{1}{2}(x-p)^2+q$　すなわち　$y=\dfrac{1}{2}x^2-px+\dfrac{1}{2}p^2+q$　……①

と表される。

①と $y=-x$，①と $y=3x$ をそれぞれ連立させて

$\dfrac{1}{2}x^2-px+\dfrac{1}{2}p^2+q=-x$，　$\dfrac{1}{2}x^2-px+\dfrac{1}{2}p^2+q=3x$

よって　$x^2-2(p-1)x+p^2+2q=0$　……②，

$x^2-2(p+3)x+p^2+2q=0$　……③

②の判別式を D_1，③の判別式を D_2 とすると

$\dfrac{D_1}{4}=\{-(p-1)\}^2-(p^2+2q)=-2p-2q+1$

$\dfrac{D_2}{4}=\{-(p+3)\}^2-(p^2+2q)=6p-2q+9$

放物線①が直線 $y=-x$ と直線 $y=3x$ の両方に接するための条件は

$D_1=0,\ D_2=0$

よって　$-2p-2q+1=0,\ 6p-2q+9=0$

この2式を連立して解くと　$p=-1,\ q=\dfrac{3}{2}$

4

解答 最大値 4，最小値 0

解説

(与式)$=\{x+(y-1)\}^2+\{x-(y-1)\}^2=2\{x^2+(y-1)^2\}$

$0\leqq x\leqq 1$ の範囲において，x^2 は

$x=1$ で最大値1，$x=0$ で最小値0をとり，

$0\leqq y\leqq 1$ の範囲において，$(y-1)^2$ は

$y=0$ で最大値1，$y=1$ で最小値0をとる。

よって，与式は　$x=1,\ y=0$ のとき最大値 $2(1+1)=4$，

$x=0,\ y=1$ のとき最小値 $2(0+0)=0$　をとる。

5

解答 (1) $-2-2\sqrt{2}\leqq a\leqq -2+2\sqrt{2}$　(2) $a\leqq -6+4\sqrt{3}$

解説

(1) $f(x)=(x-1)^2+1$，$g(x)=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}+a$

求める条件は　$[f(x)$ の最小値$]\geqq[g(x)$ の最大値$]$

よって　$1\geqq\dfrac{a^2}{4}+a$　　ゆえに　$a^2+4a-4\leqq 0$

これを解くと　$-2-2\sqrt{2}\leqq a\leqq -2+2\sqrt{2}$

(2)　$f(x)-g(x)=h(x)$ とおくと

$$h(x)=2x^2-(a+2)x+2-a=2\left(x-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{1}{8}(a+2)^2+2-a$$
$$=2\left(x-\frac{a+2}{4}\right)^2-\frac{1}{8}a^2-\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}$$

$y=h(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=\dfrac{a+2}{4}$ である。

求める条件は，$0\leqq x\leqq 1$ において　$h(x)\geqq 0$

[1]　$\dfrac{a+2}{4}<0$ すなわち $a<-2$ のとき

求める条件は　$h(0)\geqq 0$　すなわち　$2-a\geqq 0$

よって　$a\leqq 2$

$a<-2$ との共通範囲は　$a<-2$　……①

[2]　$0\leqq\dfrac{a+2}{4}\leqq 1$ すなわち $-2\leqq a\leqq 2$ のとき

求める条件は　$-\dfrac{1}{8}a^2-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{3}{2}\geqq 0$

ゆえに　$a^2+12a-12\leqq 0$

これを解くと　$-6-4\sqrt{3}\leqq a\leqq -6+4\sqrt{3}$

$-2\leqq a\leqq 2$ との共通範囲は　$-2\leqq a\leqq -6+4\sqrt{3}$　……②

[3]　$1<\dfrac{a+2}{4}$ すなわち $a>2$ のとき

求める条件は　$h(1)\geqq 0$　すなわち　$2-a-2+2-a\geqq 0$

よって　$a\leqq 1$　　$a>2$ との共通範囲はない。

以上から，求める a の値の範囲は，①，② を合わせて　$a\leqq -6+4\sqrt{3}$

6

解答　(1)　$t\geqq 1$　(2)　$a<1$ のとき $m=1-a$，$a\geqq 1$ のとき $m=-a^2+a$

解説

(1)　$t=x^2+2x+2$ から　$t=(x+1)^2+1$

よって，x がすべての実数値をとって変化するとき，t のとりうる値の範囲は　$t\geqq 1$

(2)　$f(x)$ を変数 t の式で表すと

$$f(x)=t^2-2at+a$$
$$=(t-a)^2-a^2+a$$

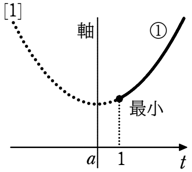
$y=(t-a)^2-a^2+a$ $(t\geqq 1)$　……①

とする。

[1]　$a<1$ のとき

① のグラフは右の図のようになり，y は $t=1$ で最小値をとる。

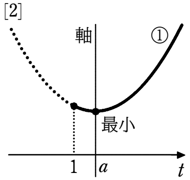
よって　$m=1^2-2a\cdot 1+a$
$=1-a$

[1]


[2]　$1\leqq a$ のとき

① のグラフは右の図のようになり，y は $t=a$ で最小値をとる。

よって　$m=-a^2+a$

[2]


[1]，[2] から

$a<1$ のとき　$m=1-a$，

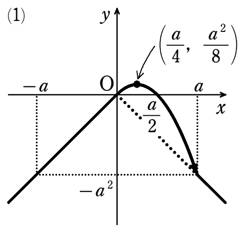
$a\geqq 1$ のとき　$m=-a^2+a$

7

解答　(1)　[図] の実線部分

(2)　$0<a\leqq\dfrac{4}{3}$ のとき $M(a)=\dfrac{a^2}{8}$，

$a>\dfrac{4}{3}$ のとき $M(a)=-a^2+3a-2$

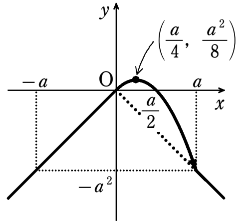
(1)


解説

(1)　$a>0$ であるから

[1]　$x<0$ のとき

$f(x)=x\{-(x-a)-(-x)\}$
$=x(-x+a+x)=ax$



[2]　$0\leqq x<a$ のとき

$f(x)=x\{-(x-a)-x\}=x(-x+a-x)$

$=-2x^2+ax=-2\left(x-\dfrac{a}{4}\right)^2+\dfrac{a^2}{8}$

[3]　$a\leqq x$ のとき　$f(x)=x(x-a-x)=-ax$

したがって，グラフは図の実線部分のようになる。

(2)　(1) の図から，定義域が実数全体のとき，$f(x)$ は $x=\dfrac{a}{4}$ で最大となる。

$\dfrac{a}{4}$ と $a+1$，$a-1$ の大小関係を調べると，$a>0$ であるから

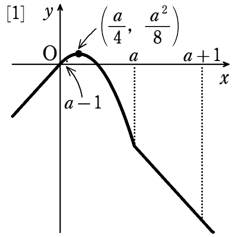
$(a+1)-\dfrac{a}{4}=\dfrac{3}{4}a+1>0$　　よって，常に $\dfrac{a}{4}<a+1$ が成り立つ。

また　$(a-1)-\dfrac{a}{4}=\dfrac{3}{4}a-1=\dfrac{3}{4}\left(a-\dfrac{4}{3}\right)$

[1]　$0<a\leqq\dfrac{4}{3}$ のとき　$a-1\leqq\dfrac{a}{4}$

$a-1\leqq\dfrac{a}{4}<a+1$ が成り立つから

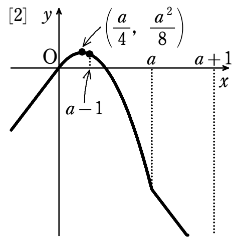
$M(a)=f\left(\dfrac{a}{4}\right)=\dfrac{a^2}{8}$

[1]


[2]　$a>\dfrac{4}{3}$ のとき　$\dfrac{a}{4}<a-1$

$a-1<a$ であるから

$M(a)=f(a-1)$
$=-2(a-1)^2+a(a-1)$
$=-(a-1)(a-2)$
$=-a^2+3a-2$

[2]


8

解答　(1)　$-3\leqq x\leqq 5$　(2)　$k=0$，-4

解説

(1)　実数 α が方程式 ① の解となるための条件は

$\alpha^2+k\alpha+k^2+3k-9=0$　すなわち　$k^2+(\alpha+3)k+\alpha^2-9=0$　…… ②

を満たす実数 k が存在することである。

② を k の 2 次方程式とみて，その判別式を D とすると

$$D=(\alpha+3)^2-4(\alpha^2-9)=-3\alpha^2+6\alpha+45$$
$$=-3(\alpha^2-2\alpha-15)=-3(\alpha+3)(\alpha-5)$$

求める条件は，$D\geqq 0$ であるから　$(\alpha+3)(\alpha-5)\leqq 0$

これを解くと　$-3\leqq\alpha\leqq 5$

したがって，求める解の値の範囲は　$-3\leqq x\leqq 5$

(2)　① を x について解くと

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4(k^2+3k-9)}}{2}=\frac{-k\pm\sqrt{-3(k^2+4k-12)}}{2}$$

ここで，$-3(k^2+4k-12)=D'$ とおく。

① が異なる 2 つの整数解をもつとき，$D'>0$ から　$k^2+4k-12<0$

ゆえに　$(k+6)(k-2)<0$　　よって　$-6<k<2$

この不等式を満たす整数 k の値は

$k=-5$，-4，-3，-2，-1，0，1　…… ③

一方，方程式 ① は異なる 2 つの整数解をもつから，$x=\dfrac{-k\pm\sqrt{D'}}{2}$ において，D' は 0 でない平方数である。

$D'=48-3(k+2)^2$ と変形できるから，これに ③ の k の値を代入して D' が 0 でない平方数となるものを調べると　$k=0$，-4

$k=0$ のとき，$D'=6^2$ となるから　$x=\pm\dfrac{6}{2}=\pm 3$

$k=-4$ のとき，$D'=6^2$ となるから　$x=\dfrac{4\pm 6}{2}$　すなわち　$x=5$，-1

いずれの場合も，2 つの解は異なる整数となる。

以上により，求める k の値は　$k=0$，-4

9

解答　$a\leqq -1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}\leqq a$

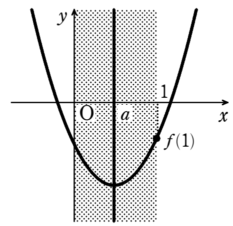
解説

$x(x-2a)\leqq a^2$ から　$x^2-2ax-a^2\leqq 0$

したがって，$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)=x^2-2ax-a^2$ の最大値が 0 以下となる条件を求める。

$f(x)=(x-a)^2-2a^2$ であるから，軸は直線 $x=a$

変域の中央の値は　$\dfrac{1}{2}$



[1]　$a<\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(x)$ の最大値は　$f(1)=1-2a-a^2$

よって　$1-2a-a^2\leqq 0$

ゆえに　$a^2+2a-1\geqq 0$

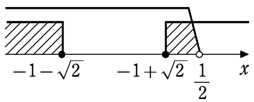
$a^2+2a-1=0$ を解くと

$a=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-1)}=-1\pm\sqrt{2}$

よって，$a^2+2a-1\geqq 0$ の解は

$a\leqq -1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}\leqq a$

これと $a<\dfrac{1}{2}$ の共通範囲は

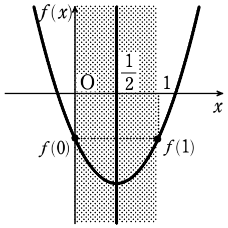


$a\leqq -1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}\leqq a<\dfrac{1}{2}$ ……①

[2]　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(x)$ の最大値は　$f(0)=f(1)=-\dfrac{1}{4}$

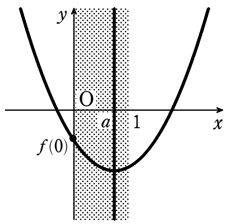
$-\dfrac{1}{4}\leqq 0$ であるから　$a=\dfrac{1}{2}$ ……②



[3]　$\dfrac{1}{2}<a$ のとき

$f(x)$ の最大値は　$f(0)=-a^2$

$-a^2\leqq 0$ は常に成り立つから　$\dfrac{1}{2}<a$ ……③



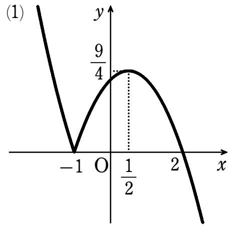
以上から，求める a の値の範囲は，①，②，③ を合わせて　$a\leqq -1-\sqrt{2}$，$-1+\sqrt{2}\leqq a$

$\boxed{1}$

解答　(1)　[図]　(2)　$t=-\sqrt{2}$

(3)　$t\leqq -\sqrt{2}$，$\dfrac{1}{2}\leqq t$

(1)



解説

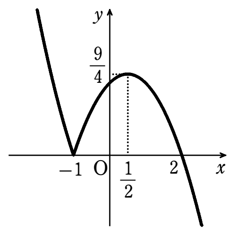
(1)　$x<-1$ のとき

$f(x)=(2-x)\{-(x+1)\}=x^2-x-2=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$

$x\geqq -1$ のとき

$f(x)=(2-x)(x+1)=-x^2+x+2=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



(2)　(1) のグラフから，最大値 $g(t)$ を与える x の値が2つあるとき，$t<-1<t+1$ ……① であり

$g(t)=f(t)=f(t+1)$ ……②

$t<-1$ のとき　$f(t)=t^2-t-2$

$t+1>-1$ のとき　$f(t+1)=-(t+1)^2+(t+1)+2=-t^2-t+2$

よって，② から　$t^2-t-2=-t^2-t+2$　　ゆえに　$t^2=2$

① より $-2<t<-1$ であるから　$t=-\sqrt{2}$

(3)　$g(t)=f(t)$ となるのは，$f(x)$ が $t\leqq x\leqq t+1$ の範囲において，$x=t$（区間の左端）で最大値をとるときである。

(1) のグラフと (2) の結果から，$g(t)=f(t)$ を満たす t の範囲は　$t\leqq -\sqrt{2}$，$\dfrac{1}{2}\leqq t$

$\boxed{2}$

解答　$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<2$，$2<a<6+2\sqrt{10}$

解説

$y=|x^2+ax+2a|$ ……①，$y=a+1$ ……② とする。

方程式の実数解の個数は，① のグラフと直線 ② の共有点の個数に一致する。

まず　$x^2+ax+2a=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{8a-a^2}{4}$

$8a-a^2>0$ を解くと，$a(a-8)<0$ から　$0<a<8$

$8a-a^2=0$ を解くと，$a(a-8)=0$ から　$a=0$，8

$8a-a^2<0$ を解くと，$a(a-8)>0$ から　$a<0$，$8<a$

[1]　$0<a<8$ のとき

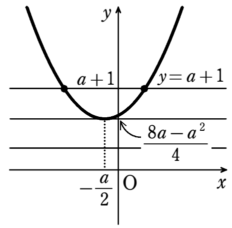
すべての実数 x について　$x^2+ax+2a>0$

① のグラフは図のようになる。

よって，① のグラフと直線 ② が異なる2点で交わるための条件は

$a+1>\dfrac{8a-a^2}{4}$

整理すると　$a^2-4a+4>0$



したがって　$(a-2)^2>0$

この不等式の解は　$a\neq 2$

$0<a<8$ との共通範囲は　$0<a<2$，$2<a<8$

[2]　$a=0$ のとき，① は　$y=x^2$，　② は　$y=1$

$a=8$ のとき，① は　$y=(x+4)^2$，　② は　$y=9$

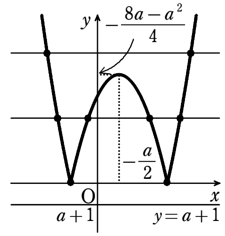
それぞれの場合について，① のグラフと直線 ② は異なる2点で交わるから，$a=0$，8 は条件を満たす。

[3]　$a<0$，$8<a$ のとき

① のグラフは図のようになる。

よって，① のグラフと直線 ② が異なる2点で交わるための条件は　$a+1=0$　または

$a+1>-\dfrac{8a-a^2}{4}$ ……③



$a+1=0$ から　$a=-1$

③ を整理すると　$a^2-12a-4<0$

この不等式の解は　$6-2\sqrt{10}<a<6+2\sqrt{10}$

これと $a=-1$ と $a<0$，$8<a$ との共通範囲は

$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<0$，$8<a<6+2\sqrt{10}$

[1]，[2]，[3] から，求める a の値の範囲は

$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<2$，$2<a<6+2\sqrt{10}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，$y=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$

(2)　$x=\sqrt{7}$，$y=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

解説

$x^2-2xy+2y^2=4$ ……① とする。

(1)　$x+y=s$ とおくと　$y=-x+s$ ……②

これを ① に代入すると　$x^2-2x(-x+s)+2(-x+s)^2=4$

整理すると　$5x^2-6sx+2s^2-4=0$ ……③

x は実数であるから，x の2次方程式 ③ の判別式を D とすると　$D\geqq 0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(-3s)^2-5(2s^2-4)=-s^2+20$

よって　$-s^2+20\geqq 0$　　ゆえに　$-2\sqrt{5}\leqq s\leqq 2\sqrt{5}$

$s=2\sqrt{5}$ のとき $D=0$ で，③ は重解 $x=-\dfrac{-3s}{5}=\dfrac{3s}{5}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ をもつ。

このとき，② から　$y=-\dfrac{6\sqrt{5}}{5}+2\sqrt{5}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

よって，$x+y$ は $x=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，$y=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ のとき最大値 $2\sqrt{5}$ をとる。

(2)　$\dfrac{x}{y+4}=t$ とおくと　$x=t(y+4)$ ……④

これを ① に代入すると　$\{t(y+4)\}^2-2t(y+4)y+2y^2=4$

整理すると　$(t^2-2t+2)y^2+8t(t-1)y+16t^2-4=0$ ……⑤

ここで　$t^2-2t+2=(t-1)^2+1\geqq 1>0$

y は実数であるから，y の2次方程式 ⑤ の判別式を D' とすると　$D'\geqq 0$

ここで　$\dfrac{D'}{4}=\{4t(t-1)\}^2-(t^2-2t+2)(16t^2-4)=-12t^2-8t+8$

よって　$-12t^2-8t+8\geqq 0$　　ゆえに　$3t^2+2t-2\leqq 0$

したがって　$\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

$t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$ のとき $D'=0$ で，⑤ は重解 $y=-\dfrac{4t(t-1)}{t^2-2t+2}$ をもつ。

このとき，$3t^2+2t-2=0$ が成り立つから　$t^2=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}t$

ゆえに　$y=-\dfrac{4t(t-1)}{\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}t\right)-2t+2}=-\dfrac{4t(t-1)}{-\dfrac{8}{3}(t-1)}=\dfrac{3}{2}t$

$=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$

④ から　$x=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}\left(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}+4\right)=\sqrt{7}$

よって，$\dfrac{x}{y+4}$ は $x=\sqrt{7}$，$y=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$ をとる。

4

解答　$-2\leqq\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}\leqq 2$

解説

$\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}=k$ とおく。

分母を払って，x について整理すると　$(k-1)x^2+(k-4)x+k-1=0$

$k\fallingdotseq 1$ のとき，x が実数であるためには，判別式 D について　$D\geqq 0$

$$D=(k-4)^2-4(k-1)^2=-3k^2+12=-3(k+2)(k-2)\geqq 0$$

よって　$-2\leqq k\leqq 2$　$(k\fallingdotseq 1)$

$k=1$ のとき　$x=0$ (実数)

以上から　$-2\leqq k\leqq 2$　　すなわち　$-2\leqq\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}\leqq 2$

5

解答　(1)　共通の解を x とする。

$a=0$ または $b=0$ のとき　$x=0$；

$(a,\ b)=\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right),\ \left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ のとき　$x=-\dfrac{1}{2}$

(2)　略

解説

(1)　共通の解を α とすると

$\alpha^2+a\alpha+ab^2=0$　……③，　$\alpha^2+b\alpha+a^2b=0$　……④

③−④ から　$(a-b)\alpha-ab(a-b)=0$

すなわち　$(a-b)(\alpha-ab)=0$

$a\fallingdotseq b$ であるから　$\alpha=ab$

これを ③ に代入すると　$(ab)^2+a(ab)+ab^2=0$

すなわち　$ab(ab+a+b)=0$

よって　$a=0$ または $b=0$ または $ab+a+b=0$

[1]　$a=0$ のとき

① は　$x^2=0$　　よって，$x=0$ を重解にもつ。

② は　$x^2+bx=0$　　よって　$x=0,\ -b\ (\fallingdotseq 0)$

したがって，共通の解は　$x=0$

[2]　$b=0$ のとき

[1] と同様にして，① の解は　$x=0,\ -a\ (\fallingdotseq 0)$

② は $x=0$ を重解にもつ。共通の解は　$x=0$

[3]　$a\fallingdotseq 0$，$b\fallingdotseq 0$，$ab+a+b=0$ のとき　$ab=-(a+b)$　……⑤

⑤ を ① に代入すると　$x^2+ax-b(a+b)=0$

すなわち　$(x+a+b)(x-b)=0$

⑤ を ② に代入すると　$x^2+bx-a(a+b)=0$

すなわち　$(x+a+b)(x-a)=0$

(ア)　① が重解をもつとき　$-(a+b)=b$

⑤ から　$ab=b$　　$b\fallingdotseq 0$ であるから　$a=1$

このとき　$2b+1=0$　　よって　$b=-\dfrac{1}{2}$

① は　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=0$，　② は　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-1)=0$

したがって，共通の解は　$x=-\dfrac{1}{2}$

(イ)　② が重解をもつとき　$-(a+b)=a$

(ア) と同様にして　$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=1$

① は　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-1)=0$，　② は　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2=0$

したがって，共通の解は　$x=-\dfrac{1}{2}$

以上から，共通の解は　$a=0$ または $b=0$ のとき　$x=0$

$(a,\ b)=\left(1,\ -\dfrac{1}{2}\right),\ \left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ のとき　$x=-\dfrac{1}{2}$

(2)　① と ② が共通の解をもち，どちらも重解をもたないのは，(1) の [3] の場合であり，共通でない解は a と b である。

$a>0$ かつ $b>0$ であると仮定すると　$ab>0$

また，⑤ により，$ab=-(a+b)<0$ となるが，これは矛盾である。

よって，a，b の少なくとも一方は負である。

したがって，題意は示された。

6

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　$\alpha<a<\beta<a+b$

解説

(1)　2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=\{-(a+b)\}^2-4(ab-cd)=(a-b)^2+4cd$$

a，b，c，d は正の実数であるから　$(a-b)^2\geqq 0$，$4cd>0$

したがって　$D>0$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ。

(2)　$f(x)=x^2-(a+b)x+ab-cd$ とする。

2 次方程式 $f(x)=0$ は，異なる 2 つの実数解をもつから，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる。

また，$y=f(x)$ のグラフの軸は　直線 $x=\dfrac{a+b}{2}$

a，b は正の実数であるから　$\dfrac{a+b}{2}>0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは x 軸の正の部分と少なくとも 1 点で交わる。

すなわち，この 2 次方程式の 2 つの解のうち少なくとも 1 つは正の数である。

(3)　$f(a)=a^2-(a+b)a+ab-cd=-cd$

c，d は正の実数であるから　$f(a)<0$

$y=f(x)$ のグラフは $\alpha<x<\beta$ のときだけ x 軸の下側にある。

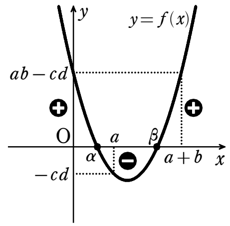
よって　$\alpha<a<\beta$　……①

また，$0<\alpha<\beta$ であるから　$f(0)=ab-cd>0$

ゆえに　$f(a+b)=ab-cd>0$

よって　$\beta<a+b$　……②

①，② から　$\alpha<a<\beta<a+b$



7

解答　2 個

解説

$$\begin{cases} x^2-2kx+k<0 & \cdots\cdots① \\ kx^2-2x<0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

① の左辺を $f(x)$ とすると　$f(x)=(x-k)^2-k^2+k$

$k=1$ のとき，$f(x)=(x-1)^2$ となるから，① は解をもたない。

$k\geqq 2$ のとき，$-k^2+k=-k(k-1)<0$ であるから，① は解をもつ。　……(*)

② から　$x(kx-2)<0$　　よって　$0<x<\dfrac{2}{k}$　……③

したがって，連立不等式 ①，② が解をもつための条件は，$f(x)=0$ が ③ の範囲で解をもつことである。

すなわち，$y=f(x)$ のグラフが ③ の範囲で x 軸と共有点をもつことである。

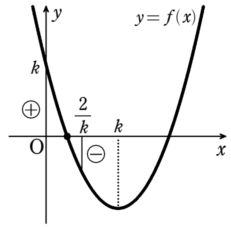
$k\geqq 2$ のとき，(*) により，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる。

また　$f(0)=k>0$

軸について　$x=k>\dfrac{2}{k}$

よって，$y=f(x)$ のグラフが ③ の範囲で x 軸と共有点をもつための条件は，③ の範囲で x 軸と 1 点で交わることであり

$$f\left(\dfrac{2}{k}\right)=\dfrac{4}{k^2}-4+k=\dfrac{k^3-4k^2+4}{k^2}<0$$



したがって　$k^3-4k^2+4<0$

すなわち　$k^2(k-4)+4<0$

これは $k=2$，3 のとき成り立ち，$k\geqq 4$ のときは成り立たない。

よって，求める自然数 k の個数は　2 個

別解　$k\geqq 2$ のとき，① の解は　$k-\sqrt{k^2-k}<x<k+\sqrt{k^2-k}$

よって，連立不等式 ①，② が解をもつための条件は

$k-\sqrt{k^2-k}<\dfrac{2}{k}$　　すなわち　$k-\dfrac{2}{k}<\sqrt{k^2-k}$

$k\geqq 2$ のとき，左辺は正であるから，両辺を 2 乗すると　$k^2-4+\dfrac{4}{k^2}<k^2-k$

分母を払って整理すると　$k^3-4k^2+4<0$　(以後，上と同じ)

$\boxed{8}$

解答　$a \geqq 1$

解説

与えられた不等式を y について整理すると

$$y^2-(z+x)y+a(z^2+x^2)-zx \geqq 0$$

これが任意の実数 y に対して常に成り立つための条件は，y についての 2 次方程式 $y^2-(z+x)y+a(z^2+x^2)-zx=0$ の判別式を D_1 とすると，y^2 の係数が正であるから

$D_1 \leqq 0$ すなわち $(z+x)^2-4\{a(z^2+x^2)-zx\} \leqq 0$

これを z について整理すると

$$(1-4a)z^2+6xz+(1-4a)x^2 \leqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

$1-4a=0$ のとき，① は $6xz \leqq 0$ となるが，これは例えば $x=1$，$z=1$ のとき成り立たないから不適である。

$1-4a \neq 0$ のとき，z の方程式 $(1-4a)z^2+6xz+(1-4a)x^2=0$ の判別式を D_2 とすると，① が任意の実数 z に対して常に成り立つための条件は　$1-4a<0$　かつ　$D_2 \leqq 0$

ゆえに　$1-4a<0$　かつ　$\dfrac{D_2}{4}=(3x)^2-(1-4a)\cdot(1-4a)x^2 \leqq 0$

すなわち　$a>\dfrac{1}{4}$　かつ　$8(1-a)(1+2a)x^2 \leqq 0$　$\cdots\cdots ②$

② が任意の実数 x に対して常に成り立つための条件は　$(1-a)(1+2a) \leqq 0$

すなわち　$(a-1)(2a+1) \geqq 0$　　よって　$a \leqq -\dfrac{1}{2}$，$1 \leqq a$

これと $a>\dfrac{1}{4}$ の共通範囲を求めて　$a \geqq 1$

$\boxed{9}$

解答　$2 \leqq a<2+2\sqrt{2}$

解説

$f(x)=(x+a)(x+2)$ から

$$f(f(x))=(f(x)+a)(f(x)+2)=\{(x+a)(x+2)+a\}\{(x+a)(x+2)+2\}$$
$$=\{x^2+(a+2)x+3a\}\{x^2+(a+2)x+2a+2\}$$

ここで，$a \geqq 2$ であるから　$x^2+(a+2)x+3a \geqq x^2+(a+2)x+2a+2$

また，$x^2+(a+2)x+3a$，$x^2+(a+2)x+2a+2$ の x^2 の係数はともに正であるから

すべての実数 x に対して　$f(f(x))>0$

$\iff$ すべての実数 x に対して

$x^2+(a+2)x+3a>0$　かつ　$x^2+(a+2)x+2a+2>0$

$\iff$ すべての実数 x に対して　$x^2+(a+2)x+2a+2>0$　$\cdots\cdots ①$

$x^2+(a+2)x+2a+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=(a+2)^2-4\cdot 1\cdot(2a+2)=a^2-4a-4$$

① が成り立つための条件は　$D<0$

よって　$a^2-4a-4<0$　　ゆえに　$2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$

$a \geqq 2$ であるから，求める a の値の範囲は　$2 \leqq a<2+2\sqrt{2}$

$\boxed{10}$

解答　$x=-2$，$-\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{6}{5}$

解説

条件 (B) から　$f(x+2)=-f(x+1)+1=-\{-f(x)+1\}+1=f(x)$

よって，$f(x)$ は周期 2 の周期関数である。

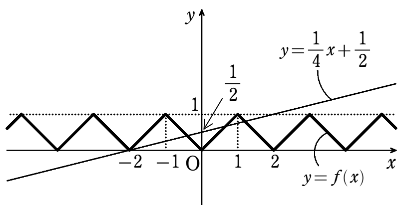
また，条件 (A)，(B) から，$0 \leqq x<1$ のとき　$f(x+1)=-f(x)+1=-x+1$

$x+1=X$ とおくと，$x=X-1$ であり

$f(X)=-(X-1)+1=-X+2$　$(1 \leqq X<2)$

ゆえに，$1 \leqq x<2$ のとき　$f(x)=-x+2$

以上から，$y=f(x)$ のグラフは次の図の太線部分のようになる。



方程式 $f(x)-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}=0$ の解は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ の共有点の x 座標と一致する。共有点の x 座標は

[1]　$-2 \leqq x<-1$ のとき　$x=-2$

[2]　$-1 \leqq x<0$ のとき　$f(x)=-x$

$-x-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}=0$ を解くと　$x=-\dfrac{2}{5}$

[3]　$0 \leqq x<1$ のとき　$f(x)=x$

$x-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}=0$ を解くと　$x=\dfrac{2}{3}$

[4]　$1 \leqq x<2$ のとき　$f(x)=-x+2$

$-x+2-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}=0$ を解くと　$x=\dfrac{6}{5}$

以上から，求める解は　$x=-2$，$-\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{6}{5}$

$\boxed{11}$

解答　$k=4$，5

解説

$5n^2-2kn+1<0$　$\cdots\cdots ①$ とし，$f(x)=5x^2-2kx+1$ とする。

$f(n)<0$ を満たす整数 n が存在するとき，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わるから，$f(x)=0$ の判別式を D とすると　$D>0$

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-5\cdot 1=k^2-5$ であるから　$k^2-5>0$　すなわち　$k^2>5$

k は正の整数であるから　$k \geqq 3$

[1]　$k=3$ のとき

$f(x)=5x^2-6x+1=(5x-1)(x-1)$

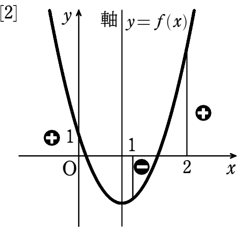
よって，① を満たす整数 n は存在しない。

[2]　$k=4$ のとき　$f(x)=5x^2-8x+1$

グラフの軸の直線 $x=\dfrac{4}{5}$ に最も近い整数は 1 で，

$f(0)=1$，$f(1)=-2$，$f(2)=5$

[2]



よって，① を満たす整数 n は $n=1$ のみである。

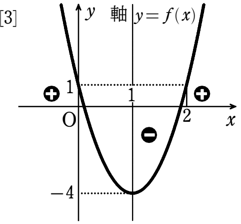
[3]　$k=5$ のとき　$f(x)=5x^2-10x+1$

グラフの軸は直線 $x=1$ で，

$f(0)=1$，$f(1)=-4$，$f(2)=1$

よって，① を満たす整数 n は $n=1$ のみである。

[3]



[4]　$k \geqq 6$ のとき

$f(1)=2(3-k)<0$，$f(2)=21-4k<0$

よって，① を満たす整数 n は 2 個以上ある。

[1] ～ [4] から，求める k の値は　$k=4$，5