$\boxed{1}$

次の方程式，不等式を解け。ただし，a は定数とする。

(1)　$ax=2(x+a)$　　(2)　$ax\leqq 3$　　(3)　$ax+1>x+a^2$

$\boxed{2}$

x は実数とする。次の命題が真であるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$$|x-3|\leqq 2 \Longrightarrow x<a$$

$\boxed{3}$

$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$ は無理数である。a，b が有理数で $\sqrt{2}a+\sqrt{3}b=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ。

$\boxed{4}$

(1)　$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$，$x^4+\dfrac{1}{x^4}$，$x^6+\dfrac{1}{x^6}$ の値を求めよ。

(2)　$a+b=2\sqrt{2}$，$a^2+b^2=10$ のとき，ab，a^3+b^3，a^5+b^5 の値を求めよ。

$\boxed{5}$

x についての連立不等式 $\begin{cases} x>3a+1 \\ 2x-1>6(x-2) \end{cases}$ について，次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ。ただし， a は定数である。

(1)　この連立不等式の解が存在しない。

(2)　この連立不等式の解に 2 が入る。

(3)　この連立不等式の解に入る整数が 3 つだけとなる。

$\boxed{6}$

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|x+2|-|x-1|>x$　　(2)　$||x-1|-2|-3=0$

$\boxed{7}$

次の 2 つの命題を考える。

命題 A「正の整数 a，b，c について，$abc\geqq k$ であるならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 10 以上である。」

命題 B「正の整数 a，b，c について，$abc\leqq k$ であるならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 10 以下である。」

命題 A，B がともに真となるような正の整数 k のうちで最大のものと最小のものを求めよ。

$\boxed{8}$

放物線 $y=x^2-mx+m+3$ の頂点が第 1 象限にあるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

$\boxed{9}$

関数 $y=ax^2-2ax+b$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の最大値が 9，最小値が 1 であるように，定数 a，b の値を定めよ。

$\boxed{10}$

関数 $f(x)=x^2-2ax$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ の最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ とする。

(1)　$y=M(a)$ のグラフをかけ。　　(2)　$y=m(a)$ のグラフをかけ。

$\boxed{11}$

(1)　x 軸と点 $(-3,\ 0)$ で接し，点 $(0,\ -9)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

(2)　2 点 $(0,\ 4)$，$(1,\ 6)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ があり，この放物線を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した放物線は点 $(-1,\ 40)$ を通るという。a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{12}$

a は定数とする。方程式 $ax^2+(3a+1)x+2(a+1)=0$ の実数解の個数を調べよ。

$\boxed{13}$

放物線 $y=x^2+ax+b$ が 2 直線 $y=2x$，$y=-4x+3$ の両方に接するとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{14}$

実数 x，y，z が $2x+5y-4z=9$，$x+3y-3z=5$ を満たすとき

(1)　x と y を z で表せ。

(2)　$x^2+y^2+z^2$ が最小となる x，y，z を求めよ。

(3)　$x^2+y^2+z^2$ が最小となる整数 x，y，z を求めよ。

$\boxed{15}$

2 つの 2 次方程式 $x^2-3x+k-1=0$，$x^2+(k-2)x-2=0$ が，共通の実数解をただ 1 つもつとする。このとき，k の値は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，その共通解は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{16}$

2 次方程式 $x^2-(a-2)x+\dfrac{a}{2}+5=0$ が $1\leqq x\leqq 5$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{17}$

2 つの 2 次関数 $f(x)=x^2+2ax+25$，$g(x)=-x^2+4ax-25$ がある。

(1)　どんな x の値に対しても $f(x)>g(x)$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2)　どんな x_1，x_2 の値に対しても $f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{18}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき，$y=\sin^2\theta+\cos\theta$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{19}$

(1)　半径 1 の円に内接する正 n 角形の面積を n で表せ。

(2)　半径 1 の円に外接する正 n 角形の面積を n で表せ。

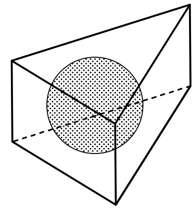
$\boxed{20}$

右の図のように，3 辺の長さが 5，6，7 の三角形を底面とする三角柱に，三角柱の高さと同じ直径の球が内接している。このとき，次のものを求めよ。

(1)　球の体積と表面積

(2)　三角柱と球の体積比

(3)　三角柱と球の表面積の比



$\boxed{21}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$(\sin\theta+\cos\theta)^2$ の値を求めよ。

$\boxed{22}$

円に内接する五角形 ABCDE において，AB$=7$，BC$=3$，CD$=5$，DE$=6$，$\angle$BCD$=120^\circ$ とする。

(1)　BD の長さを求めよ。　　(2)　$\angle$BAD の大きさを求めよ。

(3)　AE の長さを求めよ。

$\boxed{23}$

3 辺の長さが $2x+1$，x^2-1，x^2+x+1 である三角形について

(1)　$2x+1$，x^2-1，x^2+x+1 が三角形の 3 辺となるための x の条件を求めよ。

(2)　最大辺に対する角の大きさを求めよ。

$\boxed{24}$

$\triangle$ABC において，$\dfrac{\sin A}{6}=\dfrac{\sin B}{5}=\dfrac{\sin C}{4}$ が成り立っている。

(1)　$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

(2)　$\triangle$ABC の内接円の半径が 1 であるとき，AB の長さ，$\triangle$ABC の面積，$\triangle$ABC の外接円の半径を求めよ。

$\boxed{25}$

半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。

解説

1

(1) 方程式から　$(a-2)x=2a$ ……①

[1] $a-2\neq 0$ すなわち $a\neq 2$ のとき

①の両辺を $a-2$ で割って　$x=\frac{2a}{a-2}$

[2] $a-2=0$ すなわち $a=2$ のとき

①は $0\cdot x=4$ となり，これを満たす x の値はない。

よって，解はない。

(2) $ax\leqq 3$ ……②

[1] $a>0$ のとき

②の両辺を正の数 a で割って　$x\leqq \frac{3}{a}$

[2] $a=0$ のとき

②は $0\cdot x\leqq 3$ となり，これはすべての実数 x について成り立つ。

よって，解はすべての実数。

[3] $a<0$ のとき

②の両辺を負の数 a で割って　$x\geqq \frac{3}{a}$

(3) $ax+1>x+a^2$ から　$(a-1)x>a^2-1$

よって　$(a-1)x>(a+1)(a-1)$ ……③

[1] $a-1>0$ すなわち $a>1$ のとき

③の両辺を正の数 $a-1$ で割って　$x>a+1$

[2] $a-1=0$ すなわち $a=1$ のとき

③は $0\cdot x>0$ となり，これを満たす x の値はない。

よって，解はない。

[3] $a-1<0$ すなわち $a<1$ のとき

③の両辺を負の数 $a-1$ で割って　$x<a+1$

2

$P=\{x \mid |x-3|\leqq 2\}$，$Q=\{x \mid x<a\}$ とする。

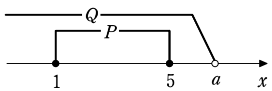
与えられた命題が真であるのは，$P\subset Q$ が成り立つときである。

$|x-3|\leqq 2$ から　$-2\leqq x-3\leqq 2$　よって　$1\leqq x\leqq 5$

ゆえに　$P=\{x \mid 1\leqq x\leqq 5\}$

$P\subset Q$ となる a の値の範囲を求めればよいから，

右の図より　$a>5$



3

$b\neq 0$ と仮定する。

$\sqrt{2}a+\sqrt{3}b=0$ の両辺に $\sqrt{2}$ を掛けて　$2a+\sqrt{6}b=0$ ……①

よって　$\sqrt{6}b=-2a$　　$b\neq 0$ から　$\sqrt{6}=-\frac{2a}{b}$

$-\frac{2a}{b}$ は有理数であるから，この等式は $\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する。

ゆえに　$b=0$　　$b=0$ を①に代入して　$2a=0$　　よって　$a=0$

したがって，$\sqrt{2}a+\sqrt{3}b=0$ ならば $a=b=0$ である。

4

(1) $\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

よって　$x+\frac{1}{x}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$

したがって　$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(2\sqrt{3})^2-2=10$

$x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2)^2+\frac{1}{(x^2)^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=10^2-2=98$

$x^6+\frac{1}{x^6}=(x^2)^3+\frac{1}{(x^2)^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=10^3-3\cdot 10=970$

(2) $a^2+b^2=10$ から　$(a+b)^2-2ab=10$

$a+b=2\sqrt{2}$ を代入して　$8-2ab=10$

よって　$ab=-1$

したがって　$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(2\sqrt{2})^3-3\cdot(-1)\cdot 2\sqrt{2}$

$=16\sqrt{2}+6\sqrt{2}=22\sqrt{2}$

$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(a^3b^2+a^2b^3)$

$=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(ab)^2(a+b)$

$=10\cdot 22\sqrt{2}-(-1)^2\cdot 2\sqrt{2}$

$=220\sqrt{2}-2\sqrt{2}=218\sqrt{2}$

別解　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\{(a^2+b^2)-ab\}$

$=2\sqrt{2}\{10-(-1)\}=22\sqrt{2}$

5

$\begin{cases} x>3a+1 & \cdots\cdots ① \\ 2x-1>6(x-2) & \cdots\cdots ② \end{cases}$

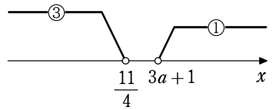
②から　$2x-1>6x-12$　　よって　$x<\frac{11}{4}$ ……③

(1) ①，③を同時に満たす x が存在しないのは，

$\frac{11}{4}\leqq 3a+1$

のときである。

よって　$a\geqq \frac{7}{12}$



(2) $x=2$ は③を満たすから，①が $x=2$ を解にもてばよい。

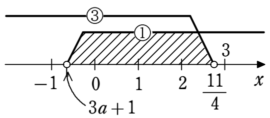
よって　$2>3a+1$　　ゆえに　$a<\frac{1}{3}$

(3) $\frac{11}{4}=2.75$ であるから，③を満たす最大の整数 x は　2

よって，条件を満たすのは，①，③を同時に満たす整数 x が 0，1，2 となるときであるから　$-1\leqq 3a+1<0$

各辺から 1 を引いて　$-2\leqq 3a<-1$

各辺を 3 で割って　$-\frac{2}{3}\leqq a<-\frac{1}{3}$



6

(1) $|x+2|-|x-1|>x$ ……①

[1] $x<-2$ のとき，①は　$-(x+2)+(x-1)>x$

よって　$x<-3$

これと $x<-2$ との共通範囲は　$x<-3$

[2] $-2\leqq x<1$ のとき，①は　$(x+2)+(x-1)>x$

よって　$x>-1$

これと $-2\leqq x<1$ との共通範囲は　$-1<x<1$

[3] $x\geqq 1$ のとき，①は　$(x+2)-(x-1)>x$

よって　$x<3$

これと $x\geqq 1$ との共通範囲は　$1\leqq x<3$

[1]，[2]，[3] から，解は　$x<-3$，$-1<x<3$

(2) $||x-1|-2|-3=0$ ……①

[1] $x\geqq 1$ のとき　$|x-1|=x-1$ であるから，①は

$|(x-1)-2|-3=0$　すなわち　$|x-3|=3$

よって　$x-3=\pm 3$　　これを解くと　$x=6$，0

$x\geqq 1$ を満たすのは　$x=6$

[2] $x<1$ のとき　$|x-1|=-(x-1)$ であるから，①は

$|-(x-1)-2|-3=0$　すなわち　$|x+1|=3$

よって　$x+1=\pm 3$　　これを解くと　$x=2$，-4

$x<1$ を満たすのは　$x=-4$

[1]，[2] から，解は　$x=6$，-4

7

命題 A の対偶は　「a，b，c のすべてが 10 より小さいならば　$abc<k$」

$9\times 9\times 9=729$ であるから，命題 A の対偶が真となるような k の値の範囲は

$729<k$ ……①

命題 B の対偶は　「a，b，c のすべてが 10 より大きいならば　$abc>k$」

$11\times 11\times 11=1331$ であるから，命題 B の対偶が真となるような k の値の範囲は

$1331>k$ ……②

①，②から，命題 A，B がともに真となるような k の値の範囲は

$729<k<1331$

これを満たす正の整数 k のうち，最大のものは 1330，　最小のものは 730

8

$$y=x^2-mx+m+3=\left(x-\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+m+3$$

よって，この放物線の頂点は　点 $\left(\frac{m}{2},\ -\frac{m^2}{4}+m+3\right)$

頂点が第 1 象限にあるとき　$\frac{m}{2}>0$　かつ　$-\frac{m^2}{4}+m+3>0$

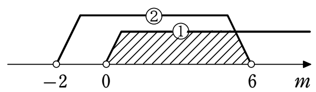
$\frac{m}{2}>0$ から　$m>0$ ……①

$-\frac{m^2}{4}+m+3>0$ から　$m^2-4m-12<0$

すなわち　$(m+2)(m-6)<0$

よって　$-2<m<6$ ……②

①と②の共通範囲を求めて　$0<m<6$



9

関数の式を変形すると　$y=a(x-1)^2-a+b$ $(0\leqq x\leqq 3)$

[1]　$a>0$ のとき

この関数は

$x=3$ で最大値 $3a+b$，

$x=1$ で最小値 $-a+b$　をとる。

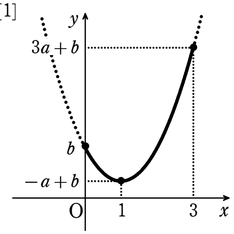
最大値が 9，最小値が 1 であるとき

$3a+b=9,\ -a+b=1$

これを解いて　$a=2,\ b=3$

これは $a>0$ を満たす。

[1]



[2]　$a=0$ のとき

この関数は $y=b$ $(0\leqq x\leqq 3)$ となり，条件を満たさない。

[3]　$a<0$ のとき

この関数は

$x=1$ で最大値 $-a+b$，

$x=3$ で最小値 $3a+b$　をとる。

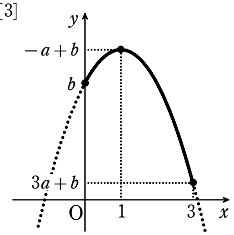
最大値が 9，最小値が 1 であるとき

$-a+b=9,\ 3a+b=1$

これを解いて　$a=-2,\ b=7$

これは $a<0$ を満たす。

[3]



[1]〜[3] から

$a=2,\ b=3$ または $a=-2,\ b=7$

10

関数の式を変形すると　$f(x)=(x-a)^2-a^2$ $(-1\leqq x\leqq 1)$

(1)　[1]　$a<0$ のとき

$f(x)$ は $x=1$ で最大となるから　$M(a)=f(1)=-2a+1$

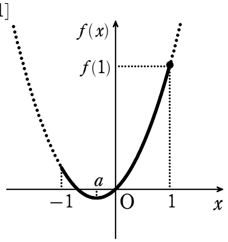
[2]　$a=0$ のとき　$f(x)=x^2$ $(-1\leqq x\leqq 1)$

$f(x)$ は $x=-1,\ 1$ で最大値 1 をとるから　$M(0)=1$

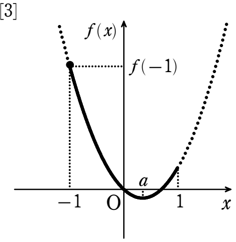
[3]　$a>0$ のとき

$f(x)$ は $x=-1$ で最大となるから　$M(a)=f(-1)=2a+1$

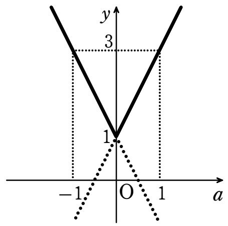
[1]



[3]



したがって，$y=M(a)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。



(2)　[1]　$a<-1$ のとき

$f(x)$ は $x=-1$ で最小となるから　$m(a)=f(-1)=2a+1$

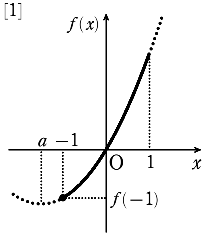
[2]　$-1\leqq a\leqq 1$ のとき

$f(x)$ は $x=a$ で最小となるから　$m(a)=f(a)=-a^2$

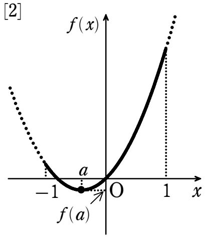
[3]　$1<a$ のとき

$f(x)$ は $x=1$ で最小となるから　$m(a)=f(1)=-2a+1$

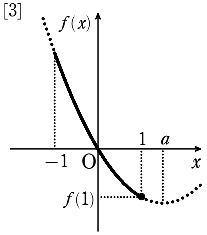
[1]



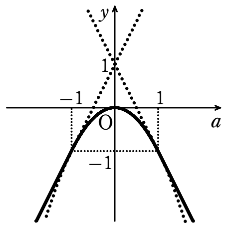
[2]



[3]



したがって，$y=m(a)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。



11

(1)　x 軸と点 $(-3,\ 0)$ で接するから，求める放物線の方程式は $y=a(x+3)^2$ と表される。

これが点 $(0,\ -9)$ を通るから　$-9=9a$　ゆえに　$a=-1$

よって，求める放物線の方程式は

$y=-(x+3)^2$　（または　$y=-x^2-6x-9$）

(2)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ が 2 点 $(0,\ 4)$，$(1,\ 6)$ を通るから　$4=c,\ 6=a+b+c$

よって　$b=-a+2$ ……①，$c=4$

したがって，放物線の方程式は　$y=ax^2+(-a+2)x+4$

この放物線を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$y-(-2)=a(x-1)^2+(-a+2)(x-1)+4$

すなわち　$y=ax^2-(3a-2)x+2a$

この放物線が点 $(-1,\ 40)$ を通るから　$40=a(-1)^2-(3a-2)\cdot(-1)+2a$

よって　$6a=42$　ゆえに　$a=7$

$a=7$ を ① に代入して　$b=-5$

したがって　$a=7,\ b=-5,\ c=4$

12

与えられた方程式を ① とする。

[1]　$a\neq 0$ のとき

① は 2 次方程式であり，その判別式を D とすると

$D=(3a+1)^2-4\cdot a\cdot 2(a+1)=a^2-2a+1=(a-1)^2$

この符号を調べると

$a\neq 1$ のとき　$D>0$　このとき，実数解の個数は　2 個

$a=1$ のとき　$D=0$　このとき，実数解の個数は　1 個

[2]　$a=0$ のとき

① は $x+2=0$ となるから，実数解の個数は　1 個

[1]，[2] により，① の実数解の個数は

$a<0,\ 0<a<1,\ 1<a$ のとき 2 個，　$a=0,\ 1$ のとき 1 個

13

$y=x^2+ax+b$ ……①，　$y=2x$ ……②，　$y=-4x+3$ ……③　とする。

①，② から y を消去すると　$x^2+ax+b=2x$

よって　$x^2+(a-2)x+b=0$

① と ② が接するとき，この 2 次方程式の判別式が 0 になるから

$(a-2)^2-4\cdot 1\cdot b=0$

ゆえに　$a^2-4a-4b+4=0$ ……④

①，③ から y を消去すると　$x^2+ax+b=-4x+3$

よって　$x^2+(a+4)x+b-3=0$

① と ③ が接するとき，この 2 次方程式の判別式が 0 になるから

$(a+4)^2-4\cdot 1\cdot(b-3)=0$

ゆえに　$a^2+8a-4b+28=0$ ……⑤

④−⑤ から　$-12a-24=0$　これを解いて　$a=-2$

これを ④ に代入すると　$16-4b=0$　ゆえに　$b=4$

したがって　$a=-2,\ b=4$

14

(1)　$2x+5y-4z=9$ ……①，$x+3y-3z=5$ ……②　とする。

①×3−②×5 から　$x+3z=2$　よって　$x=-3z+2$

①−②×2 から　$-y+2z=-1$　よって　$y=2z+1$

(2)　(1) から　$x^2+y^2+z^2=(-3z+2)^2+(2z+1)^2+z^2$

$$=14z^2-8z+5=14\left(z^2-\frac{4}{7}z\right)+5$$

$$=14\left(z-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{27}{7}\quad\cdots\cdots③$$

したがって，$x^2+y^2+z^2$ は $z=\frac{2}{7}$ で最小値 $\frac{27}{7}$ をとる。

$z=\frac{2}{7}$ のとき　$x=-3\cdot\frac{2}{7}+2=\frac{8}{7}$，$y=2\cdot\frac{2}{7}+1=\frac{11}{7}$

よって，求める $x,\ y,\ z$ は　$x=\frac{8}{7},\ y=\frac{11}{7},\ z=\frac{2}{7}$

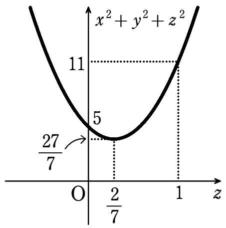
(3) x, y, z が整数のとき，$x^2+y^2+z^2$ は整数である。また，(1) から，z が整数のとき，x, y も整数である。

z が整数のとき，③ から，$x^2+y^2+z^2$ は $z=0$ で最小値 5 をとる。

$z=0$ のとき　　$x=2$, $y=1$

よって，求める整数 x, y, z は

$$x=2,\ y=1,\ z=0$$



15

共通解を α とすると　　$\alpha^2-3\alpha+k-1=0$ ……①

$\alpha^2+(k-2)\alpha-2=0$ ……②

②−① から　$(k+1)\alpha-(k+1)=0$　　よって　$(k+1)(\alpha-1)=0$

ゆえに　$k+1=0$ または $\alpha-1=0$

すなわち　$k=-1$ または $\alpha=1$

[1] $k=-1$ のとき

与えられた 2 つの 2 次方程式はともに $x^2-3x-2=0$ となり，共通の実数解を 2 つもつから，条件を満たさない。

[2] $\alpha=1$ のとき

① から　$1^2-3\cdot1+k-1=0$　　よって　$k=3$

このとき，与えられた 2 つの 2 次方程式は，それぞれ　$x^2-3x+2=0$, $x^2+x-2=0$

$x^2-3x+2=0$ の解は　$x=1,\ 2$

$x^2+x-2=0$ の解は　$x=-2,\ 1$

よって，ただ 1 つの共通の実数解 $x=1$ をもつから，条件を満たす。

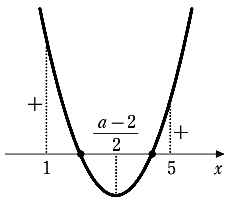
[1], [2] から，k の値は ア3，共通解は イ1

16

$f(x)=x^2-(a-2)x+\frac{a}{2}+5$ とする。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸で，軸は直線 $x=\frac{a-2}{2}$

方程式 $f(x)=0$ が $1\leqq x\leqq5$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつのは，次の 4 つが同時に成り立つときである。



$$\begin{cases} D=(a-2)^2-4\cdot1\cdot\left(\frac{a}{2}+5\right)>0 & \cdots\cdots ① \\ 軸について\quad 1<\frac{a-2}{2}<5 & \cdots\cdots ② \\ f(1)=-\frac{a}{2}+8\geqq0 & \cdots\cdots ③ \\ f(5)=-\frac{9}{2}a+40\geqq0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

① から　$a^2-6a-16>0$　　よって　$(a+2)(a-8)>0$

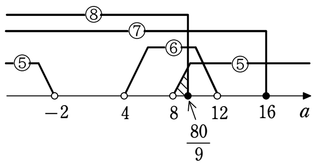
ゆえに　$a<-2,\ 8<a$ ……⑤

② から　$2<a-2<10$

よって　$4<a<12$ ……⑥

③ から　$a\leqq16$ ……⑦

④ から　$a\leqq\frac{80}{9}$ ……⑧



⑤，⑥，⑦，⑧ の共通範囲を求めて

$$8<a\leqq\frac{80}{9}$$

17

(1) $f(x)>g(x)$ から　$x^2+2ax+25>-x^2+4ax-25$

よって　$x^2-ax+25>0$

この不等式がどんな x の値に対しても成り立つための必要十分条件は

$$D=(-a)^2-4\cdot1\cdot25<0$$

よって　$(a+10)(a-10)<0$　　したがって　$-10<a<10$

(2) どんな x_1, x_2 の値に対しても $f(x_1)>g(x_2)$ が成り立つための必要十分条件は

($f(x)$ の最小値)>($g(x)$ の最大値)

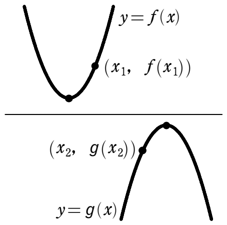
となることである。

$f(x)=(x+a)^2-a^2+25$ であるから，$f(x)$ の最小値は　$-a^2+25$

$g(x)=-(x-2a)^2+4a^2-25$ であるから，$g(x)$ の最大値は　$4a^2-25$

よって　$-a^2+25>4a^2-25$

ゆえに　$a^2-10<0$　　これを解いて　$-\sqrt{10}<a<\sqrt{10}$



18

$$y=(1-\cos^2\theta)+\cos\theta=-\cos^2\theta+\cos\theta+1$$

$\cos\theta=x$ とおくと　$y=-x^2+x+1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

また，$0°\leqq\theta\leqq180°$ から　$-1\leqq x\leqq1$

よって，y は　$x=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{5}{4}$,

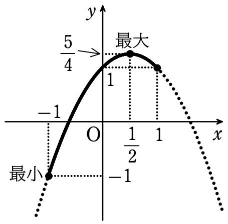
$x=-1$ で最小値 -1 をとる。

$x=\frac{1}{2}$ すなわち $\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき　$\theta=60°$

$x=-1$ すなわち $\cos\theta=-1$ のとき　$\theta=180°$

したがって　$\theta=60°$ で最大値 $\frac{5}{4}$

$\theta=180°$ で最小値 -1



19

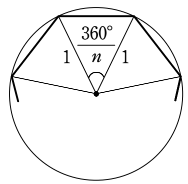
(1) 図のように，正 n 角形の各頂点と円の中心を結ぶと n 個の合同な二等辺三角形ができる。

その 1 つの面積は

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{360°}{n}=\frac{1}{2}\sin\frac{360°}{n}$$

よって，内接する正 n 角形の面積は

$$n\times\frac{1}{2}\sin\frac{360°}{n}=\frac{n}{2}\sin\frac{360°}{n}$$

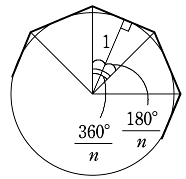


(2) 正 n 角形の各頂点と円の中心を結ぶと n 個の合同な二等辺三角形ができる。その 1 つは，頂角が $\frac{360°}{n}$，高さが 1 であるから，その面積は

$$2\times\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\tan\frac{180°}{n}=\tan\frac{180°}{n}$$

よって，外接する正 n 角形の面積は

$$n\times\tan\frac{180°}{n}=n\tan\frac{180°}{n}$$



20

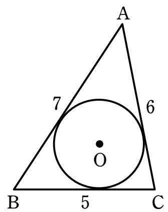
(1) 球の中心を O とする。O を通り，底面に平行な平面で三角柱を切ると，その切り口では，右の図のように，$a=5$, $b=6$, $c=7$ の △ABC に円 O が内接している。

△ABC において，余弦定理により

$$\cos A=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot6\cdot7}=\frac{60}{2\cdot6\cdot7}=\frac{5}{7}$$

よって　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{49}}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$



ゆえに，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot6\cdot7\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6} \quad\cdots\cdots ①$$

また，球の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(5+6+7)=9r \quad\cdots\cdots ②$$

①，② から　$6\sqrt{6}=9r$　　よって　$r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

したがって，球の体積は　$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^3=\frac{64\sqrt{6}}{27}\pi$

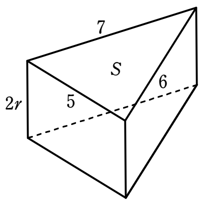
球の表面積は　$4\pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{32}{3}\pi$

(2) 三角柱の体積は　$S\times2r=6\sqrt{6}\times2\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=48$

よって，三角柱と球の体積比は　$48:\frac{64\sqrt{6}}{27}\pi=81:4\sqrt{6}\pi$

(3) 三角柱の表面積は

$$2S+5\times 2r+6\times 2r+7\times 2r$$
$$=2S+36r=2\cdot 6\sqrt{6}+36\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}$$
$$=12\sqrt{6}+24\sqrt{6}=36\sqrt{6}$$



よって，三角柱と球の表面積の比は

$$36\sqrt{6} : \frac{32}{3}\pi=27\sqrt{6} : 8\pi$$

参考　(2) で求めた体積比は

$$81 : 4\sqrt{6}\pi=(81\times\sqrt{6}):(4\sqrt{6}\pi\times\sqrt{6})=81\sqrt{6} : 24\pi$$
$$=27\sqrt{6} : 8\pi$$

と変形できる。

よって，三角柱と球の体積比と，表面積の比は等しい。

21

$\tan\theta=\frac{1}{2}$ から　$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$　　よって　$\sin\theta=\frac{1}{2}\cos\theta$　……①

したがって　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\cos\theta\right)^2=\left(\frac{3}{2}\cos\theta\right)^2=\frac{9}{4}\cos^2\theta$

$$=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{9}{5}$$

別解 1　①から　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\cdot\cos\theta$$
$$=1+\cos^2\theta=1+\frac{1}{1+\tan^2\theta}$$
$$=1+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$$

別解 2　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left\{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1\right)\right\}^2=\cos^2\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1\right)^2$

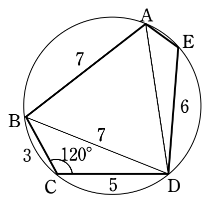
$$=\frac{1}{1+\tan^2\theta}(\tan\theta+1)^2$$
$$=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)^2=\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{5}$$

22

(1) △BCD において，余弦定理により

$$BD^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos 120^\circ=49$$

BD>0 であるから　BD=7



(2) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle BAD=180^\circ-\angle BCD$$
$$=180^\circ-120^\circ=60^\circ$$

(3) AB=BD から　$\angle ADB=\angle BAD=60^\circ$

よって，△ABD は正三角形である。

したがって　$\angle ABD=60^\circ$，AD=7

また，四角形 ABDE が円に内接するから

$$\angle AED=180^\circ-\angle ABD=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

AE=x とおく。

△ADE において，余弦定理により　$7^2=x^2+6^2-2\cdot x\cdot 6\cos 120^\circ$

整理すると　$x^2+6x-13=0$　　よって　$x=-3\pm\sqrt{22}$

$x>0$ であるから　$x=-3+\sqrt{22}$　　したがって　AE$=-3+\sqrt{22}$

23

(1) $2x+1$，x^2-1，x^2+x+1 が三角形の 3 辺となるのは，次の 3 つの不等式が同時に成り立つときである。

$$\begin{cases} 2x+1<(x^2-1)+(x^2+x+1) & \cdots\cdots ① \\ x^2-1<(x^2+x+1)+(2x+1) & \cdots\cdots ② \\ x^2+x+1<(2x+1)+(x^2-1) & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①から　$2x^2-x-1>0$　　すなわち　$(2x+1)(x-1)>0$

よって　$x<-\frac{1}{2}$，$1<x$　……④

②から　$x>-1$　……⑤

③から　$x>1$　……⑥

④，⑤，⑥の共通範囲を求めて　$x>1$

(2) $x>1$ のとき　$(x^2+x+1)-(2x+1)=x^2-x=x(x-1)>0$

$$(x^2+x+1)-(x^2-1)=x+2>0$$

よって，長さが x^2+x+1 の辺が最大辺である。

したがって，求める角の大きさを θ とすると，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{(2x+1)^2+(x^2-1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(2x+1)(x^2-1)}$$
$$=\frac{-2x^3-x^2+2x+1}{2(2x+1)(x^2-1)}=\frac{-(2x+1)x^2+2x+1}{2(2x+1)(x^2-1)}$$
$$=-\frac{(2x+1)(x^2-1)}{2(2x+1)(x^2-1)}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから　$\theta=120^\circ$

24

(1) 正弦定理により　$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

また，与えられた等式より，$\sin A:\sin B:\sin C=6:5:4$ であるから

$$a:b:c=6:5:4$$

したがって，$a=6k$，$b=5k$，$c=4k$　……①　$(k>0)$ とおける。

余弦定理により　$\cos A=\frac{(5k)^2+(4k)^2-(6k)^2}{2\cdot 5k\cdot 4k}=\frac{5k^2}{2\cdot 5\cdot 4k^2}=\frac{1}{8}$

よって　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

(2) △ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5k\cdot 4k\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{4}k^2\quad\cdots\cdots ②$$

また，内接円の半径が 1 であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(a+b+c)=\frac{1}{2}(6k+5k+4k)=\frac{15}{2}k\quad\cdots\cdots ③$$

②，③から　$\frac{15\sqrt{7}}{4}k^2=\frac{15}{2}k$　　よって　$\sqrt{7}k^2=2k$

$k>0$ であるから　$k=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$　……④

④を①に代入して　$c=4\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$　　すなわち　AB$=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

④を③に代入して　$S=\frac{15}{2}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{15\sqrt{7}}{7}$

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により　$\frac{a}{\sin A}=2R$

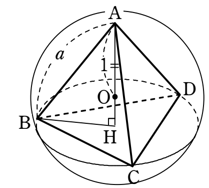
$a=6k=6\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{12\sqrt{7}}{7}$ であるから

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{\frac{12\sqrt{7}}{7}}{2\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{16}{7}$$

25

正四面体を ABCD とし，1 辺の長さを a とする。また，球の中心を O とする。

頂点 A から △BCD に垂線 AH を下ろすと， H は △BCD (正三角形) の外接円の中心であり，BH はその半径である。



よって，△BCD において，正弦定理により

$$\frac{a}{\sin 60^\circ}=2BH$$

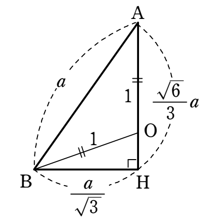
ゆえに　$BH=\frac{a}{2\sin 60^\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}}$

△ABH において，三平方の定理により

$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

△OBH において，三平方の定理により

$$\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-1\right)^2=1^2$$



ゆえに　$a^2-\frac{2\sqrt{6}}{3}a=0$

$a>0$ であるから　$a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

別解　4 つの四面体 OBCD，OCDA，ODAB，OABC は合同であるから

4×(四面体 OBCD の体積)=(正四面体 ABCD の体積)

が成り立つ。

よって　$4\times\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot OH=\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot AH$

ゆえに　4OH=AH　　すなわち　$4\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-1\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

これを解いて　$a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$