1

解答　順に 7，3，3，1

解説

$n(U)=7$

$\overline{B}=\{1,\ 4,\ 5\}$ であるから　$n(\overline{B})=3$

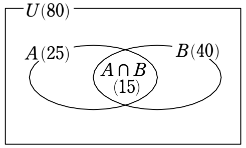
$A\cap B=\{3,\ 6,\ 7\}$ であるから　$n(A\cap B)=3$

$\overline{A\cup B}=\{4\}$ であるから　$n(\overline{A\cup B})=1$

2

解答　（ア） 55　（イ） 65　（ウ） 50　（エ） 30

解説



（ア）$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

$=80-25$

$=55$ (個)

（イ）$n(\overline{A\cap B})$

$=n(U)-n(A\cap B)$

$=80-15$

$=65$ (個)

（ウ）$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=25+40-15$

$=50$ (個)

（エ）$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(U)-\{n(A)+n(B)-n(A\cap B)\}$

$=80-(25+40-15)$

$=30$ (個)

3

解答　(1) 2 個　(2) 32 個

解説

1 から 100 までの整数のうち，5 で割り切れる数全体の集合を A，7 で割り切れる数全体の集合を B とする。

$A=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$，　$B=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot14\}$

(1) 5 と 7 の両方で割り切れる数は，35 で割り切れる数である。

その数全体の集合は $A\cap B$ で表され　$A\cap B=\{35,\ 70\}$

よって，求める個数は　$n(A\cap B)=2$ (個)

(2) 5 と 7 の少なくとも一方で割り切れる数全体の集合は $A\cup B$ で表される。

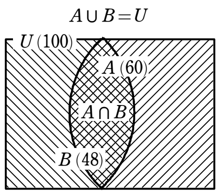
$n(A)=20$，$n(B)=14$ であるから

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=20+14-2=32$ (個)

4

解答　(1) 最大値 48，最小値 8　(2) 最大値 40，最小値 0

解説



(1) $n(A\cap B)$ は，$A\cup B=U$ のとき最小になり

$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(U)$

$=60+48-100=8$

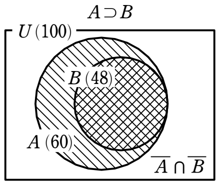
$n(A)>n(B)$ であるから，$n(A\cap B)$ は，$A\supset B$ のとき

最大になり　$n(A\cap B)=n(B)=48$

よって　最大値 48，最小値 8

(2) $n(\overline{A}\cap B)=n(B)-n(A\cap B)$

$=48-n(A\cap B)$



よって，$n(\overline{A}\cap B)$ は，

$n(A\cap B)$ が最大のとき最小，

$n(A\cap B)$ が最小のとき最大

となる。(1) の結果から，

最小値は　$48-48=0$

最大値は　$48-8=40$

5

解答　$n(A\cap B\cap C)=1$，$n(A\cup B\cup C)=108$

解説

$A\cap B\cap C$ は 3 と 5 と 7 の最小公倍数 105 の倍数全体の集合で，$A\cap B\cap C=\{105\cdot1\}$ であるから　$n(A\cap B\cap C)=1$

また　$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

ここで　$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot66\}$ であるから　$n(A)=66$

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot40\}$ であるから　$n(B)=40$

$C=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot28\}$ であるから　$n(C)=28$

$A\cap B$ は 3 と 5 の最小公倍数 15 の倍数全体の集合で，

$A\cap B=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 15\cdot13\}$ であるから

$n(A\cap B)=13$

$B\cap C$ は 5 と 7 の最小公倍数 35 の倍数全体の集合で，

$B\cap C=\{35\cdot1,\ 35\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 35\cdot5\}$ であるから

$n(B\cap C)=5$

$C\cap A$ は 7 と 3 の最小公倍数 21 の倍数全体の集合で，

$C\cap A=\{21\cdot1,\ 21\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 21\cdot9\}$ であるから

$n(C\cap A)=9$

よって　$n(A\cup B\cup C)=66+40+28-13-5-9+1=108$

6

解答　20 通り

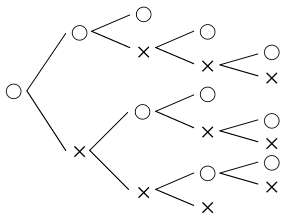
解説

1 回目が表のとき，表と裏のどちらかが 3 回出るまでの出方を樹形図にかくと，右のようになる。

この場合の出方は，10 通り。

1 回目が裏のときも同様に 10 通りある。

したがって，求める場合の数は　20 通り



[○は表，×は裏を表している]

7

解答　(1) 10 通り　(2) 8 通り

解説

(1) 目の数を x，y とすると，和 $x+y$ は　$2\leqq x+y\leqq 12$

よって，和 $x+y$ が 5 以下となるのは，2，3，4，5 の 4 通り。

[1]　$x+y=2$ のとき　$(x,\ y)=(1,\ 1)$

[2]　$x+y=3$ のとき　$(x,\ y)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

[3]　$x+y=4$ のとき　$(x,\ y)=(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$

[4]　$x+y=5$ のとき　$(x,\ y)=(1,\ 4)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$

[1]～[4] のどの 2 つも起こり方に重複はないから，求める場合の数は

$1+2+3+4=10$ (通り)

(2) 目の和は，3 以上 18 以下である。

よって，目の和が 7 の倍数となるのは 7，14 の 2 通りである。

3 つのさいころの目を $\left\{\boxed{},\ \boxed{},\ \boxed{}\right\}$ で表す。

[1]　目の和が 7 のとき

$\{1,\ 1,\ 5\}$，$\{1,\ 2,\ 4\}$，$\{1,\ 3,\ 3\}$，$\{2,\ 2,\ 3\}$

[2]　目の和が 14 のとき

$\{2,\ 6,\ 6\}$，$\{3,\ 5,\ 6\}$，$\{4,\ 4,\ 6\}$，$\{4,\ 5,\ 5\}$

[1] と [2] の起こり方に重複はないから，求める場合の数は

$4+4=8$ (通り)

8

解答　(1) 往復で同じ鉄道を利用しないとき 6 通り，往復で同じ鉄道を利用してもよいとき 9 通り

(2) 15

解説

(1) [1]　往復で同じ鉄道を利用しないとき

S 市から T 市へ行くとき利用する鉄道の選び方は　3 通り

そのおのおのに対して，T 市から S 市に帰るときに利用する鉄道の選び方は　2 通り

よって，積の法則により　$3\times2=6$ (通り)

[2]　往復で同じ鉄道を利用してもよいとき

S 市から T 市へ行くとき利用する鉄道の選び方は　3 通り

そのおのおのに対して，T 市から S 市に帰るときに利用する鉄道の選び方は　3 通り

よって，積の法則により　$3\times3=9$ (通り)

(2) $(a+b+c+d+e)(x+y+z)$ を展開したときの各項は次の形になる。

(a，b，c，d，e のどれか 1 つ)$\times$(x，y，z のどれか 1 つ)

よって，展開した式の項の個数は，積の法則により

$5\times3=15$ (個)

9

解答　順に 20 個，1815

解説

$648=2^3\cdot3^4$ であるから，正の約数の個数は　$(3+1)(4+1)=20$ (個)

$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2+3^3+3^4)$ を展開すると，各項に 648 のすべての約数が現れる。

よって，約数の総和は　$(1+2+4+8)(1+3+9+27+81)=15\times121=1815$

10

解答　(1) 20 通り　(2) 15 通り

解説

(1) 目の積が 3 の倍数になるのは，2 個のさいころの目の少なくとも 1 つが 3 または 6 の目の場合である。

目の出方は全部で $6^2=36$ (通り)　そのうち 2 個の目がともに 3 と 6 以外の目である場

合の数は　$4^2=16$（通り）

よって，求める場合の数は

$$36-16=20\text{（通り）}$$

(2)　目の積が 6 の倍数になるには，目の積が 3 の倍数であり，かつ，2 個の目の少なくとも 1 つが偶数の場合である。

よって，(1) の結果から目の積が奇数の 3 の倍数となる場合を除けばよい。

目の積が奇数の 3 の倍数になるには，2 個の目がともに奇数であり，その中の少なくとも 1 つが 3 の目の場合であるから

$$3^2-2^2=5\text{（通り）}$$

よって，求める場合の数は

$$20-5=15\text{（通り）}$$

1

解答　(1)　0　　(2)　6　　(3)　3

解説

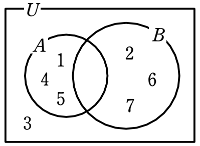
(1)　$A\cap B=\varnothing$ であるから　　$n(A\cap B)=0$

(2)　$A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ であるから

$$n(A\cup B)=6$$

(3)　$\overline{A}=\{2,\ 3,\ 6,\ 7\}$ であるから　　$\overline{A}\cap B=\{2,\ 6,\ 7\}$

よって　　$n(\overline{A}\cap B)=3$



2

解答　(1)　33　　(2)　35　　(3)　44　　(4)　27　　(5)　27

解説

(1)　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=25+16-8$

$=33$

(2)　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

$=60-25$

$=35$

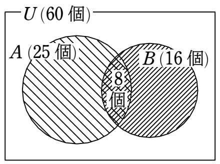
(3)　$n(\overline{B})=n(U)-n(B)$

$=60-16$

$=44$

(4)　$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=60-33=27$

(5)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=27$



3

解答　(1)　30 個　　(2)　75 個　　(3)　15 個　　(4)　90 個

解説

150 以下の自然数全体の集合を全体集合 U とし，U の部分集合のうち，5 の倍数全体の集合を A，2 の倍数全体の集合を B とする。

(1)　$A=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot30\}$ であるから　　$n(A)=30$（個）

(2)　$B=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot75\}$ であるから　　$n(B)=75$

よって　　$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=150-75=75$（個）

(3)　求めるのは $n(A\cap B)$ である。

$$A\cap B=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot15\}$$

よって　　$n(A\cap B)=15$（個）

(4)　求めるのは $n(A\cup B)$ である。

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=30+75-15=90\text{（個）}$$

4

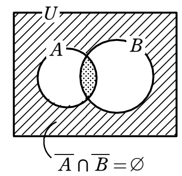
解答　(ア)　11　　(イ)　12

解説

この 40 人の集合を全体集合 U とし，野球の好きな生徒の集合を A，サッカーの好きな生徒の集合を B とする。

このとき　　$n(U)=40$，$n(A)=23$，$n(B)=28$

野球もサッカーも好きな生徒の集合は $A\cap B$ であり，$n(A\cap B)$ が最小になるのは $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$　すなわち $A\cup B=U$ のときである。



このとき，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ より

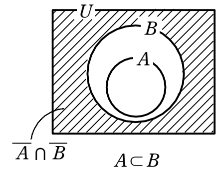
$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$

$=n(A)+n(B)-n(U)=23+28-40=11$

よって，野球もサッカーも好きな生徒は

(ア) 11 人以上

また，野球もサッカーも好きではない生徒の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ であり，$n(\overline{A}\cap\overline{B})$ が最大になるのは，$A\subset B$ すなわち $A\cup B=B$ のときである。



このとき

$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-n(B)=40-28=12$

よって，野球もサッカーも好きではない生徒は

(イ) 12 人以下

5

解答　(1)　66 個　　(2)　34 個

解説

(1)　1 から 100 までの整数のうち，2 で割り切れる数全体の集合を A，5 で割り切れる数全体の集合を B，7 で割り切れる数全体の集合を C とする。

$A=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot50\}$，　$n(A)=50$

$B=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$，　$n(B)=20$

$C=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot14\}$，　$n(C)=14$

$A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$ は，それぞれ 10，35，14 で割り切れる数全体の集合であるから

$A\cap B=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 10\cdot10\}$，　$n(A\cap B)=10$

$B\cap C=\{35,\ 70\}$，　$n(B\cap C)=2$

$C\cap A=\{14\cdot1,\ 14\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 14\cdot7\}$，　$n(C\cap A)=7$

$A\cap B\cap C$ は 70 で割り切れる数全体の集合であるから

$A\cap B\cap C=\{70\}$，　$n(A\cap B\cap C)=1$

したがって，求める個数は

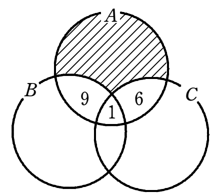
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)$

$=50+20+14-10-2-7+1=66$（個）

(2)　2 では割り切れるが，5 でも 7 でも割り切れない数全体の集合は，右の図の斜線部分である。

$n(A\cap B\cap C)=1$，$n(A\cap B)=10$，$n(C\cap A)=7$ から，集合 A における各部分の要素の個数は，右のようになる。



よって，斜線部分の要素の個数は

$$n(A)-(9+6+1)=50-16=34\text{（個）}$$

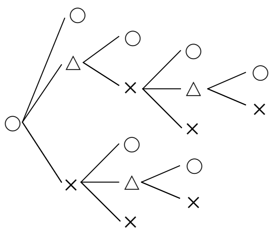
6

解答　10 通り

解説

A の勝ちを ○，引き分けを △，負けを × で表して，勝負の分かれ方の樹形図をかくと，右のようになる。

よって　　10 通り



7

解答　(1)　9 通り　　(2)　6 通り　　(3)　5 通り

解説

(1)　目の和が 4 になる場合は，表 [1] から
3 通り
目の和が 7 になる場合は，表 [2] から
6 通り
この 2 つの場合は同時には起こらないから，求める場合の数は　　$3+6=9$（通り）

[1]

大	1	2	3
小	3	2	1

[2]

大	1	2	3	4	5	6
小	6	5	4	3	2	1

(2)　目の和が 4 以下になるのは，目の和が 2 または 3 または 4 になる場合である。
目の和が 2 になる場合は，表 [3] から　1 通り
目の和が 3 になる場合は，表 [4] から　2 通り
目の和が 4 になる場合は，表 [1] から　3 通り
この 3 つの場合は同時には起こらないから，求める場合の数は
$1+2+3=6$（通り）

[3]

大	1
小	1

[4]

大	1	2
小	2	1

(3)　目の積が 8 の倍数になるのは，目の積が 8 または 16 または 24 になる場合である。
目の積が 8 になる場合は，表 [5] から　2 通り
目の積が 16 になる場合は，表 [6] から　1 通り
目の積が 24 になる場合は，表 [7] から　2 通り
この 3 つの場合は同時には起こらないから，求める場合の数は
$2+1+2=5$（通り）

[5]

大	2	4
小	4	2

[6]

大	4
小	4

[7]

大	4	6
小	6	4

参考　目の積が 32 になることはない。

8

解答　(1)　15 通り　　(2)　16 個

解説

(1)　a，b，c，d，e の 5 冊から 1 冊を選ぶ方法は 5 通りあり，そのおのおのの場合について，p，q，r の 3 冊から 1 冊を選ぶ方法は 3 通りずつある。
よって，求める場合の数は　　$5\times3=15$（通り）

(2)　$(a+b)(p+q)(x+y+z+u)$ を展開した式の各項は次の形になる。
（a か b のどちらか）×（p か q のどちらか）×（x，y，z，u のどれか 1 つ）
よって，展開した式の項の個数は　　$2\times2\times4=16$（個）

9

解答　順に　(1)　12 個，280　　(2)　16 個，2340　　(3)　24 個，1170

解説

(1)　108 を素因数分解すると　　$108=2^2\cdot3^3$
$2^2\cdot3^3$ の正の約数は，2^2 の正の約数と，3^3 の正の約数の積で表される。
2^2 の正の約数は，1，2，2^2 の　3 通り
3^3 の正の約数は，1，3，3^2，3^3 の　4 通り
よって，108 の正の約数の個数は　　$3\times4=12$（個）
また，108 の正の約数の総和は　　$(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)=7\cdot40=280$

(2)　1000 を素因数分解すると　　$1000=2^3\cdot5^3$
$2^3\cdot5^3$ の正の約数は，2^3 の正の約数と，5^3 の正の約数の積で表される。
2^3 の正の約数は，1，2，2^2，2^3 の　4 通り
5^3 の正の約数は，1，5，5^2，5^3 の　4 通り
よって，1000 の正の約数の個数は　　$4\times4=16$（個）
また，1000 の正の約数の総和は　　$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2+5^3)=15\cdot156=2340$

(3)　360 を素因数分解すると　　$360=2^3\cdot3^2\cdot5$
$2^3\cdot3^2\cdot5$ の正の約数は，2^3 の正の約数と 3^2 の正の約数，および 5 の正の約数の積で表される。
2^3 の正の約数は，1，2，2^2，2^3 の　4 通り
3^2 の正の約数は，1，3，3^2 の　3 通り
5 の正の約数は，1，5 の　2 通り
よって，360 の正の約数の個数は　　$4\times3\times2=24$（個）
また，360 の正の約数の総和は　　$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5)=15\cdot13\cdot6=1170$

10

解答　(1)　189 通り　　(2)　108 通り

解説

(1)　起こりうるすべての場合は
$6\times6\times6=216$（通り）
このうち，積が奇数になるのは 3 個とも奇数の場合で
$3\times3\times3=27$（通り）
よって，積が偶数になる場合は
$216-27=189$（通り）

(2)　3 個のさいころの目の和が奇数になるのは，次の [1]，[2] のいずれかの場合である。
[1]　全部の目が奇数
$3\times3\times3=27$（通り）
[2]　1 個だけが奇数
大のさいころが奇数の場合
$3\times3\times3=27$（通り）
中のさいころが奇数の場合，小のさいころが奇数の場合も同様に 27 通りであるから，1 個だけが奇数であるのは
$27\times3=81$（通り）
よって，求める場合の数は
$27+81=108$（通り）

第１講　レベルＡ

1

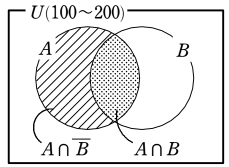
解答　(1)　75 個　　(2)　20 個　　(3)　60 個

解説

100 から 200 までの整数全体を全体集合 U とし，そのうち
4 で割り切れる数全体の集合を A
5 で割り切れる数全体の集合を B
とする。このとき
$A=\{4\cdot25,\ 4\cdot26,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot50\}$
$B=\{5\cdot20,\ 5\cdot21,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot40\}$
$A\cap B=\{20\cdot5,\ 20\cdot6,\ \cdots\cdots,\ 20\cdot10\}$
よって　　$n(A)=50-25+1=26$
$n(B)=40-20+1=21$
$n(A\cap B)=10-5+1=6$
また　　$n(U)=200-100+1=101$

(1)　求める個数は $n(\overline{A})$ であるから
$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=101-26=75$（個）

(2)　求める個数は $n(A\cap\overline{B})$ であるから
$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)$
$=26-6=20$（個）



(3)　求める個数は $n(\overline{A}\cap\overline{B})$ である。
$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$
ここで，$n(A\cup B)$ は
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=26+21-6=41$（個）
よって　　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=101-41=60$（個）

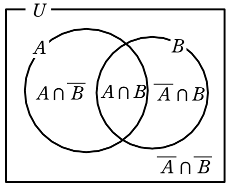
2

解答　(1)　30　　(2)　15　　(3)　55　　(4)　30

解説

(1)　$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$
$=100-70=30$

(2)　$n(\overline{A}\cap B)=n(A\cup B)-n(A\cap\overline{B})-n(A\cap B)$
$=70-40-15=15$



(3)　$n(A)=n(A\cap\overline{B})+n(A\cap B)=40+15=55$

別解　$n(A)=n(A\cup B)-n(\overline{A}\cap B)=70-15=55$

(4)　$n(B)=n(A\cap B)+n(\overline{A}\cap B)=15+15=30$

別解　$n(B)=n(A\cup B)-n(A\cap\overline{B})=70-40=30$

3

解答　（ア）　29　　（イ）　21　　（ウ）　69

解説

2 桁の自然数の集合を U とすると　　$n(U)=99-9=90$
$A=\{4\cdot3,\ 4\cdot4,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot24\}$ から　　$n(A)=24-3+1=22$
$B=\{6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$ から　　$n(B)=16-2+1=15$

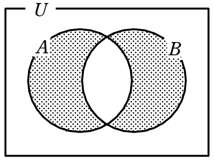
（ア）　$A\cap B$ は 12 の倍数の集合である。
$A\cap B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot8\}$ から　　$n(A\cap B)=8$

ゆえに　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=22+15-8=29$

(イ)　$A\triangle B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$ は，右の図の黒く塗った部分である。

よって，$A\triangle B$ の要素の個数は

$n(A\cup B)-n(A\cap B)=29-8=21$



(ウ)　$A\triangle\overline{B}=(A\cap\overline{\overline{B}})\cup(\overline{A}\cap\overline{B})=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$

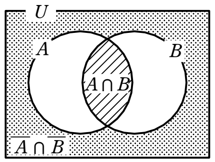
$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$ は，右の図の黒く塗った部分である。

よって，$A\triangle\overline{B}$ の要素の個数は

$n(A\cap B)+n(\overline{A}\cap\overline{B})$

$=n(A\cap B)+n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-\{n(A\cup B)-n(A\cap B)\}=90-21=69$



$\boxed{4}$

解答　(1)　59 通り　　(2)　91 通り

解説

(1)　10 円硬貨 4 枚，100 円硬貨 3 枚，500 円硬貨 2 枚 を用いてできる金額は，

各硬貨 0 枚の場合も含めて　$(4+1)(3+1)(2+1)$ 通りある。

この中に 0 円が含まれるので，求める場合の数は　$(4+1)(3+1)(2+1)-1=59$ (通り)

(2)　100 円硬貨 7 枚，500 円硬貨 3 枚を用いてできる金額は，0 円を含めると 0 円から 2200 円まで 100 円きざみの 23 通りある。

そのおのおのについて，10 円硬貨が 0 円から 30 円の 4 通りある。ただし，すべての硬貨が 0 枚を除くから　$23\times4-1=91$ (通り)

$\boxed{5}$

解答　(1)　24　　(2)　15330

解説

(1)　6400 を素因数分解すると　$6400=2^8\cdot5^2$

よって，6400 の正の約数は，すべて

$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8)(1+5+5^2)$

を展開した項として 1 つずつ出てくる。

ゆえに，6400 の正の約数のうち，偶数であるものの個数は

$8\times3=24$ (個)

(2)　$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8)(5+5^2)=511\times30=15330$

$\boxed{1}$

解答　240

解説

$700=2^2\cdot5^2\cdot7$ であるから，1 から 699 までの整数のうち，2 でも 5 でも 7 でも割り切れない整数の個数を求めればよい。

1 から 699 までの整数全体の集合を U とすると　$n(U)=699$

U の部分集合のうち，2 の倍数全体の集合を A，5 の倍数全体の集合を B，7 の倍数全体の集合を C とする。

$700\notin U$ に注意して，$700=2\cdot350$ から　$n(A)=349$

$700=5\cdot140$ から　$n(B)=139$

$700=7\cdot100$ から　$n(C)=99$

また，$A\cap B$ は 10 の倍数全体の集合で，$700=10\cdot70$ から　$n(A\cap B)=69$

$B\cap C$ は 35 の倍数全体の集合で，$700=35\cdot20$ から　$n(B\cap C)=19$

$C\cap A$ は 14 の倍数全体の集合で，$700=14\cdot50$ から　$n(C\cap A)=49$

$A\cap B\cap C$ は 70 の倍数全体の集合で，$700=70\cdot10$ から　$n(A\cap B\cap C)=9$

よって　$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$

$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=349+139+99-69-19-49+9=459$

したがって，求める個数は

$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{A\cup B\cup C})=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

$=699-459=240$

$\boxed{2}$

解答　(1)　長さ 3 の列は　5 通り，長さ 4 の列は　8 通り

(2)　a で始まる列は　8 通り，b で始まる列は　5 通り

(3)　$f(n+2)=f(n+1)+f(n)$

解説

(1)　長さ 3 の列は　aaa,aab,aba,baa,bab の 5 通り

長さ 4 の列は　$aaaa,aaab,aaba,abaa,abab,baaa,baab,baba$ の 8 通り

(2)　a で始まる列は，長さ 4 の列の左端に a をつければよいから，(1) より 8 通り

b で始まる列は，長さ 3 の列の左端に ba をつければよいから，(1) より 5 通り

(3)　長さ $n+2$ の列は，a で始まる列と b で始まる列に分けられる。

a で始まる列は長さ $n+1$ の列の左端に a を，b で始まる列は，長さ n の列の左端に ba をそれぞれつければよい。

よって　$f(n+2)=f(n+1)+f(n)$

$\boxed{3}$

解答　29 個

解説

立方体の 1 辺の長さを 2 として考えてよい。

このとき，立方体の各辺の中点を結んでできる線分の長さは，$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{6}$，$2\sqrt{2}$ の 4 通りある。

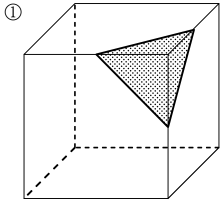
このうち，$2\sqrt{2}$ の線分を 1 辺とする正多角形はない。

[1]　1 辺の長さが $\sqrt{2}$ である正多角形は，

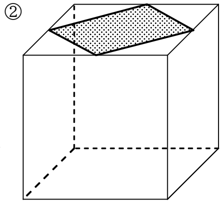
①　正三角形　　②　正方形　　③　正六角形

の場合がある。

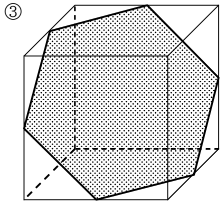
①



②



③



① の正三角形は，立方体の頂点と同じ個数だけあるから，8 個ある。

② の正方形は，立方体の面と同じ個数だけあるから， 6 個ある。

③ の正六角形は，立方体の各面の $\sqrt{2}$ の線分を 1 本ずつ辺にもち，1 つの面で共有する辺を決めると 1 つに決まる。よって，4 個ある。

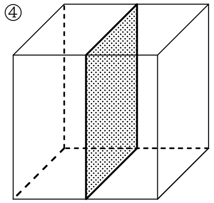
[2]　1 辺の長さが 2 である正多角形は，

④　正方形

の場合がある。

この正方形は，立方体の平行な面が 3 組あるから， 3 個ある。

④



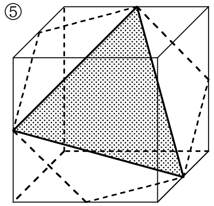
[3]　1 辺の長さが $\sqrt{6}$ である正多角形は，

⑤　正三角形

の場合がある。

この正三角形は，③ の正六角形上に 2 個ずつあるから，$2\times4=8$ 個ある。

⑤



[1] ～ [3] から，条件を満たす正多角形の個数は

$8+6+4+3+8=29$ (個)

1

解答　(1)　60　(2)　4　(3)　5040　(4)　120　(5)　$n(n-1)(n-2)$

解説

(1)　${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$　　(2)　${}_4P_1=4$

(3)　${}_7P_7=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040$　　(4)　$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

(5)　${}_nP_3=n(n-1)(n-2)$

2

解答　(1)　60　(2)　2520　(3)　120

解説

(1)　${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$

(2)　${}_7P_5=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=2520$

(3)　${}_5P_5=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

3

解答　(1)　2160 個　(2)　900 個　(3)　660 個　(4)　480 個

解説

(1)　万の位は 0 以外の数字 1，2，3，4，5，6 のどれかで，その選び方は　6 通り
千，百，十，一の位は残りの 6 個の数字から 4 個を選んで並べるから，その並べ方は
${}_6P_4$ 通り
よって，5 桁の整数の個数は　$6\times{}_6P_4=6\times6\cdot5\cdot4\cdot3=2160$ (個)

(2)　一の位は 1，3，5 のどれかで　3 通り
万の位は一の位で選んだ数字と 0 を除く数字のどれかで，その選び方は　5 通り
千，百，十の位は残りの 5 個の数字から 3 個を選んで並べるから，その並べ方は
${}_5P_3$ 通り
よって，5 桁の奇数の個数は　$3\times5\times{}_5P_3=3\times5\times5\cdot4\cdot3=900$ (個)

(3)　5 の倍数であるから，一の位は 0 か 5 である。
[1]　一の位が 0 のとき
万，千，百，十の位は残りの 6 個の数字から 4 個を選んで並べる。
よって　${}_6P_4=360$ (個)
[2]　一の位が 5 のとき
万の位は 0 と 5 以外の数字のどれかで，その選び方は　5 通り
千，百，十の位は残りの 5 個の数字から 3 個を選んで並べるから　${}_5P_3$ 通り
よって　$5\times{}_5P_3=300$ (個)
[1]，[2] から，5 の倍数の個数は　$360+300=660$ (個)

(4)　54000 より大きい 5 桁の整数は，54□□□，56□□□，6□□□□ のどれかの形である。
□に入る数は
54□□□ …… 0，1，2，3，6 から 3 個を取って並べるから
${}_5P_3=60$ (個)
56□□□ …… 0，1，2，3，4 から 3 個を取って並べるから
${}_5P_3=60$ (個)
6□□□□ …… 0，1，2，3，4，5 から 4 個を取って並べるから
${}_6P_4=360$ (個)
よって，54000 より大きい 5 桁の整数の個数は　$60\times2+360=480$ (個)

4

解答　(1)　14400 通り　(2)　5760 通り　(3)　60480 通り　(4)　2880 通り
(5)　43200 通り

解説

(1)　女子 5 人を 1 組と考え，この 1 組と男子 4 人の並び方は　5! 通り

男 [女 女 女 女 女] 男 男 男

そのおのおのに対して，女子 5 人の並び方は　5! 通り
よって，求める並び方の総数は
$5!\times5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=14400$ (通り)

(2)　男男男男女女女女女 と 女女女女女男男男男 の 2 通りの場合がある。
そのおのおのに対して，男子 4 人の並び方は　4! 通り
女子 5 人の並び方は　5! 通り
よって，求める並び方の総数は
$2\times4!\times5!=2\times4\cdot3\cdot2\cdot1\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5760$ (通り)

(3)　両端の 2 か所に，男子 4 人のうち 2 人が並ぶ方法は　${}_4P_2$ 通り

男 ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 男

そのおのおのに対して，残りの 7 人の並び方は　7! 通り
よって，求める並び方の総数は
${}_4P_2\times7!=4\cdot3\times7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=60480$ (通り)

(4)　男子，女子が交互に並ぶようにするには，まず女子 5 人を 1 列に並べて，その間の 4 か所に男子 4 人を並べればよい。

女 男 女 男 女 男 女 男 女

まず，女子 5 人の並び方は　5! 通り
そのおのおのに対して，女子と女子の間の 4 か所に男子 4 人を並べる方法は
4! 通り
よって，求める並び方の総数は
$5!\times4!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1=2880$ (通り)

(5)　どの男子も隣り合わないようにするには，まず女子 5 人を 1 列に並べて，その間か両端の 6 か所に男子 4 人を並べればよい。

○ 女 ○ 女 ○ 女 ○ 女 ○ 女 ○
(○ の箇所に男子を並べる)

まず，女子 5 人の並び方は　5! 通り
そのおのおのに対して，女子と女子の間か両端の 6 か所に男子 4 人を並べる方法は
${}_6P_4$ 通り
よって，求める並び方の総数は
$5!\times{}_6P_4=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times6\cdot5\cdot4\cdot3=43200$ (通り)

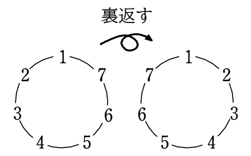
5

解答　(1)　720 通り　(2)　360 通り

解説

(1)　$(7-1)!=6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ (通り)

(2)　(1) の並べ方のうち，裏返して同じになるものは 2 個ずつある。
したがって　$720\div2=360$ (通り)



6

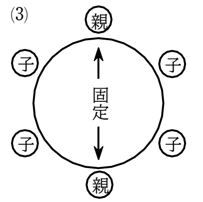
解答　(1)　120 通り　(2)　48 通り　(3)　24 通り　(4)　12 通り

解説

(1)　両親 2 人，子ども 4 人の計 6 人の円順列であるから，求める並び方の総数は
$(6-1)!=5!=120$ (通り)

(2)　両親 2 人を 1 人と考えると，計 5 人の円順列であり，両親 2 人の並び方は 2 通りであるから　$(5-1)!\times2=4!\times2=24\times2=48$ (通り)

(3)　両親 2 人を固定して考えると，残り 4 つの位置に子ども 4 人が並ぶ順列で
$4!=24$ (通り)

(3)


(4)　まず，男性 3 人が輪を作る方法は
$(3-1)!=2!=2$ (通り)
その間の 3 か所に女性 3 人が並ぶと条件を満たすから，求める並び方は　$2\times3!=12$ (通り)

7

解答　(1)　48 個　(2)　63 個　(3)　26 個

解説

(1)　百の位に使える数字は 1，2，3 の 3 通り。
そのおのおのに対して，十，一の位に使える数字は，それぞれ 0，1，2，3 の 4 通りある。
よって，3 桁の自然数の個数は　$3\times4^2=48$ (個)

(2)　1 桁の自然数は，1，2，3 の 3 個。
2 桁の自然数は，十の位に使える数字が 1，2，3 の 3 通り。
そのおのおのに対して，一の位に使える数字は，0，1，2，3 の 4 通りある。
ゆえに，2 桁の自然数は　$3\times4=12$ (個)
3 桁の自然数は，(1) から　48 個
よって，求める個数は　$3+12+48=63$ (個)

別解　0，1，2，3 の 4 種類の数字から 3 個取ってできる重複順列の個数は　$4^3=64$ (個)
このうち，123 を 3 桁の数 123，012 を 2 桁の数 12，001 を 1 桁の数 1 のようにみなすと，000 だけが自然数ではない。
よって，求める個数は　$64-1=63$ (個)

(3)　123 より小さい自然数は次の場合に分けられる。
[1]　1 桁または 2 桁の場合
(2) から　$3+12=15$ (個)
[2]　3 桁の場合
百の位は 1 である。
一の位に使える数字は
十の位が 0 のとき，0，1，2，3 の 4 通り。
十の位が 1 のとき，0，1，2，3 の 4 通り。
十の位が 2 のとき，0，1，2 の 3 通り。
よって　$4+4+3=11$ (個)
[1]，[2] から，求める個数は　$15+11=26$ (個)

8

解答　(1)　256 通り　(2)　254 通り　(3)　127 通り

解説

(1)　8人のそれぞれがA，B 2通りの部屋の選び方があるから

$$2^8=256\ (\text{通り})$$

(2)　(1)からA，Bのどちらかが0人になる場合を除いて

$$256-2=254\ (\text{通り})$$

(3)　(2)で，A，Bの区別をなくして　　$254\div 2=127$ (通り)

$\boxed{9}$

解答　(1)　30通り　　(2)　15通り

解説

(1)　上面の色を1つ固定する。

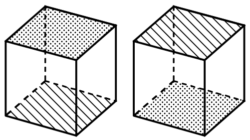
下面の色は残りの色で　　5通り

そのおのおのについて，側面の塗り方は，異なる4個の円順列で

$$(4-1)!=3!=6\ (\text{通り})$$

よって，異なる6色をすべて使って塗る方法は

$$5\times 6=30\ (\text{通り})$$



(2)　上面と下面を同じ色で固定する。

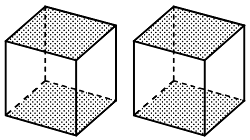
このとき，その塗り方は　　5通り

そのおのおのについて，側面の塗り方は，異なる4個のじゅず順列で

$$\frac{(4-1)!}{2}=\frac{3!}{2}=3\ (\text{通り})$$

よって，異なる5色をすべて使って塗る方法は

$$5\times 3=15\ (\text{通り})$$



$\boxed{1}$

解答　(1)　336　　(2)　720　　(3)　9　　(4)　5040　　(5)　$n(n-1)(n-2)(n-3)$

解説

(1)　${}_8P_3=8\cdot 7\cdot 6=336$

(2)　${}_6P_5=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=720$

(3)　${}_9P_1=9$

(4)　$7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5040$

(5)　${}_nP_4=n(n-1)(n-2)(n-3)$

$\boxed{2}$

解答　(1)　720通り　　(2)　6720通り　　(3)　1320通り

解説

(1)　異なる6個の文字を1列に並べるから

$$6!=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720\ (\text{通り})$$

(2)　${}_8P_5=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=6720$ (通り)

(3)　いすの12個の番号から3個を取って並べ，その順に生徒3人が座ると考えて

$${}_{12}P_3=12\cdot 11\cdot 10=1320\ (\text{通り})$$

$\boxed{3}$

解答　(1)　120個　　(2)　288個　　(3)　216個　　(4)　216個

解説

(1)　一の位は0で，残りの5個の数字から十，百，千，万の位の数を4個選べばよいから　　$1\times {}_5P_4=120$ (個)

(2)　一の位は，1，3，5。万の位は，0と一の位の数以外の4個から1個取るから4通り。

千，百，十の位は，残りの4個から3個取る順列で，${}_4P_3$ 通り。

よって　$3\times 4\times {}_4P_3=288$ (個)

(3)　[1]　一の位が0のとき，(1)より　120個

[2]　一の位が5のとき，万の位は，0と5以外の4個から1個取るから4通り。

千，百，十の位は，残りの4個から3個取る順列で，${}_4P_3$ 通り。

よって　$1\times 4\times {}_4P_3$

[1]，[2]から　$120+1\times 4\times {}_4P_3=120+96=216$ (個)

(4)　3の倍数となる5つの数の組は，(1，2，3，4，5)，(0，1，2，4，5)

(1，2，3，4，5)の5つの数の並び方は　${}_5P_5$

(0，1，2，4，5)の5つの数の並び方は，万の位は0を除くから，$4\times {}_4P_4$

よって　${}_5P_5+4\times {}_4P_4=120+96=216$ (個)

$\boxed{4}$

解答　(1)　1440通り　　(2)　3600通り　　(3)　2880通り　　(4)　720通り

(5)　288通り　　(6)　1440通り　　(7)　2880通り

解説

(1)　両端の2ヵ所に，男子4人のうち2人が並ぶ方法は　${}_4P_2$ 通り。

そのおのおのに対して，残りの5人の並び方は　${}_5P_5$ 通り。

よって，求める並び方の総数は　${}_4P_2\times {}_5P_5=4\cdot 3\times 5!=12\times 120=1440$ (通り)

(2)　両端の少なくとも1人が女子である場合は，全体から両端が男子である場合を除いたものである。

男女7人の並び方は　${}_7P_7$ 通り。

両端が男子である並び方は，(1)から，1440通り。

よって，求める並び方の総数は　${}_7P_7-1440=5040-1440=3600$ (通り)

(3)　両端の一方が男子，もう一方が女子である場合は，全体から，両端が男子である場合と両端が女子である場合を除いたものである。

男女7人の並び方，両端が男子である並び方は，(1)，(2)から　それぞれ　5040通り，1440通り。

両端が女子である場合，両端の2か所に，女子3人のうち2人が並ぶ方法は　${}_3P_2$ 通り。

そのおのおのに対して，残りの5人の並び方は　${}_5P_5$ 通り。

よって，両端が女子である並び方は，${}_3P_2\times {}_5P_5=3\cdot 2\times 5!=6\times 120=720$ (通り)

したがって　求める並び方の総数は

$$5040-1440-({}_3P_2\times {}_5P_5)=5040-1440-720=2880\ (\text{通り})$$

別解　両端の一方に男子が並ぶ方法は4通り。

もう一端に女子が並ぶ方法は3通り。

男女を入れ替えて，両端が男女の並び方は　$4\cdot 3\cdot 2$ 通り。

そのおのおのに対して，残りの5人の並び方は　${}_5P_5$ 通り。

よって，求める並び方の総数は　$4\cdot 3\cdot 2\times {}_5P_5=4\cdot 3\cdot 2\times 5!=24\times 120=2880$ (通り)

(4)　女子3人を1組と考え，この1組と男子4人の並び方は　${}_5P_5$ 通り。

そのおのおのに対して，女子3人の並び方は　${}_3P_3$ 通り。

よって，求める並び方の総数は　${}_5P_5\times {}_3P_3=5!\times 3!=120\times 6=720$ (通り)

(5)　(男子4人)(女子3人)と(女子3人)(男子4人)の2通りの並び方があるから，

$$2\times {}_3P_3\times {}_4P_4=2\times 3!\times 4!=2\times 6\times 24=288\ (\text{通り})$$

(6)　まず男子4人を並べて，その間と両端の5ヵ所に女子3人を並べればよい。

5ヵ所に，女子 3人を並べる並び方は　${}_5P_3$ 通り。

男子4人を並べる並び方は　${}_4P_4$ 通り。

よって，求める並び方の総数は　${}_5P_3\times {}_4P_4=5\cdot 4\cdot 3\times 4!=60\times 24=1440$ (通り)

(7)　男子4人を並べて，その間と両端の5ヵ所に，女子2人1組と1人を並べればよい。

5ヵ所に，女子1組と1人を並べる並び方は　${}_5P_2$ 通り。

男子4人の並び方は　${}_4P_4$ 通り。

女子3人のうちで1人の選び方は3通り。残り2人1組の並び方は　${}_2P_2$ 通り。

よって，求める並び方の総数は

$${}_5P_2\times {}_4P_4\times 3\times {}_2P_2=5\cdot 4\times 4!\times 3\times 2!=20\times 24\times 3\times 2=2880\ (\text{通り})$$

$\boxed{5}$

解答　(1)　120通り　　(2)　60種類　　(3)　90通り

解説

(1)　6個の宝石を机上で円形に並べる方法は

$$\frac{{}_6P_6}{6}=(6-1)!=5!=120\ (\text{通り})$$

(2)　首飾りは，裏返すと同じになることから

$$\frac{(6-1)!}{2}=60\ (\text{種類})$$

(3)　異なる6個から4個取る順列 ${}_6P_4$ には，円順列としては同じものが4個ずつあるから　　$\dfrac{{}_6P_4}{4}=\dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4}=90$ (通り)

$\boxed{6}$

解答　(1)　48通り　　(2)　24通り　　(3)　48通り

解説

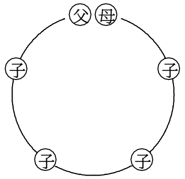
(1)　両親を１人とみなして固定し，残りの子供４人が円形のテーブルに着席する方法は

$4!$ 通り

そのおのおのに対して，両親の並び方は

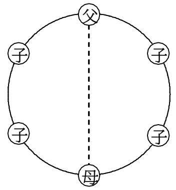
2 通り

ゆえに　$4!\times 2=48$ (通り)



(2)　父親を固定すると，母親の席はその向かいであるから１通りに決まる。

よって，求める方法の数は子供４人が１列に並ぶ方法の数と同じで　$4!=24$ (通り)



(3)　両親の間に着席する子供を１人選ぶ方法は

4 通り

そのおのおのに対して，両親の並び方は

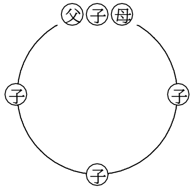
2 通り

この両親と間の子供１人の計３人を１人とみなして固定し，残りの子供３人が円形のテーブルに着席する方法は

$3!$ 通り

ゆえに，求める方法の数は

$4\times 2\times 3!=48$ (通り)



7

解答　(1)　500 個　(2)　624 個　(3)　300 個　(4)　57 個

解説

(1)　千の位の数字は 1，2，3，4 のどれかで　4 通り

百，十，一の位の数字は，それぞれ 0，1，2，3，4 の　5 通り

よって，4 桁の自然数の個数は　$4\times 5^3=500$ (個)

(2)　(1) と同様に考えて，3 桁の自然数の個数は　$4\times 5^2=100$ (個)

2 桁の自然数の個数は　$4\times 5=20$ (個)

また，1 桁の自然数は 1，2，3，4 の　4 個

よって，4 桁以下の自然数の個数は　$4+20+100+500=624$ (個)

別解　0，1，2，3，4 の 5 種類の数字から 4 個取ってできる重複順列の個数は

$5^4=625$ (個)

このうち，　1234 を 4 桁の数 1234，　0123 を 3 桁の数 123，

0012 を 2 桁の数 12，　0001 を 1 桁の数 1

のようにみなすと，0000 だけが自然数でない。

よって，求める個数は　$625-1=624$ (個)

(3)　一の位の数字は 0，2，4 のどれかで　3 通り

千の位の数字は 1，2，3，4 のどれかで　4 通り

百，十の位の数字は，それぞれ 0，1，2，3，4 の　5 通り

よって，4 桁の偶数の個数は　$3\times 4\times 5^2=300$ (個)

(4)　213 より小さい自然数は次の場合に分けられる。

[1]　1 桁または 2 桁の場合

(2) から　$4+20=24$ (個)

[2]　3 桁の場合

百の位は 1 か 2 である。

百の位が 1 である 3 桁の自然数の個数は　$5^2=25$ (個)

百の位が 2 である 3 桁の自然数のうち，213 より小さいものは

200，201，202，203，204，210，211，212　の 8 個。

よって　$25+8=33$ (個)

[1]，[2] から，求める自然数の個数は　$24+33=57$ (個)

8

解答　(1)　62 通り　(2)　31 通り　(3)　65 通り

解説

(1)　6 枚のカードを，A，B 2 つの組のどちらかに入れる方法は　$2^6=64$ (通り)

このうち，A，B の一方だけに入れる方法は　2 通り

ゆえに，A，B 2 組に分ける方法は　$64-2=62$ (通り)

(2)　(1) で A，B の区別をなくして　$62\div 2=31$ (通り)

(3)　カード 1，カード 2 が入る箱を，それぞれ A，B とし，残りの箱を C とする。

A，B，C の 3 個の箱のどれかにカード 3，4，5，6 を入れる方法は　3^4 通り

このうち，C には 1 枚も入れない方法は　2^4 通り

したがって　$3^4-2^4=81-16=65$ (通り)

9

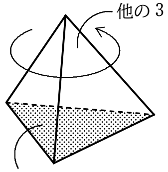
解答　(1)　2 通り　(2)　順に 3 通り，15 通り

解説

(1)　4 色のうちのある 1 色を塗った面の位置を固定すると，残りの 3 面を他の 3 色で塗る方法は

$(3-1)!=2$ (通り)

よって　2 通り。



(2)　[1]　3 色すべてを使う場合

4 面あるから，どれか 1 色で 2 面を塗ることになる。

その色の選び方は　3 通り

その 2 面を固定して，その選んだ色で塗り，残りの 2 面を他の 2 色で塗る方法は 2 通りあるが，回転させると一致するから，1 通りである。

よって，塗り方の総数は　$3\times 1=3$ (通り)

次に，3 色のうち使わない色がある場合を考える。

[2]　2 色で塗る場合，その色の選び方は　3 通り

そのおのおのについて

(i)　1 色を 2 面，もう 1 色を残りの 2 面に塗る場合，その塗り方は　1 通り

(ii)　1 色を 3 面，もう 1 色を残りの 1 面に塗る場合，その塗り方は　2 通り

したがって，この場合の塗り方の総数は　$3\times(1+2)=9$ (通り)

[3]　1 色で塗る場合，その色の選び方は　3 通り

よって，使わない色があってもよい場合の塗り方は，[1]，[2]，[3] により，全部で

$3+9+3=15$ (通り)

1

解答　(1)　1440 通り　(2)　3600 通り　(3)　720 通り　(4)　1440 通り

(5)　960 通り

解説

(1)　i と m をまとめた 1 つと，残り 5 文字の，6 個の順列で　${}_6P_6$ 通り。

そのおのおのに対して，i と m の並び方は　2 通り。

よって，積の法則により　${}_6P_6\times{}_2P_2=6!\times 2=1440$ (通り)

(2)　(7 文字すべての順列) − (1) が求める並べ方であるから

${}_7P_7-1440=7!-1440=5040-1440=3600$ 通り

(3)　i と m と p をまとめた 1 つと，残り 4 文字の，5 個の順列で　${}_5P_5$ 通り。

そのおのおのに対して，i と m と p の並び方は　${}_3P_3$ 通り。

よって，積の法則により　${}_5P_5\times{}_3P_3=5!\times 3!=720$ (通り)

(4)　i，m，p 以外の 4 文字の間とその両端の 5 か所から 3 か所を選んで，i，m，p の 3 文字を並べる並べ方は　${}_5P_3$

i，m，p 以外の 4 文字の並べ方は　${}_4P_4$ 通り。

よって，積の法則により　${}_5P_3\times{}_4P_4={}_5P_3\times 4!=60\times 24=1440$ (通り)

(5)　i と m の間の 2 文字は，i，m 以外の 5 文字から 2 つ選んで並べる並べ方で ${}_5P_2$ 通り。

i と m を入れ替えて　${}_5P_2\times 2$ 通り。

また，i□□m の 4 文字を 1 文字とみて，残り 3 文字と合わせた，4 個の順列は ${}_4P_4$ 通り。

よって　${}_5P_2\times 2\times{}_4P_4={}_5P_2\times 2\times 4!=20\times 2\times 24=960$ (通り)

2

解答　(1)　60 番目　(2)　bdcea

解説

(1)　cbeda より前に並んでいる順列のうち

a□□□□ の形のものは　$4!=24$ (個)

b□□□□ の形のものは　24 個

ca□□□ の形のものは　$3!=6$ (個)

cba□□ の形のものは　$2!=2$ (個)

cbd□□ の形のものは　2 個

cbd□□ の形の次に，cbead，cbeda の 2 個がある。

よって　$24\times 2+6+2\times 2+2=60$ (番目)

(2)　a□□□□ の形のものは　$4!=24$ (個)

ba□□□ の形のものは　$3!=6$ (個)

bc□□□ の形のものは　6 個

bda□□ の形のものは　$2!=2$ (個)

以上の合計は　$24+6\times 2+2=38$ (個)

38 番目は bdaec であるから，39 番目は　bdcae

したがって，40 番目は　bdcea

別解　次のように計算することもできる。

(1)　c は a，b，c，d，e の 3 番目であるから，$\boxed{\text{a または b}}$□□□□ の形のものは

$2\times 4!$ 個

b は a，b，d，e の 2 番目であるから，c$\boxed{\text{a}}$□□□ の形のものは　$3!$ 個

e は a，d，e の 3 番目であるから，cb$\boxed{\text{a または d}}$□□ の形のものは　$2\times 2!$ 個

cbe□□ の形のものは，ad，da の並びを考えて　　2 個

したがって，cbeda は　　$2\times4!+3!+2\times2!+2=60$ (番目)

(2)　40 番目の列を $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$ とする。

ここで　　$40=4!\times1+3!\times2+2!\times1+1!\times1+1$

$4!\times1$ から，$\boxed{1}$ に入るのは，a，b，c，d，e の $1+1=2$ 番目の　b

$3!\times2$ から，$\boxed{2}$ に入るのは，a，c，d，e　の $2+1=3$ 番目の　d

$2!\times1$ から，$\boxed{3}$ に入るのは，a，c，e　　の $1+1=2$ 番目の　c

$1!\times1+1$ より，$\boxed{4}$ には a，e の 2 番目の e，$\boxed{5}$ には a が入るから，40 番目は

bdcea

$\boxed{3}$

解答　(ア)　1152　　(イ)　144

解説

男子 4 人の並び方は　　4! 通り　　　　女子 4 人の並び方は　　4! 通り

左端に男子が並ぶ場合と女子が並ぶ場合を考えて　　$4!\times4!\times2={}^{ア}1152$ (通り)

男子 4 人が円形に並ぶ並び方は　　$(4-1)!$ 通り

円形に並んだ男子 4 人の間に女子 4 人が並ぶ方法は　　4! 通り

よって　　$(4-1)!\times4!={}^{イ}144$ (通り)

$\boxed{4}$

解答　(1)　126 通り　　(2)　36 通り　　(3)　972 通り

解説

(1)　空室ができてもよいとすると，A，B 2 部屋に 7 人を分ける方法は

$2^7=128$ (通り)

どの部屋も 1 人以上になる分け方は，この 128 通りのうち A，B のどちらかが空室になる場合を除いて　　$128-2=126$ (通り)

(2)　空室ができてもよいとすると，A，B，C 3 部屋に 4 人を分ける方法は

$3^4=81$ (通り)

このうち，空室が 2 部屋できる場合は，空室でない残りの 1 部屋を選ぶと考えて

3 通り

空室が 1 部屋できる場合は，空室の選び方が 3 通りあり，そのおのおのについて，残りの 2 部屋に 4 人が入る方法が 2^4-2 通りずつあるから　　$3\times(2^4-2)=42$ (通り)

よって，求める場合の数は　　$81-(3+42)=36$ (通り)

(3)　まず，大人 4 人を，どの部屋も大人が 1 人以上になるように分ける方法は，(2) から

36 通り

そのおのおのについて，子ども 3 人を A，B，C の 3 部屋に分ける方法は

$3^3=27$ (通り)

よって，どの部屋も大人が 1 人以上になる分け方は　　$36\times27=972$ (通り)

$\boxed{1}$

解答　(1)　5040　　(2)　720　　(3)　720　　(4)　3840　　(5)　648

解説

(1)　$7!=5040$ (通り)

(2)　3 個の赤色のボール 1 組と残りの 4 個の並べ方は　　5! 通り

赤色のボール 3 個の並べ方は　　3! 通り

よって，求める並べ方は　　$5!\times3!=720$ (通り)

(3)　2 の数字が書かれたボール 3 個を両端に並べる並べ方は　　${}_3P_2$ 通り

残りの 5 個の並べ方は　　5! 通り

ゆえに，求める並べ方は　　${}_3P_2\times5!=720$ (通り)

(4)　両端のボールの色が同じになるのは，次の場合がある。

[1]　両端のボールの色が赤色のとき

両端の並べ方は　　${}_3P_2$ 通り　　　　残りの 5 個の並べ方は　　5! 通り

よって　　${}_3P_2\times5!=720$ (通り)

[2]　両端のボールの色が青色のとき

両端の並べ方は　　${}_2P_2$ 通り　　　　残りの 5 個の並べ方は　　5! 通り

よって　　${}_2P_2\times5!=240$ (通り)

[3]　両端のボールの色が黒色のとき　　[2] と同様にして　　240 通り

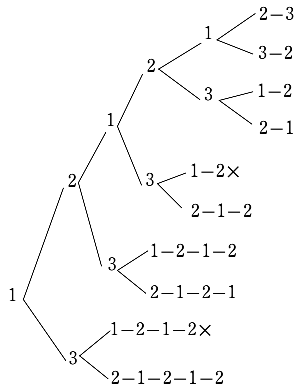
[1]，[2]，[3] から，両端のボールの色が同じになるような並べ方は

$720+240+240=1200$ (通り)

したがって，求める並べ方の総数は　　$5040-1200=3840$ (通り)

(5)　[1]　左端が 1 のとき

隣り合う数字がすべてが異なる並べ方は右の図のようになる。



よって，8 通りの並べ方がある。

数字が 1 のボールの色の決め方は　3! 通り

数字が 2 のボールの色の決め方は　3! 通り

数字が 3 のボールの色の決め方は　1 通り

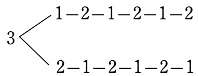
ゆえに　　$8\times3!\times3!\times1=288$ (通り)

[2]　左端が 2 のとき

[1] と同様にして　　288 通り

[3]　左端が 3 のとき

隣り合う数字がすべてが異なる並べ方は次の図のようになる。



よって，2 通りの並べ方がある。

それぞれの数字の色の決め方は，[1] と同様に，$3!\times3!\times1$ 通りであるから

$2\times3!\times3!\times1=72$ (通り)

[1]，[2]，[3] から，求める総数は　　$288+288+72=648$ (通り)

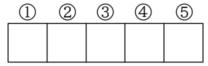
$\boxed{2}$

解答　(アイ)　48　　(ウエ)　12　　(オ)　2　　(カ)　4　　(キ)　4　　(クケ)　12

(コサ)　16　　(シス)　26

解説

図のように正方形をそれぞれ ① ～ ⑤ とおく。



(1)　① の塗り方は　　3 通り

② の塗り方は，① の色以外の　　2 通り

同様に，③，④，⑤ の塗り方も，それぞれ

その左にある正方形の色以外の 2 通りである。

したがって，求める塗り方は　　$3\times2\times2\times2\times2={}^{アイ}48$ (通り)

(2)　左右対称に塗るとき，④ は ② と，⑤ は ① と同じ色であるから，①，②，③ の塗り方のみ考えればよい。

③ の塗り方は　　3 通り

② の塗り方は，③ の色以外の　　2 通り

① の塗り方は，② の色以外の　　2 通り

したがって，求める塗り方は　　$3\times2\times2={}^{ウエ}12$ (通り)

(3)　青と緑の 2 色だけで塗り分けるのは，青と緑が交互に塗られるときであり，① の色を定めれば ② ～ ⑤ の色は自動的に定まる。

① の色は青か緑であるから，求める塗り方は　　${}^{オ}2$ 通り

(4)　赤に塗られる正方形が 3 枚であるのは，①，③，⑤ が赤のときである。

このとき，②，④ の塗り方は，それぞれ青と緑の 2 通りである。

よって，求める塗り方は　　$2\times2={}^{カ}4$ (通り)

(5)　[1]　① が赤に塗られるとき，残りの正方形は青と緑が交互に塗られる。

その塗り方は，(3) と同様に考えて　　2 通り

⑤ が赤に塗られるときも同様であるから，どちらかの端の 1 枚が赤に塗られるのは

$2\times2={}^{キ}4$ (通り)

[2]　② が赤のとき，① の塗り方は青と緑の　　2 通り

③，④，⑤ は青と緑を交互に塗るから，(3) と同様に考えて　　2 通り

よって，② が赤となる塗り方は　　$2\times2=4$ (通り)

同様にして，④ が赤となる塗り方は　　4 通り

③ が赤のとき，①，② は青と緑を交互に塗るから，(3) と同様に考えて　　2 通り

④，⑤も青と緑を交互に塗るから　　2 通り

よって，③ が赤となる塗り方は　　$2\times2=4$ (通り)

したがって，端以外の 1 枚が赤に塗られるのは　　$4\times3={}^{クケ}12$ (通り)

[1]，[2] から，赤に塗られる正方形が 1 枚であるのは　　$4+12={}^{コサ}16$ (通り)

(6)　4 つ以上の正方形を同じ色に塗ることはできないから，赤に塗られる正方形の枚数は 0 枚，1 枚，2 枚，3 枚のいずれかである。

したがって，(1)，(3)，(4)，(5) より，赤に塗られる正方形が 2 枚であるのは

$48-(2+4+16)={}^{シス}26$ (通り)

$\boxed{3}$

解答　(1)　$3\cdot4^{n-1}-3^n$ (個)　　(2)　21200

解説

(1)　0 を使わない場合も含めて考えると，n 桁の整数は，先頭の数字の選び方が 0 以外の 3 通り，それ以外の位の数字の選び方が 4 通りであるから　　$3\cdot4^{n-1}$ 個

そのうち，0 を使わない整数は，それぞれの位の数字を 1，2，3 のいずれかから選ぶから　　3^n 個

よって，求める個数は　　$3\cdot4^{n-1}-3^n$ (個)

(2)　$n=5$ のとき，(1) から $3\cdot4^4-3^5=525$ (個) の整数ができる。

よって，ちょうど真中の位置にくる整数は $\frac{525+1}{2}=263$ (番目) の数である。

[1]　1△△△△の形の整数の個数

0 を使わない場合も含めて考えると，千，百，十，一 の位の数字の選び方はそれぞれ 4 通りあるから　$4^4=256$ (個)

そのうち，0 を使わない整数は，千，百，十，一の位の数字を 1，2，3 のいずれかから選ぶから　$3^4=81$ (個)

よって，1△△△△の形の整数の個数は　$256-81=175$ (個)

[2]　20△△△の形の整数の個数

百，十，一の位の数字の選び方はそれぞれ 4 通りあるから　$4^3=64$ (個)

[3]　210△△ の形の整数の個数

[2] と同様に考えて　$4^2=16$ (個)

[4]　211△△の形の整数の個数

[1] と同様に考えて　$4^2-3^2=7$ (個)

[1] ～ [4] の整数の個数の合計は　$175+64+16+7=262$ (個)

よって，212△△の形の整数の初めの数 21200 がちょうど真中の位置にくる整数である。

1

解答　(1)　20　(2)　21　(3)　10　(4)　1　(5)　78　(6)　$\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

解説

(1)　${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$　(2)　${}_7C_2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$　(3)　${}_{10}C_1=10$

(4)　${}_8C_8=1$　(5)　${}_{13}C_{11}={}_{13}C_{13-11}={}_{13}C_2=\frac{13\cdot12}{2\cdot1}=78$

(6)　${}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_{(n+2)-n}={}_{n+2}C_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2\cdot1}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

2

解答　(1)　56 通り　(2)　120 通り

解説

(1)　${}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ (通り)　(2)　${}_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$ (通り)

3

解答　(1)　210 通り　(2)　90 通り　(3)　195 通り　(4)　28 通り　(5)　56 通り

解説

(1)　男女合わせた 10 人から 4 人を選ぶから　${}_{10}C_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$ (通り)

(2)　男子 6 人から委員 2 人を選ぶ方法は　${}_6C_2$ 通り

女子 4 人から委員 2 人を選ぶ方法は　${}_4C_2$ 通り

よって，求める委員の選び方は　${}_6C_2\times{}_4C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\times\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=90$ (通り)

(3)　4 人とも男子を選ぶ方法は　${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$ (通り)

よって，求める委員の選び方は　$210-15=195$ (通り)

(4)　a，b の 2 人を先に選んでおき，残りの 8 人から 2 人を選ぶと考えて

$${}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28 \text{ (通り)}$$

(5)　a を先に選んでおき，a と b を除いた 8 人から 3 人を選ぶと考えて

$${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56 \text{ (通り)}$$

4

解答　(1)　35 本　(2)　120 個　(3)　60 個

解説

(1)　異なる 10 個の点から 2 個の点を選ぶ方法は　${}_{10}C_2$ 通り

この中には正十角形 の 10 本の辺がある。

ゆえに　${}_{10}C_2-10=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}-10=35$ (本)

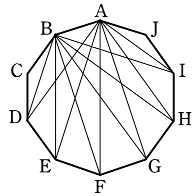
(2)　3 個の頂点で三角形が 1 個できるから，求める個数は

$${}_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120 \text{ (個)}$$

(3)　正十角形の 10 個の頂点を図のように定める。このとき，辺 AB だけを共有する三角形の第 3 の頂点の選び方は，A，B とその両隣の 2 点 C，J を除く D，E，F，G，H，I の 6 通り。

他の辺を共有する場合も同様であるから，求める個数は

$6\times10=60$ (個)



5

解答　(1)　27720 通り　(2)　369600 通り　(3)　15400 通り　(4)　1485 通り

解説

(1)　12 人から 5 人を選ぶ方法は　${}_{12}C_5$ 通り

そのどの場合に対しても，残りの 7 人から 4 人を選ぶ方法は　${}_7C_4$ 通り

残り 3 人を最後の 1 組とする。

よって，分け方の総数は　${}_{12}C_5\times{}_7C_4=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=27720$ (通り)

(2)　A 組の 3 人の選び方は　${}_{12}C_3$ 通り

B 組の 3 人の選び方は残りの 9 人から選ぶので　${}_9C_3$ 通り

C 組の 3 人の選び方は残りの 6 人から選ぶので　${}_6C_3$ 通り

A 組，B 組，C 組の人が決まれば，残りの D 組の 3 人は決まる。

よって，分け方の総数は

$${}_{12}C_3\times{}_9C_3\times{}_6C_3=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=369600 \text{ (通り)}$$

(3)　(2) で，A，B，C，D の区別をなくすと，4! 通りずつ同じ組分けができる。

よって，分け方の総数は　$\frac{369600}{4!}=\frac{369600}{24}=15400$ (通り)

(4)　A 組 2 人，B 組 2 人，C 組 8 人の 3 つの組に分けることを考え，A，B の区別をなくせばよい。

よって，分け方の総数は　$\frac{{}_{12}C_2\times{}_{10}C_2}{2!}=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}\times\frac{10\cdot9}{2\cdot1}\times\frac{1}{2\cdot1}=1485$ (通り)

6

解答　(1)　10080 通り　(2)　144 通り　(3)　420 通り

解説

(1)　O が 2 個，A が 2 個，Y，K，H，M が 1 個ずつあるから，この 8 文字の並べ方は

$$\frac{8!}{2!2!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot1}=10080 \text{ (通り)}$$

(2)　偶数番目の 4 か所には O，O，A，A が入るから，その並べ方は

$$\frac{4!}{2!2!} \text{ 通り}$$

奇数番目の 4 か所には Y，K，H，M が入るから，その並べ方は　4! 通り

よって　$\frac{4!}{2!2!}\times4!=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times4\cdot3\cdot2\cdot1=144$ (通り)

(3)　Y，K，H，M を同じ文字□と考えて，□ 4 個，O 2 個，A 2 個の順列を作り，□に左から Y，K，H，M を順に入れると，題意の順列ができる。

よって　$\frac{8!}{4!2!2!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot1\times2\cdot1}=420$ (通り)

7

解答　(1)　792 通り　(2)　350 通り　(3)　120 通り　(4)　582 通り

解説

(1)　右に１区画進むことを →，上に１区画進むことを↑で表すと，P から Q に行く最短経路の総数は，７個の → と５個の↑を１列に並べる順列の総数に等しい。

よって　$\dfrac{12!}{7!5!}=792$ (通り)

(2)　P から R まで行く最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}$ 通り

R から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り

よって，R を通る最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}\times\dfrac{7!}{4!3!}=350$ (通り)

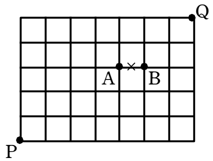
(3)　P から R まで行く最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}$ 通り

R から S まで行く最短経路は　$\dfrac{3!}{2!}$ 通り

S から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{4!}{3!}$ 通り

よって，R，S をともに通る最短経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}\times\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{3!}=120$ (通り)

(4)　×印がある区画の左端を A，右端を B とする。



P から A まで行く最短経路は　$\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り

B から Q まで行く最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

よって，×印の箇所を通る最短経路は

$$\frac{7!}{4!3!}\times\frac{4!}{2!2!}=210 \text{ (通り)}$$

したがって，×印の箇所を通らない最短経路は　$792-210=582$ (通り)

8

解答　(1)　66 通り　(2)　36 通り

解説

(1)　３種類の果物から重複を許して 10 個取る組合せの総数であるから

$${}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_{2}=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66 \text{ (通り)}$$

(2)　まず，３種類の果物を１個ずつ購入する。

残りは３種類の果物から重複を許して７個取る組合せの総数であるから

$${}_{3+7-1}C_{7}={}_{9}C_{7}={}_{9}C_{2}=\frac{9\cdot8}{2\cdot1}=36 \text{ (通り)}$$

別解　(1)　10 個の○と２つの仕切りの順列を作り，仕切りで分けられた３か所の○の個数を順に柿，りんご，みかんの個数にすると考えればよい。したがって，求める総数は，12 個の場所から，○を入れる 10 個の場所を選ぶ方法の個数に等しく

${}_{12}C_{10}={}_{12}C_{2}=66$ (通り)

1

解答　(1)　6　(2)　10　(3)　1　(4)　7　(5)　1　(6)　28　(7)　19600

(8)　$\dfrac{n(n+1)}{2}$

解説

(1)　${}_{4}C_{2}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$　(2)　${}_{5}C_{3}=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$　(3)　${}_{7}C_{7}=1$

(4)　${}_{7}C_{1}=7$　(5)　${}_{5}C_{0}=1$　(6)　${}_{8}C_{6}={}_{8}C_{8-6}={}_{8}C_{2}=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$

(7)　${}_{50}C_{47}={}_{50}C_{50-47}={}_{50}C_{3}=\dfrac{50\cdot49\cdot48}{3\cdot2\cdot1}=19600$

(8)　${}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_{n+1-(n-1)}={}_{n+1}C_{2}=\dfrac{(n+1)\cdot n}{2\cdot1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

2

解答　(1)　210 通り　(2)　66 通り

解説

(1)　${}_{10}C_{4}=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$ (通り)

(2)　12 チームから異なる２チームを選ぶ組合せの総数で

$${}_{12}C_{2}=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66 \text{ (通り)}$$

3

解答　(1)　1001 通り　(2)　420 通り　(3)　931 通り　(4)　916 通り

(5)　66 通り　(6)　220 通り

解説

(1)　男女合わせた 14 人から４人を選ぶから

$${}_{14}C_{4}=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=1001 \text{ (通り)}$$

(2)　男子８人から委員２人を選ぶ方法は　${}_{8}C_{2}$ 通り

女子６人から委員２人を選ぶ方法は　${}_{6}C_{2}$ 通り

よって，求める委員の選び方は　${}_{8}C_{2}\times{}_{6}C_{2}=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}\times\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=420$ (通り)

(3)　すべての選び方は，(1) から　1001 通り

このうち，４人とも男子を選ぶ方法は　${}_{8}C_{4}$ 通り

よって，女子から少なくとも１人選ぶ方法は

$$1001-{}_{8}C_{4}=1001-\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=1001-70=931 \text{ (通り)}$$

(4)　４人とも女子を選ぶ方法は　${}_{6}C_{4}$ 通り

よって，男子，女子から少なくとも１人ずつ選ぶ方法は

$$1001-({}_{8}C_{4}+{}_{6}C_{4})=1001-(70+{}_{6}C_{2})=1001-\left(70+\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\right)$$

$$=1001-(70+15)=916 \text{ (通り)}$$

(5)　A，B の２人を先に選んでおき，残りの 12 人から２人を選ぶと考えて

$${}_{12}C_{2}=\frac{12\cdot11}{2\cdot1}=66 \text{ (通り)}$$

(6)　A を先に選んでおき，A，B を除いた 12 人から残りの３人を選ぶと考えて

$${}_{12}C_{3}=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220 \text{ (通り)}$$

4

解答　(1)　14 本　(2)　(ア)　7 個　(イ)　7 個

解説

(1)　正七角形の２つの頂点を結んでできる線分の本数は　${}_{7}C_{2}=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$ (本)

対角線の本数は，これから辺の数を引いたものであるから　$21-7=14$ (本)

(2)　(ア)　正七角形と２辺を共有する三角形は　7 個

(イ)　７つの頂点から３点を選んで結ぶと三角形が１つできるから，三角形の総数は

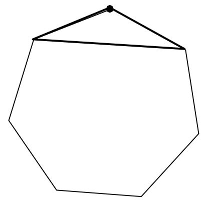
$${}_{7}C_{3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35 \text{ (個)}$$

また，これらの三角形のうち

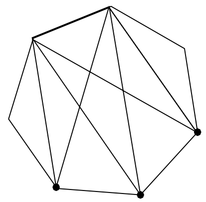
正七角形と１辺だけを共有するものは　7×3 個

正七角形と２辺を共有するものは，(ア) から　7 個

ゆえに，正七角形と辺を共有しない三角形は　$35-(7\times3+7)=7$ (個)



[２辺を共有]



[１辺を共有]

5

解答　(1)　792 通り　(2)　13860 通り　(3)　924 通り　(4)　462 通り

(5)　1485 通り　(6)　15400 通り

解説

(1)　12 人から７人を選ぶと，残りは５人の組に決まる。よって，求める分け方の総数は

$${}_{12}C_{7}={}_{12}C_{5}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792 \text{ (通り)}$$

(2)　12 人から６人を選ぶ方法は　${}_{12}C_{6}$ 通り

そのおのおのに対して，残りの６人から４人を選ぶ方法は　${}_{6}C_{4}$ 通り

残り２人を最後の１組とする。

よって，求める分け方の総数は

$${}_{12}C_{6}\times{}_{6}C_{4}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=924\times15=13860 \text{ (通り)}$$

別解　${}_{12}C_{2}\times{}_{10}C_{4}=66\times210=13860$ (通り)

(3)　12 人から６人を選んで A の部屋に入れると，残り６人は B の部屋に決まる。

よって，求める分け方の総数は　${}_{12}C_{6}=924$ (通り)

(4)　(3) において，A と B の区別をなくせばよいから　${}_{12}C_{6}\div2=462$ (通り)

(5)　12 人から８人を選ぶ方法は　${}_{12}C_{8}$ 通り

残りの４人から２人ずつの２組に分ける方法は，まず A 組に２人，B 組に２人となるように分け，A と B の区別をなくせばよいから　${}_{4}C_{2}\div2$ 通り

よって，求める分け方の総数は

$${}_{12}C_{8}\times{}_{4}C_{2}\div2={}_{12}C_{4}\times{}_{4}C_{2}\div2=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\frac{1}{2}=1485 \text{ (通り)}$$

(6)　12人を3人ずつA，B，C，Dの4組に分ける方法は　${}_{12}C_3\times{}_9C_3\times{}_6C_3$ 通り

ここで，A，B，C，Dの区別をなくすと，4! 通りずつ同じ分け方ができる。

よって，求める分け方の総数は

$${}_{12}C_3\times{}_9C_3\times{}_6C_3\div 4!=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{1}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=15400 \text{（通り）}$$

$\boxed{6}$

解答　(1)　3通り　　(2)　60通り　　(3)　240通り

解説

(1)　$\boxed{}\boxed{A}\boxed{K}\boxed{}\boxed{B}\boxed{}$ の3個の空欄にT1個，I2個を並べる順列であるから

$$\frac{3!}{2!}=3 \text{（通り）}$$

(2)　A，K，Bを同じ文字○と考えて，○3個，T1個，I2個の順列を作り，○に左からA，K，Bを順に入れると題意の順列ができる。

したがって　$\dfrac{6!}{3!2!}=60$（通り）

(3)　6個の中にIが2個あるから，すべての並べ方は $\dfrac{6!}{2!}$ 通り

A，Kが隣り合う並べ方はA，Kを1つの文字と考えて5文字を並べる並べ方は $\dfrac{5!}{2!}$

また，A，Kの並べ方が2通りあるから $\dfrac{5!}{2!}\times2$ 通り

よって，求める並べ方は $\dfrac{6!}{2!}-\dfrac{5!}{2!}\times2=240$（通り）

$\boxed{7}$

解答　(1)　462通り　　(2)　210通り　　(3)　72通り　　(4)　278通り
　　(5)　184通り　　(6)　362通り

解説

(1)　右に1区画進むことを→，下に1区画進むことを↓で表すと，PからQに行く最短経路の総数は，6個の→と5個の↓を1列に並べる順列の総数に等しい。

よって　$\dfrac{11!}{6!5!}=462$（通り）

(2)　PからRまで行く経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

RからQまで行く経路は　$\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り

よって，Rを通る経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{7!}{4!3!}=210$（通り）

(3)　PからRまで行く経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

RからSまで行く経路は　$\dfrac{3!}{2!}$ 通り

SからQまで行く経路は　$\dfrac{4!}{3!}$ 通り

よって，R，Sをともに通る経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{3!}=72$（通り）

(4)　PからSまで行く経路は　$\dfrac{7!}{3!4!}$ 通り

よって，Sを通る経路は　$\dfrac{7!}{3!4!}\times\dfrac{4!}{3!}=140$（通り）

これと(2)，(3)の結果から，RまたはSを通る経路は

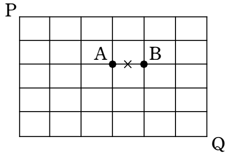
(Rを通る経路の数)+(Sを通る経路の数)−(R，Sをともに通る経路の数)

$=210+140-72=278$（通り）

(5)　R，Sをともに通らない経路の数は，(1)の経路の数から，(4)の経路の数を引いて

$462-278=184$（通り）

(6)　×印の区間の左端をA，右端をBとする。



PからAまで行く経路は　$\dfrac{5!}{3!2!}$ 通り

BからQまで行く経路は　$\dfrac{5!}{2!3!}$ 通り

よって，×印の箇所を通る経路は

$$\frac{5!}{3!2!}\times\frac{5!}{2!3!}=100 \text{（通り）}$$

したがって，×印を通らない経路は　$462-100=362$（通り）

$\boxed{8}$

解答　(1)　286通り　　(2)　84通り

解説

(1)　求める場合の数は，異なる4種類の果物から重複を許して10個取る組合せの数に等しいから　${}_{4+10-1}C_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=\dfrac{13\cdot12\cdot11}{3\cdot2\cdot1}=286$（通り）

別解　10個の○と3個の仕切り | の順列を作り，仕切りで分けられた4か所の○の個数を，左から順に柿，りんご，みかん，キウイの個数と考えればよい。

よって，求める場合の数は，10個の○と3個の | を1列に並べる順列の総数に等しいから　$\dfrac{13!}{10!3!}=\dfrac{13\cdot12\cdot11}{3\cdot2\cdot1}=286$（通り）

(2)　まず，4種類の果物を1個ずつ買う。

残り6個の買い方は，異なる4種類の果物から重複を許して6個取る組合せの数に等しいから　${}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84$（通り）

別解　まず，4種類の果物をを1個ずつ買う。

残り6個の買い方は，6個の○と3個の | を1列に並べる順列の総数に等しいから

$$\frac{9!}{6!3!}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=84 \text{（通り）}$$

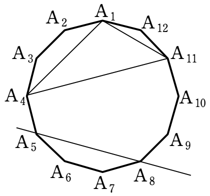
$\boxed{1}$

解答　(1)　(ア)　220　　(イ)　66　　(2)　(ウ)　39

解説

(1)　(ア)　正十二角形の12個の頂点は，どの3点も同じ直線上にないから，3点で1つの三角形が得られる。

ゆえに　${}_{12}C_3=220$（個）



(イ)　頂点はどの3点も同じ直線上にないから，2点で1本の直線が得られる。

ゆえに　${}_{12}C_2=66$（本）

(2)　(ウ)　10本の直線がどれも平行でないとすると，交点は　${}_{10}C_2$ 個

実際には，4本の直線が平行であるから，平行な4本の直線で交点が ${}_4C_2$ 個減る。

ゆえに　${}_{10}C_2-{}_4C_2=45-6=39$（個）

別解　(ウ)　平行な4直線以外の6本の直線は，どの2本も平行でなく，どの3本も同じ点で交わらないから，これら6本の直線の交点の個数は　${}_6C_2$ 個

また，平行な4直線のうちの1本とそれと平行でない6本の直線の交点は6個ある。

したがって，求める交点の総数は　${}_6C_2+6\times4=15+24=39$（個）

$\boxed{2}$

解答　80通り

解説

1，2，3，……，10の10個から3個の異なる数を選ぶ組合せは

$${}_{10}C_3 \text{ 通り}$$

また，3個の整数の積は　奇数，2×奇数，2^2 の倍数　のいずれかである。

[1]　積が奇数のとき

1，3，5，7，9から異なる3個を選ぶ場合で

$${}_5C_3 \text{ 通り}$$

[2]　積が2×奇数 のとき

2，6，10から1個，1，3，5，7，9から異なる2個を選ぶ場合で

$${}_3C_1\times{}_5C_2 \text{ 通り}$$

積が4の倍数になるのは[1]，[2]以外の場合であるから，その総数は

$$\begin{aligned}{}_{10}C_3-({}_5C_3+{}_3C_1\times{}_5C_2)&=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}-\left(\frac{5\cdot4}{2\cdot1}+3\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\right)\\&=120-(10+30)\\&=80 \text{（通り）}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

解答　71個

解説

1，2，3のいずれかを A，B，C で表す。ただし，A，B，C はすべて異なる数字とする。

次の[1]～[4]のいずれかの場合が考えられる。

[1]　($AAAA$)のタイプ。つまり，同じ数字を4つ含むとき。

4枚ある数字は3だけであるから　1個

[2]　($AAAB$)のタイプ。つまり，同じ数字を3つ含むとき。

3枚以上ある数字は2，3であるから，A の選び方は　2通り

A にどれを選んでも，B の選び方は　2 通り

そのおのおのについて，並べ方は　$\dfrac{4!}{3!}=4$（通り）

よって，このタイプの整数は　$2\times2\times4=16$（個）

[3]（$AABB$）のタイプ。つまり，同じ数字２つを２組含むとき。

1，2，3 すべて２枚以上あるから，A，B の選び方は　${}_3C_2$ 通り

そのおのおのについて，並べ方は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$（通り）

よって，このタイプの整数は　${}_3C_2\times6=18$（個）

[4]（$AABC$）のタイプ。つまり，同じ数字２つを１組含むとき。

A の選び方は３通りで，B，C は A を選べば決まる。

そのおのおのについて，並べ方は　$\dfrac{4!}{2!}=12$（通り）

よって，このタイプの整数は　$3\times12=36$（個）

以上から　$1+16+18+36=71$（個）

4

解答　(1)　455　(2)　9　(3)　81　(4)　30　(5)　180

解説

(1)　${}_{15}C_3=455$（通り）

(2)　３つの数字 a，b，c を選ぶことを abc と表す。

各色について，連続する３つの数字の選び方は 123，234，345 の３通りずつある。

よって，求める選び方は　$3\times3=9$（通り）

(3)　123 を選ぶ場合は，1，2，3 のそれぞれの色について，３通りずつの選び方があるから　$3^3=27$（通り）

234，345 を選ぶ場合も同様に 27 通りずつある。

よって，求める選び方は　$27\times3=81$（通り）

(4)　各色について，同じ色の３枚の選び方は ${}_5C_3=10$（通り）ずつある。

よって，求める選び方は　$10\times3=30$（通り）

(5)　２枚だけが同じ数字になる２つの数字の選び方は

$${}_5C_1\times{}_4C_1=20\text{（通り）}$$

同じ数字の２枚の色は　${}_3C_2=3$（通り）

残り１枚の数字の色は　${}_3C_1=3$（通り）

よって，求める選び方は　$20\times3\times3=180$（通り）

5

解答　(1)　15 個　(2)　10 個

解説

(1)　この方程式の負でない整数解は，４個の ○と２つの仕切りの順列を作り，仕切りで分けられた３か所の ○の個数を，左から順に x，y，z とすると得られる。

よって，整数解の個数は，４個の同じものと２個の同じものの順列の個数に等しいから　$\dfrac{6!}{4!2!}=15$（個）

別解　例えば，$x=2$，$y=1$，$z=1$ は，x を２個，y を１個，z を１個取ることと考えると，方程式 $x+y+z=4$ を満たす負でない整数解の個数は，３種類の文字 x，y，z から重複を許して４個取る組合せの数に等しい。

よって　${}_{3-1+4}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$（個）

(2)　$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおくと　$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$

また　$x=X+1$，$y=Y+1$，$z=Z+1$

これらを $x+y+z=6$ に代入すると　$X+Y+Z=3$

この方程式を満たす負でない整数解の個数は，(1)と同様に考えて，３個の ○と２つの仕切りの順列の数に等しい。よって　$\dfrac{5!}{3!2!}=10$（個）

別解　$X+Y+Z=3$ を満たす負でない整数解の個数は，３種類の文字 X，Y，Z から重複を許して３個取る組合せの数に等しい。

よって　${}_{3-1+3}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$（個）

6

解答　(1)　15 通り　(2)　126 通り

解説

(1)　1～6 の６個の目から異なる４個を選び，大きいものから順に x_1，x_2，x_3，x_4 とすればよい。

よって，求める場合の数は　${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$（通り）

(2)　1～6 の６個の目から重複を許して４個を選び，大きいものから順に x_1，x_2，x_3，x_4 とすればよい。

よって，求める場合の数は　${}_{6+4-1}C_4={}_9C_4=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$（通り）

別解　４個の○と５つの仕切りの順列を作り，仕切りで分けられてできる６か所を左から順に 6，5，4，3，2，1 の目の場所とする。このとき，各場所に入った○にそれぞれの目をあて，大きいものから x_1，x_2，x_3，x_4 とすればよい。

よって，求める場合の数は　${}_9C_4=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$（通り）

1

解答　略

解説

1，2，……，n の n 個から r 個取る組合せを，次の３つに分ける。

[1]　数 1，2 をともに含む組合せ

数 1，2 を除いた 3，4，……，n の $n-2$ 個から $r-2$ 個を選び，それに数 1，2 を入れておく。その方法の数は　${}_{n-2}C_{r-2}$

[2]　数 1 か数 2 の一方だけを含む組合せ

数 1，2 を除いた 3，4，……，n の $n-2$ 個から $r-1$ 個を選び，それに数 1 か数 2 の一方を入れておく。その方法の数は，数 1 と数 2 のどちらを入れる場合も ${}_{n-2}C_{r-1}$ であるから　$2{}_{n-2}C_{r-1}$

[3]　数 1，2 をともに含まない組合せ

数 1，2 を除いた 3，4，……，n の $n-2$ 個から r 個を取り出す方法の数は

${}_{n-2}C_r$

[1]，[2]，[3] は同時には起こらないから，和の法則により

$${}_nC_r={}_{n-2}C_{r-2}+2{}_{n-2}C_{r-1}+{}_{n-2}C_r$$

が成り立つ。

別解

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\frac{(n-2)!}{(r-2)!\{(n-2)-(r-2)\}!}\\&\quad+2\cdot\frac{(n-2)!}{(r-1)!\{(n-2)-(r-1)\}!}+\frac{(n-2)!}{r!\{(n-2)-r\}!}\\&=\frac{(n-2)!}{(r-2)!(n-r)!}+\frac{2\cdot(n-2)!}{(r-1)!(n-r-1)!}+\frac{(n-2)!}{r!(n-r-2)!}\\&=\frac{(n-2)!}{r!(n-r)!}\{r(r-1)+2r(n-r)+(n-r)(n-r-1)\}\\&=\frac{(n-2)!}{r!(n-r)!}(n^2-n)=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r=(\text{左辺})\end{aligned}$$

2

解答　(1)　15120 通り　(2)　60 通り　(3)　2520 通り　(4)　336 通り

解説

(1)　10 個の文字のうち A が５個，G が２個あるから

$$\frac{10!}{5!2!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot1}=15120\text{（通り）}$$

(2)「NAGARA」と G，A，W，A の計５個の並べ方を考える。

同じ A が２個あるから

$$\frac{5!}{2!}=60\text{（通り）}$$

(3)　A が５個，G が２個，O が３個あると考え，３個の O に左から N，R，W を入れると考え

$$\frac{10!}{5!2!3!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1}=2520\text{（通り）}$$

(4)　A が隣り合わない並べ方は，N，G，R，G，W を先に並べ，両端と間の計６か所から A の入る５か所を決めると考え

$$\frac{5!}{2!}\times{}_6C_5=5\cdot4\cdot3\cdot6=360\text{（通り）}$$

このうち G が隣り合うものを考える。

「GG」と N，R，W の４つの順列を考えると　$4!=24$（通り）

両端と間の５か所すべてにＡが入るので，Ａは隣り合わないが，Ｇが隣り合うものは24通り

よって，ＡもＧも隣り合わないものは　$360-24=336$（通り）

$\boxed{3}$

解答　444個

解説

[1]　７桁の数が１△△△△△△の形である場合

「01」が現れる数の総数は，「01」，0，2，3，4を並べる順列の総数であるから

$${}_5P_5=120 \text{（個）}$$

[2]　７桁の数が２△△△△△△の形である場合

「01」が現れる数の総数は，次の和である。

（ア）「01」，「01」，3，4を並べる順列の総数

（イ）「01」，0，1，3，4を，「01」が２組にならないように並べる順列の総数

（ア）のとき　$\dfrac{4!}{2!1!1!}=12$（個）

（イ）のとき　「01」，0，3，4を並べる方法は　$4!=24$（通り）

そのおのおのについて，１を０の右隣以外に並べる方法は４通りある。

よって　$24\times4=96$（個）

したがって　$12+96=108$（個）

[3]　７桁の数が３△△△△△△の形である場合

[2]と同様にして，「01」が現れる数の総数は　108 個

[4]　７桁の数が４△△△△△△の形である場合

[2]と同様にして，「01」が現れる数の総数は　108 個

以上から，求める７桁の数の総数は　$120+108+108+108=444$（個）

$\boxed{4}$

解答　$a_{10}=89$

解説

碁石を10個並べるとき，条件を満たす並べ方のためには，黒石が５個以上必要である。

[1]　黒石５個，白石５個のとき

黒石の間と末尾の５か所に白石５個を並べるとよい。

よって　${}_5C_5$ 通り　　●∧●∧●∧●∧●∧

[2]　黒石６個，白石４個のとき

黒石の間と末尾の６か所から４か所を選んで白石を並べるとよい。

よって　${}_6C_4$ 通り　　●∧●∧●∧●∧●∧●∧

[3]　黒石７個，白石３個のとき

黒石の間と末尾の７か所から３か所を選んで白石を並べるとよい。

よって　${}_7C_3$ 通り　　●∧●∧●∧●∧●∧●∧●∧

以下，「[6]　黒石10個，白石０個のとき」まで同様に考えられるから

$$a_{10}={}_5C_5+{}_6C_4+{}_7C_3+{}_8C_2+{}_9C_1+{}_{10}C_0=1+15+35+28+9+1=89$$

別解　碁石を $(n+2)$ 個並べるとき，条件を満たす並べ方は次の２つの場合がある。

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

[1]　先頭が黒石，２番目が黒石　（●●……………）

[2]　先頭が黒石，２番目が白石　（●○●…………）

[1]の場合，２番目以降の並べ方は a_{n+1} 通りある。

[2]の場合，３番目以降の並べ方は a_n 通りある。

よって，次の漸化式が成り立つ。　$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

これを用いると

$a_3=2+1=3$，$a_4=3+2=5$，$a_5=5+3=8$，$a_6=8+5=13$，

$a_7=13+8=21$，$a_8=21+13=34$，$a_9=34+21=55$，$a_{10}=55+34=89$

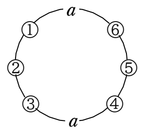
$\boxed{5}$

解答　(1)　３通り　　(2)　54通り

解説

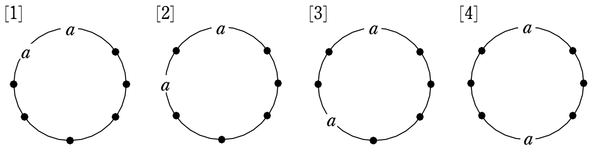
(1)　a ２個を対称な位置に固定して考える。

円の中心に関して対称であるから，右の図の①，②，③には b １個，c ２個を並べる。④，⑤，⑥には残りの玉を対称になるように並べる。



よって，求める円順列は　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

(2)　回転して同じにならないような，a ２個の並べ方は次の４通りがある。



[1]～[3]の各場合について，b ２個，c ４個の並べ方は　$\dfrac{6!}{2!4!}=15$（通り）

[4]の場合，b ２個，c ４個の並べ方は，円の中心に関して対称なものを除くと，回転によって一致するものが２個ずつある。

よって　$3+\dfrac{15-3}{2}=9$（通り）

したがって，円順列の総数は　$15\times3+9=54$（通り）

別解　a １個を固定して，a １個，b ２個，c ４個の順列を考えると

$$\frac{7!}{2!4!}=105 \text{（通り）}$$

このうち，円の中心に関して対称なものを除いて，回転によって一致するものが２個ずつある。

よって，円順列の総数は　$3+\dfrac{105-3}{2}=54$（通り）

1

解答 (1) $\frac{1}{4}$　(2) $\frac{1}{13}$

解説

起こりうる場合は全部で52通りあり，どの場合も同様に確からしい。

(1)　スペードの札は13枚ある。

よって，求める確率は　$\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$

(2)　5の札は4枚ある。

よって，求める確率は　$\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

2

解答 (1) $\frac{5}{36}$　(2) $\frac{1}{9}$

解説

2個のさいころの目の出方は，$6\times6=36$ (通り) ある。

(1)　目の和が8となるのは，(2，6)，(3，5)，(4，4)，(5，3)，(6，2) の5通り。

よって，求める確率は　$\frac{5}{36}$

(2)　目の積が6となるのは，(1，6)，(6，1)，(2，3)，(3，2) の4通り。

よって，求める確率は　$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

3

解答 (1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{1}{5}$　(3) $\frac{1}{10}$

解説

6人全員の並び方は　6! 通り

(1)　特定の2人A，Bをひとまとめにして考えると，このひとまとめの2人と残り4人の並び方は　5! 通り

それぞれの並び方に対して，ひとまとめにしたA，Bの並び方は　2通り

よって，求める確率は　$\frac{5!\times2}{6!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times2}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{1}{3}$

(2)　両端の2か所に，男子3人のうちの2人が並ぶ方法は　${}_3P_2$ 通り

残り4人の並び方は　4! 通り

よって，求める確率は　$\frac{{}_3P_2\times4!}{6!}=\frac{3\cdot2\times4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{1}{5}$

(3)　男女が交互に並ぶのは，次の[1]，[2]の2つの場合である。

[1]　男女男女男女と並ぶ場合

男子3人の並び方，女子3人の並び方は，それぞれ　3! 通り

よって，この並び方は　$3!\times3!$ (通り)

[2]　女男女男女男と並ぶ場合

[1]と同様に　$3!\times3!$ (通り)

[1]，[2]から，求める確率は　$\frac{3!\times3!\times2}{6!}=\frac{3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1\times2}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{1}{10}$

4

解答 (1) $\frac{4}{27}$　(2) $\frac{2}{9}$　(3) $\frac{13}{27}$

解説

4人の手の出し方の総数は　3^4 通り

(1)　1人だけが勝つ場合，勝者の決まり方は　4通り

そのおのおのに対して，勝ち方がグー，チョキ，パーの3通りある。

よって，求める確率は　$\frac{4\times3}{3^4}=\frac{4}{27}$

(2)　2人が勝つ場合，勝者の決まり方は　${}_4C_2$ 通り

そのおのおのに対して，勝ち方がグー，チョキ，パーの3通りある。

よって，求める確率は　$\frac{{}_4C_2\times3}{3^4}=\frac{6\times3}{3^4}=\frac{2}{9}$

(3)　あいこになるのは，次の[1]，[2]のどちらかの場合である。

[1]　4人とも同じ手を出す場合　3通り

[2]　出る手が3種類の場合

手の組合せは{グー，グー，チョキ，パー}，{グー，チョキ，チョキ，パー}，{グー，チョキ，パー，パー}の3つの場合がある。

出す人を区別すると，どの場合も $\frac{4!}{2!}=12$ (通り) ずつあるから

$12\times3=36$ (通り)

[1]，[2]から，あいこになる確率は　$\frac{3+36}{3^4}=\frac{13}{27}$

5

解答 (1) $\frac{1}{6}$　(2) $\frac{25}{42}$

解説

9個の玉から3個を取り出す組合せは　${}_9C_3$ 通り

(1)　3個とも同じ色であるという事象は

A：3個とも赤玉　　B：3個とも白玉

という2つの事象の和事象 $A\cup B$ で表される。

$$P(A)=\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{2}{42},\quad P(B)=\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{5}{42}$$

A，B は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{42}+\frac{5}{42}=\frac{1}{6}$$

(2)　白玉が2個以上であるという事象は

A：赤玉1個，白玉2個　　B：白玉3個

という2つの事象の和事象 $A\cup B$ で表される。

$$P(A)=\frac{{}_4C_1\times{}_5C_2}{{}_9C_3}=\frac{20}{42},\quad P(B)=\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{5}{42}$$

A，B は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{20}{42}+\frac{5}{42}=\frac{25}{42}$$

6

解答 $\frac{1}{3}$

解説

目の出方は，全部で　$6^2=36$ (通り)

出る目の最小値が3となる事象を A

出る目の最大値が4となる事象を B とする。

2個のさいころの出る目の数を，x，y とする。

事象 A が起こるのは，$(x,\ y)$ が

(3，3)，(3，4)，(3，5)，(3，6)，(4，3)，(5，3)，(6，3)

のときで，その場合の数は　7通り

事象 B が起こるのは，$(x,\ y)$ が

(1，4)，(2，4)，(3，4)，(4，4)，(4，1)，(4，2)，(4，3)

のときで，その場合の数は　7通り

事象 $A\cap B$ が起こるのは，$(x,\ y)$ が

(3，4)，(4，3)

のときで，その場合の数は　2通り

ゆえに，求める確率 $P(A\cup B)$ は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{7}{36}+\frac{7}{36}-\frac{2}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

7

解答 $\frac{86}{91}$

解説

男子6人，女子8人から3人を選ぶ方法は　${}_{14}C_3$ 通り

「少なくとも女子が1人選ばれる」という事象は，「3人とも男子が選ばれる」という事象 A の余事象である。ここで　$P(A)=\frac{{}_6C_3}{{}_{14}C_3}=\frac{5}{91}$

よって，求める確率は　$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{5}{91}=\frac{86}{91}$

8

解答 (1) $\frac{11}{36}$　(2) $\frac{23}{24}$

解説

A，B，Cが1回射撃を行う試行は，それぞれ独立である。

1回の射撃で，Aが的をはずす確率は　$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Bが的をはずす確率は　$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Cが的をはずす確率は　$1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

(1)　1人だけが的に当てるのは，次の[1]～[3]のいずれかの場合で，これらの事象は互いに排反である。

[1]　Aが的に当て，BとCが的をはずす。

[2]　Bが的に当て，AとCが的をはずす。

[3]　Cが的に当て，AとBが的をはずす。

[1]の確率は　$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$

[2]の確率は　$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{6}{72}$

[3]の確率は　$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{15}{72}$

よって，求める確率は　$\frac{1}{72}+\frac{6}{72}+\frac{15}{72}=\frac{22}{72}=\frac{11}{36}$

(2)「少なくとも１人が的に当てる」という事象は，「３人とも的をはずす」という事象の余事象である。

A，B，Cが３人とも的をはずす確率は　$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

よって，求める確率は　$1-\frac{1}{24}=\frac{23}{24}$

9

解答　(1) $\frac{1}{8}$　(2) $\frac{37}{216}$

解説

(1) 出る目の最大値が３以下となるのは，それぞれの目が３以下のときである。

その場合の数は　3^3 通り

よって，求める確率は　$\frac{3^3}{6^3}=\frac{1}{8}$

(2) さいころの目の，「最大値が４以下である」という事象を A，「最大値が３以下である」という事象を B，「最大値が４である」という事象を C とすると，$A=B\cup C$ で，B，C は互いに排反であるから　$P(A)=P(B)+P(C)$

よって，求める確率は　$P(C)=P(A)-P(B)=\frac{4^3}{6^3}-\frac{3^3}{6^3}=\frac{37}{216}$

1

解答　(1) $\frac{1}{4}$　(2) $\frac{3}{5}$　(3) $\frac{3}{20}$

解説

この試行の全事象は　{1，2，3，……，20}

よって，起こりうる場合は，全部で20通りあり，どの場合も同様に確からしい。

(1) ５以下の札が出るという事象は{1，2，3，4，5}で，その要素は　５個

よって，求める確率は　$\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

(2) ７以下または16以上の札が出るという事象は

{1，2，3，4，5，6，7，16，17，18，19，20}

で，その要素は　12個

よって，求める確率は　$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

(3) 偶数かつ３の倍数の札が出るという事象は{6，12，18}で，その要素は　３個

よって，求める確率は　$\frac{3}{20}$

2

解答　(1) $\frac{1}{12}$　(2) $\frac{1}{4}$　(3) $\frac{7}{18}$

解説

さいころの目の出方の総数は　$6\times6=36$（通り）

(1) 目の和が４になる場合は　(1，3)，(2，2)，(3，1)の　３通り

よって，求める確率は　$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(2) 目の積が奇数になる場合は

(1，1)，(1，3)，(1，5)，(3，1)，(3，3)，(3，5)，(5，1)，(5，3)，(5，5)

の９通り

よって，求める確率は　$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

(3) 目の和が奇数かつ素数になる場合は

(1，2)，(1，4)，(1，6)，(2，1)，(2，3)，(2，5)，(3，2)，(3，4)，
(4，1)，(4，3)，(5，2)，(5，6)，(6，1)，(6，5)

の14通り

よって，求める確率は　$\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

3

解答　(1) $\frac{1}{15}$　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $\frac{1}{2}$

解説

異なる６文字を１列に並べる方法は　${}_6P_6$ 通り

(1) 両端の母音の並べ方は，母音がU，Aの２つであるから　${}_2P_2$ 通り

そのおのおのに対して他の４文字の並べ方は　${}_4P_4$ 通り

したがって，両端が母音である並べ方は　${}_2P_2\times{}_4P_4$ 通り

よって，求める確率は　$\frac{{}_2P_2\times{}_4P_4}{{}_6P_6}=\frac{1}{15}$

(2) SとYが隣り合う並べ方は，SとYを１つとみなした５文字の順列において，S，Yの並べ方が ${}_2P_2$ 通りずつあるから　${}_5P_5\times{}_2P_2$ 通り

よって，求める確率は　$\frac{{}_5P_5\times{}_2P_2}{{}_6P_6}=\frac{1}{3}$

(3) SがYよりも左側にある並べ方は，SとYを同じ文字○とみなした６文字の順列で，左側の○をS，右側の○をYにするとできるから　$\frac{6!}{2!}$ 通り

よって，求める確率は　$\frac{6!}{2!}\div{}_6P_6=\frac{1}{2}$

4

解答　(1) $\frac{5}{81}$　(2) $\frac{10}{81}$　(3) $\frac{17}{27}$

解説

５人の手の出し方は，１人につきグー，チョキ，パーの３通りの出し方があるから，全部で　3^5 通り

(1) １人だけが勝つ場合，勝者の決まり方は　５通り

そのおのおのについて，勝ち方がグー，チョキ，パーの　３通り

よって，求める確率は　$\frac{5\times3}{3^5}=\frac{5}{81}$

(2) ２人が勝つ場合，勝者の決まり方は　${}_5C_2$ 通り

そのおのおのについて，勝ち方がグー，チョキ，パーの　３通り

よって，求める確率は　$\frac{{}_5C_2\times3}{3^5}=\frac{10}{81}$

(3) あいこになる場合は，次の[1]，[2]のどちらかである。

[1] 手の出し方が１種類のとき　３通り

[2] 手の出し方が３種類のとき

(a) {グー，グー，グー，チョキ，パー}
(b) {グー，チョキ，チョキ，チョキ，パー}
(c) {グー，チョキ，パー，パー，パー}
(d) {グー，グー，チョキ，チョキ，パー}
(e) {グー，グー，チョキ，パー，パー}
(f) {グー，チョキ，チョキ，パー，パー}

の６つの場合がある。

出す人を区別すると，(a)～(c)は，それぞれ　$\frac{5!}{3!}$ 通り

(d)～(f)は，それぞれ　$\frac{5!}{2!2!}$ 通り

であるから，全部で　$\frac{5!}{3!}\times3+\frac{5!}{2!2!}\times3=150$（通り）

よって，求める確率は　$\frac{3+150}{3^5}=\frac{153}{3^5}=\frac{17}{27}$

5

解答　(1) $\frac{8}{99}$　(2) $\frac{28}{33}$

解説

白玉７個と赤玉５個の計12個の玉から，４個同時に取り出す方法は　${}_{12}C_4$ 通り

(1) ４個とも同じ色の玉が出るという事象は，２つの事象

A：４個とも白玉が出る　　B：４個とも赤玉が出る

の和事象 $A\cup B$ であり，この２つの事象は互いに排反である。

$$P(A)=\frac{{}_7\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4}=\frac{7}{99},\quad P(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4}=\frac{1}{99}$$

よって，求める確率は　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{99}+\frac{1}{99}=\frac{8}{99}$

(2)　２個以上白玉が出るという事象は，３つの事象

C：白玉２個，赤玉２個が出る　　D：白玉３個，赤玉１個が出る

E：４個とも白玉が出る

の和事象 $C\cup D\cup E$ であり，この３つの事象は互いに排反である。

$$P(C)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_4}=\frac{42}{99},\quad P(D)=\frac{{}_7\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_4}=\frac{35}{99}$$

(1) から　$P(E)=\frac{7}{99}$

よって，求める確率は

$$P(C\cup D\cup E)=P(C)+P(D)+P(E)$$
$$=\frac{42}{99}+\frac{35}{99}+\frac{7}{99}=\frac{84}{99}=\frac{28}{33}$$

6

解答　$\frac{3}{10}$

解説

起こりうる場合の総数は　100 通り

取り出したカードの番号が

5 で割り切れるという事象を A，　8 で割り切れるという事象を B

とすると　$A=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$，$n(A)=20$

$B=\{8\cdot1,\ 8\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 8\cdot12\}$，$n(B)=12$

$A\cap B=\{40,\ 80\}$，$n(A\cap B)=2$

よって，求める確率は　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{20}{100}+\frac{12}{100}-\frac{2}{100}=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$$

7

解答　(1)　$\frac{8}{9}$　　(2)　$\frac{5}{9}$

解説

目の出方の総数は　$6^2=36$（通り）

(1)「少なくとも１個は４以下の目が出る」という事象は，「２個とも５以上の目が出る」という事象の余事象である。

２個とも５以上の目が出る確率は　$\frac{2\times2}{36}=\frac{1}{9}$

よって，求める確率は　$1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

(2)　目の積が３の倍数になるのは，少なくとも１個は３の倍数の目が出る場合である。

「少なくとも１個は３の倍数の目が出る」という事象は，「２個とも３の倍数の目が出ない」という事象の余事象である。

２個とも３の倍数の目が出ない確率は　$\frac{4\times4}{36}=\frac{4}{9}$

よって，求める確率は　$1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

8

解答　(1)　$\frac{1}{6}$　　(2)　$\frac{5}{6}$

解説

(1)　さいころを投げる２回の試行は独立である。

１回目に２以下の目が出る確率は　$\frac{2}{6}$

２回目に４以上の目が出る確率は　$\frac{3}{6}$

よって，求める確率は　$\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$

(2)　A，B，C の３人が的に向かってボールを投げる試行は独立である。

また，少なくとも１人が的に当てるという事象は，３人とも的に当たらないという事象の余事象である。

ゆえに，３人とも的にボールが当たらない確率は

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

よって，少なくとも１人が的に当てる確率は　$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

9

解答　(1)　$\frac{7}{24}$　　(2)　$\frac{19}{216}$

解説

３個のさいころを同時に投げる方法は，全部で　6^3 通り

(1)　出る目の最大値が４以下になるのは，３個の目がすべて４以下のときであるから，その場合の数は　4^3 通り

このうち，最大値が２以上になるのは，３個の目がすべて１のとき以外であるから

4^3-1（通り）

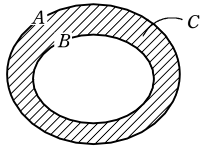
よって，求める確率は　$\frac{4^3-1}{6^3}=\frac{63}{216}=\frac{7}{24}$

(2)　出る目の最大値が３以下であるという事象を A，最大値が２以下であるという事象を B，最大値が３であるという事象を C とすると

$A=B\cup C$

B と C は互いに排反であるから

$P(A)=P(B)+P(C)$



よって，求める確率は

$$P(C)=P(A)-P(B)=\frac{3^3}{6^3}-\frac{2^3}{6^3}=\frac{27}{216}-\frac{8}{216}=\frac{19}{216}$$

1

解答　(1)　$\frac{1}{10}$　　(2)　$\frac{2}{3}$　　(3)　$\frac{1}{10}$

解説

２個の A を A_1，A_2 とし，これらを母音とみなす。

W，A_1，S，E，D，A_2 の６文字を１列に並べる方法は　${}_6\mathrm{P}_6$ 通り

(1)　母音と子音が交互に並ぶのは，次の [1]，[2] の場合がある。

[1]　母子母子母子　　　[2]　子母子母子母

[1] の場合

母音の並べ方は　${}_3\mathrm{P}_3$ 通り

そのおのおのについて，子音の並べ方は　${}_3\mathrm{P}_3$ 通り

よって　${}_3\mathrm{P}_3\times{}_3\mathrm{P}_3$ 通り

[2] の場合

[1] と同様に考えて　${}_3\mathrm{P}_3\times{}_3\mathrm{P}_3$ 通り

よって，求める確率は　$\frac{2\times{}_3\mathrm{P}_3\times{}_3\mathrm{P}_3}{{}_6\mathrm{P}_6}=\frac{2\times3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4}=\frac{1}{10}$

(2)　まず，A_1 と A_2 が隣り合う場合について考える。

A_1 と A_2 の２文字を１文字とみなし，この１文字と残り４文字の並べ方は

${}_5\mathrm{P}_5$ 通り

次に，A_1 と A_2 の並べ方が　２通り

よって，A_1 と A_2 が隣り合う場合は　${}_5\mathrm{P}_5\times2$ 通り

ゆえに，この２文字が隣り合っていない確率は

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_6-{}_5\mathrm{P}_5\times2}{{}_6\mathrm{P}_6}=\frac{6!-2\cdot5!}{6!}=\frac{6-2}{6}=\frac{2}{3}$$

別解　A_1 と A_2 が隣り合っていない場合を考える。

W，S，E，D の４文字を１列に並べる方法は　${}_4\mathrm{P}_4$ 通り

この４文字の間または両端の５か所に A_1 と A_2 を入れる方法は　${}_5\mathrm{P}_2$ 通り

したがって，A_1 と A_2 が隣り合っていない場合は　${}_4\mathrm{P}_4\times{}_5\mathrm{P}_2$ 通り

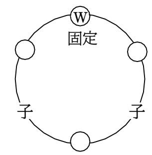
よって，求める確率は　$\frac{{}_4\mathrm{P}_4\times{}_5\mathrm{P}_2}{{}_6\mathrm{P}_6}=\frac{5\cdot4}{6\cdot5}=\frac{2}{3}$

(3)　W，A_1，S，E，D，A_2 を円形に並べる方法は，全部で　$(6-1)!=5!$（通り）

W を固定すると，残りの子音の並べ方は　${}_2\mathrm{P}_2$ 通り

子音と子音の間の３か所に母音３個を並べる方法は

${}_3\mathrm{P}_3$ 通り



よって，母音と子音が交互に並ぶ方法は

${}_2\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_3$ 通り

したがって，求める確率は　$\frac{{}_2\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_3}{5!}=\frac{2\cdot1}{5\cdot4}=\frac{1}{10}$

2

解答　５個

解説

白玉が n 個 $(2\leqq n\leqq7)$ 入っているとする。

８個の玉から２個同時に取り出す方法は　${}_8\mathrm{C}_2$ 通り

このうち，赤玉が出ないのは，白玉を２個取り出す場合であるから，その総数は

${}_n\mathrm{C}_2$ 通り

よって，条件から　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\dfrac{5}{14}$　すなわち　$\dfrac{n(n-1)}{8\cdot 7}=\dfrac{5}{14}$

整理して　$n^2-n-20=0$　ゆえに　$(n+4)(n-5)=0$

$2\leqq n\leqq 7$ であるから　$n=5$

よって，白玉は５個入っている。

3

解答　(1) $\dfrac{3}{55}$　(2) $\dfrac{27}{55}$　(3) $\dfrac{6}{55}$

解説

12 枚の札から３枚の札を取り出す方法は　${}_{12}\mathrm{C}_3$ 通り

(1)　赤，青，黄のどの色が同じになるかが　${}_3\mathrm{C}_1$ 通り

その色について，どの番号を取り出すかが　${}_4\mathrm{C}_3$ 通り

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\dfrac{3\times 4}{220}=\dfrac{3}{55}$

(2)　どの３つの番号を取り出すかが　${}_4\mathrm{C}_3$ 通り

そのおのおのに対して，色の選び方は 3^3 通りずつあるから，番号が全部異なる場合は

$${}_4\mathrm{C}_3\times 3^3 \text{ 通り}$$

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3\times 3^3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\dfrac{4\times 27}{220}=\dfrac{27}{55}$

(3)　どの３つの番号を取り出すかが ${}_4\mathrm{C}_3$ 通りあり，取り出した３つの番号の色の選び方が ${}_3\mathrm{P}_3$ 通りあるから，色も番号も全部異なる場合は　${}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{P}_3$ 通り

ゆえに，求める確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{P}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3}=\dfrac{4\times 6}{220}=\dfrac{6}{55}$

4

解答　(1) $\dfrac{1}{13}$　(2) $\dfrac{7}{39}$

解説

(1)　２枚の札が同じ数字であるという事象を A とする。

27 枚の札の中から２枚の札を取り出す方法は

$${}_{27}\mathrm{C}_2=351 \text{ (通り)}$$

取り出した２枚が同じ数字であるのは，同じ数字の３枚から２枚を取り出すときであるから，その場合の数は

$$9\times{}_3\mathrm{C}_2=27 \text{ (通り)}$$

ゆえに，求める確率 $P(A)$ は　$P(A)=\dfrac{27}{351}=\dfrac{1}{13}$

(2)　２枚の札の数字の和が５以下であるという事象を B とする。

２枚の数字の和が５以下である数の組は，次の６通りである。

{1，1}，{1，2}，{1，3}，{1，4}，{2，2}，{2，3}

ゆえに，その場合の数は

$$2\times{}_3\mathrm{C}_2+4\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=42 \text{ (通り)}$$

また，２枚が同じ数字で，かつ２枚の数字の和が５以下であるような数の組は {1，1}，{2，2} だけであるから

$$n(A\cap B)=2\times{}_3\mathrm{C}_2=6 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率 $P(A\cup B)$ は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{27}{351}+\frac{42}{351}-\frac{6}{351}=\frac{63}{351}=\frac{7}{39}$$

5

解答　$\dfrac{7}{27}$

解説

黒玉の個数が合わせて２個になるのは，次の [1]～[3] のいずれかの場合で，これらの事象は互いに排反である。

[1]　A から黒玉２個，B から白玉３個を取り出す。

[2]　A から黒玉１個と白玉１個，B から黒玉１個と白玉２個を取り出す。

[3]　A から白玉２個，B から黒玉２個と白玉１個を取り出す。

[1] の確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{108}$

[2] の確率は　$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{18}{108}$

[3] の確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{9}{108}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{108}+\dfrac{18}{108}+\dfrac{9}{108}=\dfrac{28}{108}=\dfrac{7}{27}$

6

解答　$\dfrac{1}{4}$

解説

１回目の試行と２回目の試行は独立である。

点 P はさいころの目が 2，4，6 のとき，それぞれ２つ先の点，１つ先の点，もとの点に移る。また，さいころの目が 1，3，5 のとき，１つ先の点に移る。

よって，１回の移動で，もとの点に移る確率は　$\dfrac{1}{6}$

１つ先の点に移る確率は　$\dfrac{4}{6}$

２つ先の点に移る確率は　$\dfrac{1}{6}$

２回の移動後に P が B にあるのは，

A → A → B，　A → B → B，　A → C → B

と移動する場合であるから，求める確率は

$$\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

1

解答　(1) $\dfrac{1}{22}$　(2) $\dfrac{5}{11}$　(3) $\dfrac{1}{11}$

解説

(1)　３人の女子をひとまとめにする。

３人の女子の並び方は　3! 通り

10 人の男子とひとまとめにした女子の並び方は　$(11-1)!$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{3!\times(11-1)!}{(13-1)!}=\dfrac{1}{22}$

(2)　女子が隣り合わない事象を考えると，３人の女子が男子の間に並べばよい。

男子の並び方は　$(10-1)!$ 通り

男子の間 10 ヶ所に３人の女子が並ぶのは　${}_{10}\mathrm{P}_3$ 通り

よって，求める確率は　$1-\dfrac{(10-1)!\times{}_{10}\mathrm{P}_3}{(13-1)!}=1-\dfrac{6}{11}=\dfrac{5}{11}$

(3)　３人の女子の間に男子を並べると考える。

女子の並び方は　$(3-1)!$ 通り

男子が５人以上並ばないのは，女子の間３ヶ所の人数が４人，４人，２人 または ４人，３人，３人となる場合である。

それぞれについて，組分けの仕方が３通りあり，男子の並び方は 10! 通りある。

よって，求める確率は　$\dfrac{(3-1)!\times 3\times 10!\times 2}{(13-1)!}=\dfrac{1}{11}$

2

解答　(1) 順に $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$　(2) 順に $\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{5}{9}$　(3) $\dfrac{5}{12}$　(4) $\dfrac{133}{216}$

解説

(1)　２の倍数になる確率は　$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

３の倍数になる確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

(2)　積が２の倍数にならないのは，２個とも２の倍数が出ない場合であるから，その確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

よって，積が２の倍数になる確率は　$1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

積が３の倍数になる確率も，同様にして　$1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

(3)　目の積が６の倍数となるのは，２個のサイコロのうち，少なくとも１個は２の倍数の目が出る，かつ少なくとも１個は３の倍数の目が出るときである。

よって，目の積が６の倍数である事象の余事象は，「２個とも２の倍数以外の目が出る，または２個とも３の倍数以外の目が出る」という事象である。

２個とも２の倍数以外の目が出る確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

２個とも３の倍数以外の目が出る確率は　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

２個とも２の倍数，３の倍数以外の目が出る確率は　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

よって，求める確率は　$1-\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{9}\right)=1-\dfrac{7}{12}=\dfrac{5}{12}$

(4)　(3) と同様に考えて　$1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}=1-\frac{83}{216}=\frac{133}{216}$

3

解答　$\frac{1}{320}$

解説

各玉に新しい番号をつける順列の数は 9! 通り。

例えば，旧番号の 1，2，3，4，5 だけが新番号の ①，②，③，④，⑤ に一致する場合を考えると　6 に ⑦ がつくとき，7 に ⑥，⑧，⑨ のいずれかがつき，7 につく数字によって，8，9 につく数字はただ 1 通りに定まる。

よって，6 に ⑦ がつく場合は 3 通り。

同様に，6 に ⑧，⑨ がつく場合も各 3 通り。

ゆえに，合計 $3\times3=9$ (通り)

番号が一致する 5 つの玉の選び方は，${}_9C_5$ 通りであるから，${}_9C_5\times9$ 通りが旧番号と新番号が一致する場合の数となる。

ゆえに，求める確率は　$\frac{{}_9C_5\times9}{9!}=\frac{1}{320}$

4

解答　(1)　$\frac{1}{5525}$　(2)　$\frac{24}{5525}$

解説

52 枚のカードを 1 列に並べる並べ方は　52! 通り

(1)　番号 7 のカードをひとまとまりとして考える。

まとめた 1 組と残り 48 枚のカードの並べ方は　49! 通り

番号 7 のカードの並べ方が　4! 通り

よって，求める確率は　$\frac{49!\times4!}{52!}=\frac{1}{5525}$

(2)　番号 7 以外の 48 枚の並べ方は　48! 通り

番号 7 を 2 枚ずつ 2 組に分ける方法は　$\frac{{}_4C_2\cdot{}_2C_2}{2!}=3$ (通り)

その 2 組を 7 以外の 48 枚の並びの両端または間の 49 か所のうち 2 箇所に入れる方法は

${}_{49}P_2=49\times48$ (通り)

番号 7 のカードの並べかえが　$2\times2=4$ (通り)

よって，求める確率は　$\frac{48!\times3\times49\times48\times4}{52!}=\frac{24}{5525}$

5

解答　$\frac{3^n-3\cdot2^n+6}{3^n}$

解説

n 人の手の出し方は　3^n 通り

勝負がつくのは，n 人全員がある 2 種類の手を出し，全員が同じ手ではないときであるから，その場合の数は　(2^n-2) 通り

その 2 種類の手の選び方は　${}_3C_2$ 通り

ゆえに，全部で　${}_3C_2(2^n-2)$ 通り

よって，あいこになる場合の数は

$$3^n-{}_3C_2(2^n-2)=3^n-3\cdot2^n+6 \text{ (通り)}$$

したがって，求める確率は　$\frac{3^n-3\cdot2^n+6}{3^n}$

6

解答　(1)　$\frac{671}{1296}$　(2)　$\frac{151}{648}$

解説

(1)　出る目の最小値が 1 であるとは，少なくとも 1 回は 1 の目が出るということである。これは 4 回とも 1 の目が出ないという事象の余事象であるから，求める確率は

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}$$

(2)　4 回とも 1 の目が出ないという事象を A，4 回とも 6 の目が出ないという事象を B とする。出る目の最小値が 1 で，かつ最大値が 6 という事象は $\overline{A}\cap\overline{B}$ で表されるから，求める確率は

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cap\overline{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}\\&=1-\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^4+\left(\frac{5}{6}\right)^4-\left(\frac{4}{6}\right)^4\right\}\\&=1-\frac{625+625-256}{1296}=\frac{151}{648}\end{aligned}$$

1

解答　(1)　$\frac{80}{243}$　(2)　$\frac{13}{729}$　(3)　$\frac{80}{729}$

解説

1 回の試行で白玉が出る確率は　$\frac{1}{3}$

(1)　${}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^{6-2}={}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$

(2)　白玉が 5 回以上出るのは

A：白玉が 5 回出る　B：白玉が 6 回出る

の 2 つの場合があり，これらは互いに排反である。

事象 A，B の起こる確率は，それぞれ

$$P(A)={}_6C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(1-\frac{1}{3}\right)^{6-5}={}_6C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{12}{3^6},$$

$$P(B)=\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{1}{3^6}$$

よって，求める確率は　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{12}{3^6}+\frac{1}{3^6}=\frac{13}{729}$

(3)　6 回目に 2 度目の白玉が出るのは，5 回目までに白玉が 1 回だけ出て，6 回目に白玉が出る場合である。

よって，求める確率は　${}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-1}\times\frac{1}{3}={}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}=\frac{80}{729}$

2

解答　(1)　$\frac{35}{128}$　(2)　$\frac{21}{128}$　(3)　0

解説

硬貨を 1 回投げるとき，表が出る確率は　$\frac{1}{2}$

7 回のうち，表が r 回出るとすると，裏は $(7-r)$ 回出るから，点 P の座標 p は

$$p=4r+(-3)(7-r)=7r-21$$

となる。

(1)　$p=0$ のとき　$7r-21=0$　これを解くと　$r=3$

よって，7 回のうち表がちょうど 3 回出ればよい。

したがって，求める確率は

$${}_7C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-3}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$$

(2)　$p=14$ のとき　$7r-21=14$　これを解くと　$r=5$

よって，7 回のうち表がちょうど 5 回出ればよい。

したがって，求める確率は

$${}_7C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-5}={}_7C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-5}=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{21}{128}$$

(3)　$p=27$ のとき　$7r-21=27$　これを解くと　$r=\frac{48}{7}$

r は整数であるから，これは不適。

よって，$p=27$ となることはないから，求める確率は　0

3

解答　$\frac{64}{81}$

解説

A が勝者になるのは，次の [1] ～ [3] の場合がある。

[1]　3 連勝の場合

その確率は　$_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

[2]　3 勝 1 敗の場合

3 ゲームまでに A が 2 回，B が 1 回勝ち，4 ゲーム目を A が勝てばよいから，その確率は　$_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

[3]　3 勝 2 敗の場合

4 ゲームまでに A が 2 回，B が 2 回勝ち，5 ゲーム目を A が勝てばよいから，その確率は　$_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$

これらは互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}=\frac{64}{81}$$

4

解答　(1)　$\frac{2}{3}$　　(2)　$\frac{8}{17}$

解説

(1)　女子は 54 人いて，そのうちの合格者は 36 人である。

よって，求める確率は　$\frac{36}{54}=\frac{2}{3}$

(2)　合格者は $30+36=66$ (人) いるから，不合格者は $100-66=34$ (人) いる。

そのうち，男子の不合格者は　$46-30=16$ (人)

よって，求める確率は　$\frac{16}{34}=\frac{8}{17}$

別解　(1)　選んだ人が女子であるという事象を A，選んだ人が合格しているという事象を B とすると，条件から　$n(A)=54$，$n(A\cap B)=36$

求める確率は $P_A(B)$ であるから　$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{36}{54}=\frac{2}{3}$

(2) も同様にして求められる。

5

解答　(1)　$\frac{13}{250}$　　(2)　$\frac{6}{13}$

解説

取り出した 1 個が，機械 A の製品であるという事象を A，不良品であるという事象を E とすると

$$P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\ P(\overline{A})=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5},\ P_A(E)=\frac{4}{100},\ P_{\overline{A}}(E)=\frac{7}{100}$$

(1)　求める確率は $P(E)$ であるから

$$P(E)=P(A\cap E)+P(\overline{A}\cap E)=P(A)P_A(E)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(E)$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{100}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{100}=\frac{26}{500}=\frac{13}{250}$$

(2)　求める確率は $P_E(A)$ であるから

$$P_E(A)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P(A)P_A(E)}{P(E)}=\frac{3}{125}\div\frac{13}{250}=\frac{6}{13}$$

6

解答　(ア)　$\frac{3}{8}$　　(イ)　115

解説

3 枚中表が 2 枚出る確率は　$_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)={}^{ア}\frac{3}{8}$

表の出る枚数は 3 枚，2 枚，1 枚，0 枚の場合がある。

[1]　表が 3 枚のとき，確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$　　また，金額は　200 円

[2]　表が 2 枚のとき，確率は $\frac{3}{8}$ で，金額は　80 円

[3]　表が 1 枚のとき，確率は　$_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$　　また，金額は　100 円

[4]　表が 0 枚のとき，確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$　　また，金額は　180 円

[1]～[4] から，もらえる金額の期待値は

$$200\times\frac{1}{8}+80\times\frac{3}{8}+100\times\frac{3}{8}+180\times\frac{1}{8}={}^{イ}115\ (円)$$

7

解答　(1)　$\frac{5}{324}$　　(2)　$n=16$　　(3)　$n=17，18$

解説

$p_n={}_nC_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$ である。

(1)　$p_4={}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{4-3}=\frac{5}{324}$

(2)　$p_n=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot5^{n-3}}{3\cdot2\cdot1\cdot6^n}$ であるから

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{(n+1)n(n-1)\cdot5^{n-2}}{3\cdot2\cdot1\cdot6^{n+1}}\times\frac{3\cdot2\cdot1\cdot6^n}{n(n-1)(n-2)\cdot5^{n-3}}=\frac{5(n+1)}{6(n-2)}$$

$\frac{p_{n+1}}{p_n}>1$ から　$\frac{5(n+1)}{6(n-2)}>1$

両辺に $6(n-2)$ (>0) を掛けて

$5(n+1)>6(n-2)$　　よって　$n<17$

これを満たす自然数 n の最大値は　16

(3)　(2) と同様にすると

$\frac{p_{n+1}}{p_n}=1$ のとき $n=17$，　$\frac{p_{n+1}}{p_n}<1$ のとき $n>17$

よって　$p_3<p_4<\cdots\cdots<p_{16}<p_{17}=p_{18}>p_{19}>\cdots\cdots$

したがって，p_n が最大となる自然数 n は　$n=17，18$

1

解答　(1)　$\frac{8}{27}$　　(2)　$\frac{5}{16}$　　(3)　$\frac{25}{432}$

解説

(1)　さいころを 1 回投げて，2 以下の目が出る確率は　$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

よって，求める確率は　$_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^{4-2}={}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(2)　さいころを 1 回投げて，奇数の目が出る確率は　$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

3 回以上奇数の目が出るのは，3 回または 4 回奇数の目が出る場合であるから，その確率は　$_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$

(3)　さいころを 1 回投げて，5 の目が出る確率は　$\frac{1}{6}$

4 回目に 2 度目の 5 の目が出るのは，3 回目までに 5 がちょうど 1 回出て，4 回目に 2 度目の 5 が出る場合であるから，その確率は

$$_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{25}{432}$$

2

解答　(ア)　$\frac{8}{27}$　　(イ)　0　　(ウ)　$\frac{8}{81}$

解説

さいころを 1 回投げたとき，6 の約数の目すなわち 1，2，3，6 が出る確率は

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

さいころを 4 回投げたとき，6 の約数の目が r 回出る確率は

$$_4C_r\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{4-r}\ \cdots\cdots ①$$

また，このとき点 P の x 座標は

$$x=1\cdot r+(-1)\cdot(4-r)=2r-4\quad(r=0，1，2，3，4)$$

(ア)　$2r-4=0$　　よって　$r=2$

ゆえに，① から，求める確率は　$_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(イ)　$2r-4=3$　　これを満たす整数 r は存在しない。

ゆえに，求める確率は　0

(ウ)　$2r-4=-2$　　よって　$r=1$

ゆえに，① から，求める確率は　$_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$

3

解答　(1)　$\frac{1}{8}$　　(2)　順に　$\frac{13}{16}$，$\frac{3}{16}$

解説

(1)　4 回目までに表が 1 回，裏が 3 回出て，5 回目に裏が出る場合である。

よって，求める確率は　$_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(2)　B が勝つのは，4 回目に勝つ場合と，5 回目に勝つ場合がある。

B が 4 回目に勝つのは，裏が 4 回続けて出る場合であるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

Bが5回目に勝つ確率は，(1)から　$\frac{1}{8}$

よって，Bが勝つ確率は　$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$

このゲームに引き分けはないから，Aが勝つ確率は　$1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$

4

解答　(1)　$\frac{13}{36}$　　(2)　$\frac{24}{47}$

解説

選ばれた1人が，血液型がA型であるという事象を A，女子であるという事象を W とする。

(1)　求める確率は $P_W(A)$ で，条件から

$$P(A)=\frac{53}{100},\ P(W)=\frac{36}{100},\ P(A\cap W)=\frac{13}{100}$$

よって　$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{13}{100}\div\frac{36}{100}=\frac{13}{36}$

(2)　求める確率は $P_{\overline{A}}(\overline{W})$ である。

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{53}{100}=\frac{47}{100}$$

B型の男子は，$64-40=24$ (人) いるから　$P(\overline{A}\cap\overline{W})=\frac{24}{100}$

よって　$P_{\overline{A}}(\overline{W})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{W})}{P(\overline{A})}=\frac{24}{100}\div\frac{47}{100}=\frac{24}{47}$

5

解答　(1)　$\frac{107}{210}$　　(2)　$\frac{35}{107}$

解説

箱A，B，Cを選ぶという事象を，それぞれ A，B，C とし，白玉を1個取り出すという事象を K とする。

(1)　求める確率は

$$\begin{aligned}P(K)&=P(A\cap K)+P(B\cap K)+P(C\cap K)\\&=P(A)P_A(K)+P(B)P_B(K)+P(C)P_C(K)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{3}{7}\right)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{107}{70}=\frac{107}{210}\end{aligned}$$

(2)　$P(B\cap K)=P(B)P_B(K)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$

したがって，求める確率は，(1)の結果から

$$\begin{aligned}P_K(B)&=\frac{P(B\cap K)}{P(K)}\\&=\frac{1}{6}\div\frac{107}{210}=\frac{35}{107}\end{aligned}$$

6

解答　$\frac{10}{3}$

解説

合計点を X 点とすると，X のとりうる値は

$X=2,\ 3,\ 4,\ 5$

それぞれの値をとる確率は

$X=2$ のとき　$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{15}$　　$X=3$ のとき　$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}$

$X=4$ のとき　$\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$　　$X=5$ のとき　$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15}$

よって，求める期待値は　$2\times\frac{3}{15}+3\times\frac{6}{15}+4\times\frac{4}{15}+5\times\frac{2}{15}=\frac{50}{15}=\frac{10}{3}$

7

解答　$n=12,\ 13$

解説

p_n は，$(n-1)$ 回までに1の目が2回，他の目が $(n-3)$ 回出て，n 回目に1の目が出る確率であるから　$p_n={}_{n-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\times\frac{1}{6}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{5^{n-3}}{6^n}$

したがって　$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{5^{n-2}}{6^{n+1}}\times\frac{2}{(n-1)(n-2)}\cdot\frac{6^n}{5^{n-3}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{n}{n-2}$

$\frac{p_{n+1}}{p_n}<1$ とすると　$\frac{5n}{6(n-2)}<1$

$6(n-2)>0$ であるから　$5n<6(n-2)$　　ゆえに　$n>12$

よって，$n\geqq13$ のとき　$p_n>p_{n+1}$

$\frac{p_{n+1}}{p_n}>1$ とすると　$5n>6(n-2)$　　ゆえに　$n<12$

よって，$3\leqq n\leqq11$ のとき　$p_n<p_{n+1}$

なお，$n=12$ のとき，$\frac{p_{n+1}}{p_n}=1$ となるから　$p_n=p_{n+1}$

ゆえに　$p_3<p_4<\cdots\cdots<p_{12},\ p_{12}=p_{13},\ p_{13}>p_{14}>\cdots\cdots$

よって，p_n の値が最大となるのは $n=12,\ 13$ のときである。

別解　[$p_{n+1}-p_n$ の符号を調べる方針]

$$\begin{aligned}p_{n+1}-p_n&=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{5^{n-2}}{6^{n+1}}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}\cdot\frac{5^{n-3}}{6^n}\\&=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{5^{n-3}}{6^{n+1}}\{5n-6(n-2)\}=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{5^{n-3}}{6^{n+1}}(12-n)\end{aligned}$$

ここで，$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{5^{n-3}}{6^{n+1}}>0$ であるから，$p_{n+1}-p_n$ の符号は $12-n$ の符号と一致する。

$3\leqq n\leqq11$ のとき　$p_{n+1}-p_n>0$ から　$p_n<p_{n+1}$

$n=12$ のとき　$p_{n+1}-p_n=0$ から　$p_n=p_{n+1}$

$n\geqq13$ のとき　$p_{n+1}-p_n<0$ から　$p_n>p_{n+1}$

ゆえに　$p_3<p_4<\cdots\cdots<p_{12},\ p_{12}=p_{13},\ p_{13}>p_{14}>\cdots\cdots$

よって，p_n の値が最大となるのは $n=12,\ 13$ のときである。

1

解答　$\frac{11}{64}$

解説

合格するのは，10問中7問，8問，9問，10問正解する場合で，おのおのの場合は互いに排反である。

10問中 n 問正解となる確率は　${}_{10}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{10-n}={}_{10}\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$　$(0\leqq n\leqq10)$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}&{}_{10}\mathrm{C}_7\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_8\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}({}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{10}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_0)\\&=\frac{1}{2^{10}}(120+45+10+1)=\frac{176}{1024}=\frac{11}{64}\end{aligned}$$

2

解答　(1)　$\frac{2}{9}$　　(2)　$\frac{8}{27}$　　(3)　$\frac{25}{81}$

解説

3の倍数の目が出る回数を x とする。左回りに1進むことを $+1$，右回りに1進むことを -1 で表す。

3の倍数の目が出る確率は　$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(1)　3回投げたとき，3の倍数でない目が出る回数は $3-x$ である。

点Pが点Bにあるとき，$x-(3-x)=1$ から　$x=2$

したがって，3の倍数の目がちょうど2回出ればよい。

よって，求める確率は　${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$

(2)　4回投げたとき，3の倍数でない目が出る回数は $4-x$ である。

点Pが点Aに戻るとき　$x-(4-x)=0$ から　$x=2$

したがって，3の倍数の目がちょうど2回出ればよい。

よって，求める確率は　${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(3)　6回投げたとき，3の倍数でない目が出る回数は，$6-x$ である。

点Pが点Aに戻るのは，次の3つの場合がある。

[1]　$x-(6-x)=0$ のとき，$x=3$　　よって，その確率は　${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3$

[2]　6回続けて左回りするともとに戻る。　6進むことになるので

$x-(6-x)=6$ から　$x=6$　　よって，その確率は　${}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^0$

[3]　6回続けて右回りしてももとに戻る。　-6 進むことになるので

$x-(6-x)=-6$ から　$x=0$　　よって，その確率は　${}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6$

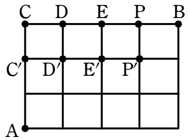
[1]～[3]から，求める確率は　${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^0+{}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{25}{81}$

3

解答　$\frac{21}{32}$

解説

Ｐを通る道順は次の４つの場合があり，これらは互いに排反である。また，各場合の１つの道順の確率は，次の通りである (右の図を参照)。



[1]　Ｃを通る (C′ も通る) とき　$\left(\frac{1}{2}\right)^3$

[2]　Ｃを通らないでＤを通る (D′ も通る) とき　$\left(\frac{1}{2}\right)^4$

[3]　Ｄを通らないでＥを通る (E′ も通る) とき　$\left(\frac{1}{2}\right)^5$

[4]　Ｅを通らないでＰを通る (P′ も通る) とき　$\left(\frac{1}{2}\right)^6$

以上から，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times1+\left(\frac{1}{2}\right)^4\times{}_3C_1+\left(\frac{1}{2}\right)^5\times{}_4C_2+\left(\frac{1}{2}\right)^6\times{}_5C_3$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{6}{32}+\frac{10}{64}=\frac{21}{32}$$

$\boxed{4}$

解答　$\frac{5}{36}$

解説

各回の試行で，赤玉，白玉，青玉が出る確率は，それぞれ $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$ である。

また，５回の試行で，赤玉が１回，白玉が２回，青玉が２回出る場合は $\frac{5!}{1!2!2!}$ 通りあり，これらは互いに排反である。

よって，求める確率は　$\frac{5!}{1!2!2!}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{36}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\frac{15}{32}$　　(2)　$\frac{1}{2}$

解説

(1)　$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{5}}=\frac{15}{32}$

(2)　$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{2}$

参考　(2) のとき $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ であるから

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(A)P(B)}{1-P(A)}=P(B)$$

$\boxed{6}$

解答　(前半)　$\frac{8}{17}$，(後半)　$\frac{8}{11}$

解説

和 $X+Y$ が３の倍数である事象を A，積 XY が３の倍数である事象を B とする。
和 $X+Y$ が３の倍数となるのは，カードの番号が

[1]　0，3，6，9 のうちの２枚のとき

[2]　１枚は１か４か７，他の１枚は２か５か８のとき

であり，[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，A が起こる確率は

$$P(A)=\left(\frac{4}{10}\right)^2+\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}\times2=\frac{34}{100}=\frac{17}{50}$$

(前半)　求める確率は条件付き確率 $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ であり，$P(A\cap B)$ は２枚とも３の倍数となるときの確率であるから

$$P(A\cap B)=\left(\frac{4}{10}\right)^2=\frac{4}{25}$$

よって，求める確率は　$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{4}{25}\div\frac{17}{50}=\frac{8}{17}$

(後半)　求める確率は条件付き確率 $P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}$ であり，$P(\overline{A}\cap B)$ は１枚が３の倍数，他の１枚が３の倍数でない場合の確率であるから

$$P(\overline{A}\cap B)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}\times2=\frac{12}{25}$$

よって，求める確率は

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{12}{25}\div\left(1-\frac{17}{50}\right)=\frac{12}{25}\div\frac{33}{50}=\frac{8}{11}$$

$\boxed{7}$

解答　$\frac{2}{3}$

解説

取り出した玉と残りの玉について，起こりうる場合の総数は

$3\times2=6$ (通り)

取り出した１個の玉が赤玉であるという事象を A，箱の中のもう１つの玉が赤玉であるという事象を B とすると，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

A の起こる場合は，箱Ａの２個の赤玉と箱Ｂの１個の赤玉について

３通り

$A\cap B$ の起こる場合は，箱Ａの２個の赤玉について

２通り

よって　$P(A)=\frac{3}{6}$，$P(A\cap B)=\frac{2}{6}$　ゆえに　$P_A(B)=\frac{2}{6}\div\frac{3}{6}=\frac{2}{3}$

注意　求める確率は，A を事象と考えた場合の，$A\cap B$ の起こる確率で

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{3}$$

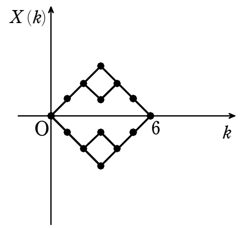
$\boxed{1}$

解答　(1)　$\frac{1}{16}$　　(2)　$\frac{7}{256}$

解説

横軸を原点，横軸の上側を数直線の正の方向，横軸の下側を数直線の負の方向とみなした平面を考える。

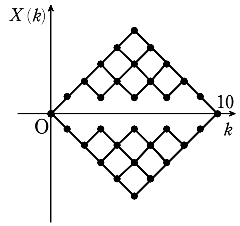
(1)　$X(6)=0$ となるためには，奇数，偶数がともに３回ずつ出ればよいが，条件を満たす偶奇の起こる順の決め方は，右図の経路の数と同じで　４通り



よって，求める確率は

$$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$$

(2)　$X(10)=0$ となるためには，奇数，偶数がともに５回ずつ出ればよいが，条件を満たす偶奇の起こる順の決め方は，右図の経路の数と同じで　28 通り



よって，求める確率は

$$28\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{256}$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\frac{4}{5}$　　(2)　$\frac{16}{19}$

解説

(1)　最初のカードの表が赤である事象を A，裏が赤である事象を B とすると，求める確率は $P_A(B)$ である。
赤の面が５個，青の面が４個，黄の面が３個あるから，最初のカードの表が赤である確率 $P(A)$ は　$P(A)=\frac{5}{12}$

また，最初のカードが両面とも赤である確率 $P(A\cap B)$ は　$P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

よって，求める確率は　$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{3}\div\frac{5}{12}=\frac{4}{5}$

(2)　２枚目のカードの表が青である事象を C とすると，求める確率は $P_{A\cap C}(B)$ である。
最初のカードが両面とも赤で，かつ２枚目のカードの表が青である確率 $P(A\cap B\cap C)$ は　$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}=\frac{2}{15}$

最初のカードの表が赤，裏が青で，かつ２枚目のカードの表が青である確率 $P(A\cap\overline{B}\cap C)$ は　$P(A\cap\overline{B}\cap C)=\frac{1}{12}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{40}$

よって，求める確率は　$P_{A\cap C}(B)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap C)}=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(A\cap B\cap C)+P(A\cap\overline{B}\cap C)}$

$$=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15}+\frac{1}{40}}=\frac{16}{19}$$

1

解答　(1)　154 通り　　(2)　1120 通り

解説

(1)　条件から，4 桁の数が 25 の倍数となるのは，下 2 桁の数が 25，50，75 のいずれかのときである。

[1]　下 2 桁が 25 のとき

千の位は 0，2，5 以外の　7 通り

百の位は 2，5 と千の位の数字以外であるから　7 通り

したがって　　$7\times7=49$ (通り)

[2]　下 2 桁が 50 のとき

千，百の位は 0，5 以外であるから　　${}_8P_2=8\times7=56$ (通り)

[3]　下 2 桁が 75 のとき　　[1] と同様に 49 通り

[1]～[3] から，25 の倍数となるのは　　$49+56+49=154$ (通り)

(2)　条件から，4 桁の数が 4 の倍数となるのは，下 2 桁の数が 4 の倍数のときである。

[1]　下 2 桁が 4 の倍数で 0 を含むとき

04，08，20，40，60，80 の　6 通り

そのおのおのについて，千，百の位は，残り 8 個から 2 個取ればよいから

${}_8P_2=56$ (通り)

したがって　　$6\times56=336$ (通り)

[2]　下 2 桁が 4 の倍数で 0 を含まないとき

12，16，24，28，32，36，48，52，56，64，68，72，76，84，92，96 の 16 通り

そのおのおのについて，千の位は下 2 桁の数と 0 を除く 7 通り，百の位は残りの 7 通りであるから　$16\times7\times7=784$ (通り)

[1]，[2] から，4 の倍数となるのは　　$336+784=1120$ (通り)

2

解答　(1)　5040 通り　　(2)　576 通り　　(3)　144 通り　　(4)　10080 通り

解説

(1)　8 人の円順列であるから　　$(8-1)!=7!=5040$ (通り)

(2)　子供 4 人をまとめて 1 組と考えて，この 1 組と大人 4 人の座り方は　　$(5-1)!$ 通り

そのそれぞれについて，子供 4 人の並び方は　　$4!$ 通り

よって，求める座り方は　　$(5-1)!\times4!=4!\times4!=24\times24=576$ (通り)

(3)　大人 4 人の座り方は　　$(4-1)!$ 通り

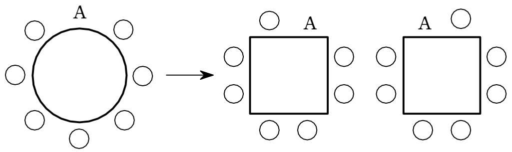
子供 4 人が大人 4 人の間に座る方法は　　$4!$ 通り

よって，求める座り方は　　$(4-1)!\times4!=3!\times4!=6\times24=144$ (通り)

(4)　特定の 1 人を A とする。

まず A を含む 8 人が円形に並んで座る方法は，(1) より　　5040 通り

次に 8 人が正方形のテーブルの各辺に 2 人ずつ並んで着席するとき，A は図のように右側か左側かのどちらかに座る。



よって，求める座り方は　　$5040\times2=10080$ (通り)

3

解答　(1)　420 通り　　(2)　30 通り

解説

(1)　[1]　5 色を使う場合　　${}_5P_5=5!=120$ (通り)

[2]　4 色を使う場合

B と D，C と E の一方の組が同色で

${}_5P_4\times2=5\cdot4\cdot3\cdot2\times2=240$ (通り)

[3]　3 色を使う場合

B と D は同色，C と E は別の同色であり

${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$ (通り)

以上から　　$120+240+60=420$ (通り)

(2)　中央の正方形を塗る方法は　　5 通り

周囲の部分は，残り 4 色の円順列であるから　　$(4-1)!$ 通り

よって　　$5\times(4-1)!=5\times3\cdot2\cdot1=30$ (通り)

4

解答　(1)　2　　(2)　順に 20，10　　(3)　89

解説

(1)　3 枚の封筒と中のカードの番号がどれも一致しないとすると，1 番の封筒に 2 番のカードが入るとき，2 番，3 番の封筒にはそれぞれ 3 番，1 番のカードが入る。

また，1 番の封筒に 3 番のカードが入るとき，2 番，3 番の封筒には，それぞれ 1 番，2 番のカードが入る。したがって　　$a_{3,0}=2$

(2)　封筒と中のカードの番号が 2 組一致するとき，その番号の選び方は

${}_5C_2=10$ (通り)

そのおのおのに対して，残りの 3 枚の封筒にカードを入れる方法は，(1) から　2 通り

よって　　$a_{5,2}=10\times2=20$

また，封筒と中のカードの番号が 3 組一致するとき，その番号の選び方は

${}_5C_3=10$ (通り)

そのおのおのに対して，残りの 2 枚の封筒にカードを入れる方法は　1 通り

よって　　$a_{5,3}=10\times1=10$

(3)　5 枚の封筒にカードを入れるとき，その入れ方の総数は　　$5!=120$ (通り)

したがって　　$a_{5,0}+a_{5,1}+a_{5,2}+a_{5,3}+a_{5,4}+a_{5,5}=120$

ゆえに　　$a_{5,0}+a_{5,1}=120-a_{5,2}-a_{5,3}-a_{5,4}-a_{5,5}$

封筒と中のカードの番号が 4 組一致するとき，残りの封筒とカードの番号も一致するから　　$a_{5,4}=0$

また，5 枚の封筒と中のカードの番号がすべて一致する入れ方は 1 通りであるから

$a_{5,5}=1$

よって　　$a_{5,0}+a_{5,1}=120-20-10-0-1=89$

5

解答　(1)　21 通り　　(2)　175 通り　　(3)　292 通り

解説

(1)　A から B までの経路は　　$\dfrac{7!}{5!2!}=21$ (通り)

B から D までの経路は　1 通り

よって，B 地点を通る経路は　　$21\times1=21$ (通り)

(2)　A から C までの経路は　　$\dfrac{7!}{4!3!}=35$ (通り)

C から D までの経路は　　$\dfrac{5!}{1!4!}=5$ (通り)

よって，C 地点を通る経路は　　$35\times5=175$ (通り)

(3)　右の図のように，点 E，F をとる。

E 地点を通る経路は

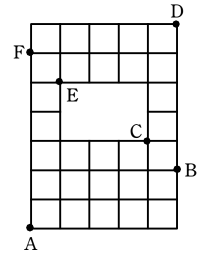
$\dfrac{6!}{1!5!}\times\dfrac{6!}{4!2!}=6\times15=90$ (通り)

F 地点を通る経路は

$1\times\dfrac{6!}{5!1!}=1\times6=6$ (通り)

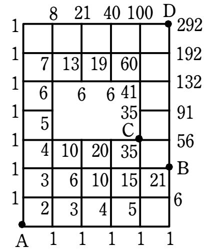
このとき，(1)，(2) から，求める最短経路の総数は

$21+175+90+6=292$ (通り)



別解　A 地点から D 地点に至る経路の数を書き込んでいくと，右の図のようになる。

よって　　292 通り



6

解答　(ア)　5　　(イ)　9　　(ウ)　1022　　(エ)　62

解説

(ア)　a 人と b 人に分けることを $(a,\ b)$ で表すと，人も車も区別しないで，人数の分け方だけを考えて分乗する方法は，(1，9)，(2，8)，(3，7)，(4，6)，(5，5) の　　5 通り

(イ)　2 台の車を A，B とする。

人は区別しないが車は区別して分乗する方法は，A に乗る人数で決まるから

9 通り

(ウ)　10 人のおのおのについて，A に乗るか，B に乗るかの 2 通りがあるが，全員が A か B に乗る場合は除かれる。

よって　　$2^{10}-2=1022$ (通り)

(エ)　特定の 5 人が A に乗るか，B に乗るかの　　2 通り

残り 5 人のおのおのについて，特定の 5 人と同じ車に乗るか，別の車に乗るかの 2 通りがあるが，全員が特定の 5 人と同じ車に乗る場合は除かれる。

よって　　$2\times(2^5-1)=62$ (通り)

7

解答　(1)　$\dfrac{5}{72}$　　(2)　$\dfrac{19}{27}$　　(3)　$\dfrac{6^n-3^n-5^n+2^n}{6^n}$

解説

(1)　3 個のさいころの目の出方は　6^3 通り

目の積が 12 となるような 3 つの目の組合せは　　{1，2，6}，{1，3，4}，{2，2，3}

どのさいころがどの目になるかについて

[1]　{1，2，6}，{1，3，4} のとき，それぞれ　$3!=6$（通り）

[2]　{2，2，3} のとき　$\dfrac{3!}{2!1!}=3$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{6\times2+3}{6^3}=\dfrac{15}{6^3}=\dfrac{5}{72}$

(2)　目の積が 3 の倍数になるのは，3 個の目のうちの少なくとも 1 つが 3 の倍数のときである。

よって，求める確率は，「3 個の目がすべて 3 の倍数以外である」という事象の余事象の確率であるから　$1-\left(\dfrac{4}{6}\right)^3=1-\dfrac{8}{27}=\dfrac{19}{27}$

(3)　目の積が 10 の倍数になるのは，n 個の目のうち，少なくとも 1 つが偶数，かつ 少なくとも 1 つが 5 のときである。

よって，求める確率は，「n 個の目がすべて奇数である，または，すべて 5 以外の目である」という事象の余事象の確率であるから

$$1-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{6}\right)^n\right\}=\frac{6^n-3^n-5^n+2^n}{6^n}$$

8

解答　(1)　$\dfrac{112}{243}$　(2)　$\dfrac{8}{243}$　(3)　$\dfrac{14}{729}$　(4)　$\dfrac{55}{729}$

解説

(1)　4 回のカードの取り出し方の総数は　9^4 通り

a_1，a_2，a_3，a_4 がすべて異なるようなカードの取り出し方は　${}_9\mathrm{P}_4$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_9\mathrm{P}_4}{9^4}=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{9^3}=\dfrac{112}{243}$

(2)　9 種類の番号から 2 種類を取り出す組合せは ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りあり，a_1，a_2，a_3，a_4 の並べ方は　$\dfrac{4!}{2!2!}=6$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_9\mathrm{C}_2\times6}{9^4}=\dfrac{4\times6}{9^3}=\dfrac{8}{243}$

(3)　$a_1<a_2<a_3<a_4$ となる場合の数は，9 種類の番号から 4 種類を取り出す組合せに等しいから　${}_9\mathrm{C}_4$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_9\mathrm{C}_4}{9^4}=\dfrac{\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{9^4}=\dfrac{2\cdot7}{9^3}=\dfrac{14}{729}$

(4)　$a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq a_4$ となる場合の数は，9 種類の番号から重複を許して 4 個取り出す組合せに等しいから　${}_{9+4-1}\mathrm{C}_4={}_{12}\mathrm{C}_4$（通り）

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_4}{9^4}=\dfrac{\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{9^4}=\dfrac{11\cdot5}{9^3}=\dfrac{55}{729}$

9

解答　(1)　$p(1+p-p^2)$　(2)　$p^3(1+p-p^2)^2$

解説

(1)　[1]　S_1 が青い線分であるとき，その確率は　p

[2]　S_1 が赤い線分であるとき

S_2，S_3 はともに青い線分である。

よって，[2] の場合の確率は　$(1-p)p^2$

ゆえに，求める確率は

$$p+(1-p)p^2=p(1+p-p^2)$$

(2)　青い線分だけをたどって D から F に行くことができる確率は，(1) と同じで

$p(1+p-p^2)$

よって，求める確率は

$$p(1+p-p^2)\times p\times p(1+p-p^2)=p^3(1+p-p^2)^2$$

10

解答　(1)（ア）$\dfrac{1}{3}$　(2)（イ）$\dfrac{1}{3}$

(3)（ウ）$\dfrac{1}{3^n}$　（エ）$\dfrac{2}{3^n}$　（オ）$\dfrac{2}{3^n}$　（カ）$\dfrac{2n-1}{3^n}$

解説

(1)　3 人の手の出し方は　3^3 通り

1 回目で勝者が 1 人になるのは，誰が勝つかで 3 通り，そのおのおのに対して，どの手で勝つかで 3 通りあるから，全部で　3×3 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{3\times3}{3^3}={}^{\text{ア}}\dfrac{1}{3}$

(2)　1 回目では勝者が 1 人にならず，2 回目に勝者が 1 人になるのは，次の [1]，[2] のいずれかの場合である。

[1]　1 回目はあいこで，2 回目に勝者が 1 人になる

[2]　1 回目に 勝者が 2 人，2 回目に勝者が 1 人になる

3 人でじゃんけんをして，1 人だけ負ける確率は，(1) と同様に考えて　$\dfrac{1}{3}$

よって，3 人とも負けない確率は　$1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$

また，2 人でじゃんけんをして勝者が 1 人になる確率は　$\dfrac{2\times3}{3^2}=\dfrac{2}{3}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{9}={}^{\text{イ}}\dfrac{1}{3}$

(3)　3 人でじゃんけんをして，勝者が 1 人になることを ○，1 人だけ負けることを ×，3 人とも負けないことを △ で表す。

また，2 人でじゃんけんをして，勝者が 1 人になることを ●，2 人とも負けないことを ▲ で表す。

(i)　$\underbrace{\triangle\triangle\cdots\cdots\triangle}_{n-1\text{ 個}}\bigcirc$ の場合であるから，その確率は　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{3}={}^{\text{ウ}}\dfrac{1}{3^n}$

(ii)　$\times\underbrace{\blacktriangle\blacktriangle\cdots\cdots\blacktriangle}_{n-2\text{ 個}}\bullet$ の場合であるから，その確率は　$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}\times\dfrac{2}{3}={}^{\text{エ}}\dfrac{2}{3^n}$

(iii)　$\underbrace{\triangle\triangle\cdots\cdots\triangle}_{m-1\text{ 個}}\times\underbrace{\blacktriangle\blacktriangle\cdots\cdots\blacktriangle}_{n-m-1\text{ 個}}\bullet$ の場合であるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-m-1}\times\frac{2}{3}={}^{\text{オ}}\frac{2}{3^n}$$

$1<m<n$ を満たす m は，$n-2$ 個あるから，(i)，(ii)，(iii) より n 回目に勝者が 1 人になる確率は　$\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{2}{3^n}+\dfrac{2}{3^n}\times(n-2)={}^{\text{カ}}\dfrac{2n-1}{3^n}$

11

解答　$\dfrac{5}{72}$

解説

x，y，z が大きくなる方向に 1 ずつ駒を進めることを，それぞれ X，Y，Z で表すものとする。

原点から (2，2，2) までの経路は，X 2 個，Y 2 個，Z 2 個の順列で表されるから

$$\frac{6!}{2!2!2!}=90\text{（通り）}$$

また，X が起こる確率は　$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，

Y が起こる確率は　$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，　Z が起こる確率は　$\dfrac{1}{6}$

よって，求める確率は　$90\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{5}{72}$

12

解答　順に　$\dfrac{2}{7}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{2}{3}$

解説

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$$

3 回目に赤球が出るのは，1，2 回目に出る球が

（赤，赤），（赤，白），（白，赤），（白，白）

の場合で，これらの事象は互いに排反であるから

$$\begin{aligned}P(A_3)&=P(A_1\cap A_2\cap A_3)+P(A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3)+P(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3)+P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3)\\&=\frac{2}{7}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{7}\\&=\frac{2}{7}+\frac{4}{35}+\frac{4}{35}+\frac{3}{35}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

また　$P(A_2\cap A_3)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)+P(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3)$

$$=\frac{2}{7}+\frac{4}{35}=\frac{2}{5}$$

よって　$P_{A_3}(A_2)=\dfrac{P(A_2\cap A_3)}{P(A_3)}=\dfrac{2}{5}\div\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{3}$

1

解答 (1) (ア) 490　(2) (イ) 150

解説

(1) [1] 2人，2人，4人のグループに分けるとき

2人のグループ2つに区別がないから　$\frac{{}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_4}{2!}=210$ (通り)

[2] 2人，3人，3人のグループに分けるとき

[1]と同様に　$\frac{{}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3}{2!}=280$ (通り)

[1], [2]から　$210+280={}^{ア}490$ (通り)

(2) 男子学生は各グループ1名ずつに分かれるから，男子学生をA，B，Cとし，それぞれ同じグループになる女子学生の人数を a，b，c とすると，次の場合がある。

[1] $(a, b, c)=(1, 1, 3)$ と分けるとき

$${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3=20 \text{ (通り)}$$

$(a, b, c)=(1, 3, 1), (3, 1, 1)$ のときも同様に，20通りずつある。

[2] $(a, b, c)=(1, 2, 2)$ と分けるとき

$${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2=30 \text{ (通り)}$$

$(a, b, c)=(2, 1, 2), (2, 2, 1)$ のときも同様に，30通りずつある。

[1], [2]から　$20\times3+30\times3={}^{イ}150$ (通り)

2

解答 (1) 1152通り　(2) 144通り　(3) 648通り

解説

(1) 男性の並び方は　4!通り，　女性の並び方は　4!通り

男性と女性が交互に座ればよいので，S_1 に男性が座る場合と女性が座る場合を考えて

$$4!\times4!\times2=1152 \text{ (通り)}$$

(2) M_1 の両隣が F_1 と F_2 になるのは，$F_1M_1F_2$ と $F_2M_1F_1$ の2通りある。

この M_1，F_1，F_2 をまとめて1組と考えると，この1組と F_3，F_4 の座り方は　3!通り

また，M_2，M_3，M_4 の座り方は　3!通り

S_1 に M_1 以外の男性が座る場合と女性が座る場合を考えて，求める座り方は

$$2\times3!\times3!\times2=144 \text{ (通り)}$$

(3) (2)と同様に，M_1 の両隣が F_1 と F_3，F_1 と F_4 となる場合も144通りずつある。

更に，M_1 が S_1 または S_8 に座り，隣が F_1 となる場合が，他の6人の並べ方を考えて

$$2\times3!\times3!=72 \text{ (通り)}$$

以上より，M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は　$1152-(144\times3+72)=648$ (通り)

3

解答 (1) $\frac{(3n)!}{(n!)^3}$ (通り)　(2) $\frac{1}{2}n(n+1)$ (通り)

解説

(1) $3n$ 枚のカードのうち n 枚をAさんに配る方法は　${}_{3n}C_n$ 通り

残りの $2n$ 枚のカードのうち n 枚をBさんに配る方法は　${}_{2n}C_n$ 通り

残りの n 枚のカードをCさんに配ればよいから

$${}_{3n}C_n\cdot{}_{2n}C_n\cdot1=\frac{(3n)!}{n!(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{(3n)!}{(n!)^3} \text{ (通り)}$$

(2) まず，Bさんに，$2n-1$ の番号のカードと，$2n$ から $3n$ の番号のカード $(n+1)$ 枚のうち $(n-1)$ 枚を配る。

この配り方は　${}_{n+1}C_{n-1}={}_{n+1}C_2=\frac{(n+1)n}{2}$ (通り)

次に，Aさんに，$2n$ から $3n$ の番号のカードのうち残った2枚のカードと，$n+1$ から $2n-2$ の番号のカード $(n-2)$ 枚を配る。

この配り方は1通り。

最後に，残った1から n の番号のカード n 枚をCさんに配ればよい。

以上より　$\frac{(n+1)n}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}n(n+1)$ (通り)

4

解答 (1) 567個　(2) $81(2^{n-1}-1)$ 個

解説

(1) 千の位は，1～9の　9通り

百，十，一の位には，千の位の数を含めた2種類の数字が並ぶ。

例えば，千の位が1のとき，百，十，一の位に並ぶ数字の組は

$(1, 0), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9)$

の9通りある。

そのおのおのについて，すべて1が並ぶ場合を除くから　$9(2^3-1)$ 通り

よって　$9\times9(2^3-1)=567$ (個)

(2) (1)と同様に考えて　$9\times9(2^{n-1}-1)=81(2^{n-1}-1)$ (個)

別解 (1) [1] 0を含まないとき

2種類の数字の選び方は　${}_9C_2=36$ (通り)

また，2種類の数字を必ず含むから　$36\times(2^4-2)=504$ (個)

[2] 0を含むとき

千の位は，0以外の9通り。

残りの3桁は，千の位の数が3つ続く場合を除くから　$9\times(2^3-1)=63$ (個)

[1], [2]から　$504+63=567$ (個)

(2) [1] 0を含まないとき

(1)と同様に　${}_9C_2\times(2^n-2)=36\times(2^n-2)$ (個)

[2] 0を含むとき

(1)と同様に　$9\times(2^{n-1}-1)$ 個

[1], [2]から　$36\times(2^n-2)+9\times(2^{n-1}-1)=81(2^{n-1}-1)$ (個)

5

解答 (1) 4通り　(2) 32通り

解説

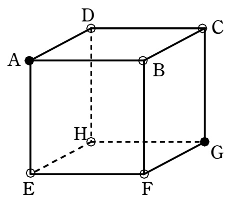
(1) 頂点Aを赤で塗るとする。

赤で塗られている頂点がない面はBCGF，CDHG，EFGHの3面である。

よって，4つの頂点がすべて白でないように塗るには，頂点Gを赤で塗らなければならない。

同様に考えて，赤で塗られる2頂点の組は，

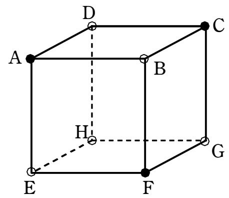
(A, G), (B, H), (C, E), (D, F)の　4通り



(2) (1)で赤く塗った2点に加えて，残り6点のどの点を赤で塗っても条件を満たす。

よって　$4\times6=24$ (通り)

さらに，右の図のようにA，C，Fを赤で塗った場合も条件を満たし，この場合は，(1)に加えて1点赤で塗る場合には含まれない。



このような塗り方は，A，C，Fを，四面体B−ACFの底面の頂点と考えることで，8通りあることがわかる。

ゆえに，求める塗り方は　$24+8=32$ (通り)

別解 8つの頂点から，赤で塗る3点を選ぶ方法は

$${}_8C_3=56 \text{ (通り)}$$

このうち4つの頂点がすべて白で塗られる面がある塗り方を考える。

そのような面は1つしかないから，面の選び方が　6通り

その面以外の4つの頂点のうち，3点を赤で塗るから　${}_4C_3=4$ (通り)

ゆえに，4つの頂点がすべて白で塗られる面がある塗り方は　$6\times4=24$ (通り)

したがって，求める塗り方は　$56-24=32$ (通り)

6

解答 (ア) $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$　(イ) $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$

解説

(ア) 1から n までの自然数から2つを選ぶ組合せは　${}_nC_2$ 通り

このうち，隣り合う2つを選ぶ組合せは，小さい方の数が1，2，……，$n-1$ であるから　$n-1$ (通り)

よって，隣り合わない2つを選ぶ組合せは

$${}_nC_2-(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)={}^{ア}\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \text{ (通り)}$$

(イ) 1から n までの自然数から3つを選ぶ組合せは　${}_nC_3$ 通り

このうち，3つとも隣り合うような3数を選ぶ組合せは，最も小さい数が1，2，……，$n-2$ であるから　$n-2$ (通り)

また，2つのみが隣り合うような3数を選ぶ組合せについて考える。

隣り合う2数が $(1, 2)$，$(n-1, n)$ のとき，残りの1つを隣り合わないように選ぶ方法は　$n-3$ (通り)

隣り合う2数が $(2, 3)$，$(3, 4)$，……，$(n-2, n-1)$ のとき，残りの1つを隣り合わないように選ぶ方法は　$n-4$ (通り)

よって，2つのみが隣り合うような3数を選ぶ組合せの総数は

$$2\cdot(n-3)+(n-3)\cdot(n-4)=(n-3)(n-2) \text{ (通り)}$$

ゆえに，求める組合せは

$${}_nC_3-\{(n-2)+(n-3)(n-2)\}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-(n-2)^2=\frac{1}{6}(n-2)\{n(n-1)-6(n-2)\}$$
$$={}^{イ}\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4) \text{ (通り)}$$

別解 (ア) 1，……，$n-1$ から2つの数を選んで，それを a_1，a_2 $(a_1<a_2)$ とすると，2数 a_1，a_2+1 が，1，……，n から隣り合わない2数を選んだ組合せとなる。

よって，求める組合せは　${}_{n-1}C_2={}^{ア}\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ (通り)

(イ) 1，……，$n-2$ から3つの数を選んで，それを a_1，a_2，a_3 $(a_1<a_2<a_3)$ とすると，3数 a_1，a_2+1，a_3+2 が，1，……，n から隣り合わない3数を選んだ組合せとなる。

よって，求める組合せは　$_{n-2}\mathrm{C}_3={}^{イ}\dfrac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$ (通り)

$\boxed{7}$

解答 (1)　$A_n(2)=n$，$A_n(3)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　　(2)　$(n+1)(n-1)$ 通り

解説

(1)　$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_{n-1}\leqq 2$ を満たす組の総数は，1，2 の 2 個から重複を許して $n-1$ 個取る組合せの数と等しい。

よって　　$A_n(2)={}_2\mathrm{H}_{n-1}={}_{2+(n-1)-1}\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_1=n$

また，$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_{n-1}\leqq 3$ を満たす組の総数は，1，2，3 の 3 個から重複を許して $n-1$ 個取る組合せの数と等しい。

よって　　$A_n(3)={}_3\mathrm{H}_{n-1}={}_{3+(n-1)-1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{n+1}\mathrm{C}_2=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

(2)　$a_{n-1}=1$ のとき，$a_{n-1}>a_n$ を満たす a_n はない。

$a_{n-1}=2$ のとき，$a_{n-1}>a_n$ となるのは，$a_n=1$ の 1 通り。

$a_{n-1}=3$ のとき，$a_{n-1}>a_n$ となるのは，$a_n=1$，2 の 2 通り。

よって，求める組の総数は

$$A_{n-1}(2)\times 1+A_{n-1}(3)\times 2=(n-1)\cdot 1+\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}\cdot 2$$
$$=n-1+(n-1)n$$
$$=(n+1)(n-1)\ (\text{通り})$$

$\boxed{8}$

解答 $\dfrac{325}{648}$

解説

さいころの目の出方は，全部で 6^6 通りある。

6 個のさいころを同時に投げたとき，ちょうど 4 種類の目が出るのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　3 個のさいころの目が同じで，残り 3 個の目が相異なる

[2]　目が同じである 2 個のさいころが 2 組あり，残り 2 個の目が相異なる

[1] の場合

同じ目の 3 個のさいころの目の選び方は　　6 通り

残り 3 個のさいころの目の選び方は　　$_5\mathrm{C}_3=10$ (通り)

6 個の数字の並べ方は　　$\dfrac{6!}{3!}=120$ (通り)

よって，[1] の場合の目の出方は　　$6\times 10\times 120=7200$ (通り)

[2] の場合

同じ目の 2 個のさいころの目 2 組の選び方は　　$_6\mathrm{C}_2=15$ (通り)

残り 2 個のさいころの目の選び方は　　$_4\mathrm{C}_2=6$ (通り)

6 個の数字の並べ方は　　$\dfrac{6!}{2!2!}=180$ (通り)

よって，[2] の場合の目の出方は　　$15\times 6\times 180=16200$ (通り)

以上から，求める確率は　　$\dfrac{7200+16200}{6^6}=\dfrac{23400}{6^6}=\dfrac{650}{6^4}=\dfrac{325}{648}$

$\boxed{9}$

解答 (1)　4 通り　　(2)　$\dfrac{11}{15}$　　(3)　$\dfrac{41}{120}$

解説

(1)　2 枚のカードの数がともに 2，3，4，5 の場合である。

したがって　　4 通り

(2)　1，2，3，4，5 のカードはそれぞれ 1，2，3，4，5 枚あり，0 のカードは 1 枚あるから，合計 16 枚のカードがある。

16 枚のカードの中から 2 枚を取り出す方法は　　$_{16}\mathrm{C}_2$ 通り

取り出した 2 枚のカードに記入された数の組を $(a,\ b)$ [ただし，$a\geqq b$，$1\leqq a\leqq 5$，$0\leqq b\leqq 5$] と表すとき，各組における得点は 右の表のようになる。

a \ b	0	1	2	3	4	5
0						
1	2					
2	4	2	1			
3	6	3	3	1		
4	8	4	4	4	1	
5	10	5	5	5	5	1

また，各組の場合の数について

$b=0$ であるものは　　a 通り

$a>b$ であるものは　　ab 通り

$a=b$ (ただし　$a\geqq 2$) であるものは　　$_a\mathrm{C}_2$ 通り

したがって，得点が 1 となる組の数は

$$_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2=1+3+6+10$$
$$=20\ (\text{通り})$$

得点が 2 となる組の数は　　$1+2\cdot 1=3$ (通り)

得点が 3 となる組の数は　　$3\cdot 1+3\cdot 2=9$ (通り)

ゆえに，得点が 4 点未満となる確率は　　$\dfrac{20+3+9}{_{16}\mathrm{C}_2}=\dfrac{32}{120}=\dfrac{4}{15}$

よって，求める確率は　　$1-\dfrac{4}{15}=\dfrac{11}{15}$

(3)　得点が 5 となる組の数は　　$5\cdot 1+5\cdot 2+5\cdot 3+5\cdot 4=50$ (通り)

ゆえに，得点が奇数となる確率は　　$\dfrac{20+9+50}{_{16}\mathrm{C}_2}=\dfrac{79}{120}$

よって，求める確率は　　$1-\dfrac{79}{120}=\dfrac{41}{120}$

$\boxed{10}$

解答 $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\dfrac{500-n}{11(n+1)}$，$n=41$

解説

和が 0 になる 3 数の組合せは，$(-1,\ -1,\ 2)$，$(-1,\ 0,\ 1)$ の　　2 通り

$(-1,\ -1,\ 2)$ について，玉の取り出し方は　　2 通り

$(-1,\ 0,\ 1)$ について，玉の取り出し方は　　$2^3=8$ (通り)

ゆえに，和が 0 になる確率は　　$\dfrac{2}{_{10}\mathrm{C}_3}+\dfrac{8}{_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{12}$

よって　　$p_n={}_{500}\mathrm{C}_n\left(\dfrac{1}{12}\right)^n\left(\dfrac{11}{12}\right)^{500-n}=\dfrac{500!}{n!(500-n)!}\cdot\dfrac{11^{500-n}}{12^{500}}$

したがって　　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\dfrac{500!}{(n+1)!(499-n)!}\cdot\dfrac{11^{499-n}}{12^{500}}\times\dfrac{n!(500-n)!}{500!}\cdot\dfrac{12^{500}}{11^{500-n}}$

$$=\frac{500-n}{n+1}\cdot\frac{1}{11}=\frac{500-n}{11(n+1)}$$

$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}>1$ とすると　　$\dfrac{500-n}{11(n+1)}>1$　　　すなわち　　$500-n>11(n+1)$

これを解くと　　$n<\dfrac{163}{4}=40.75$

また，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}<1$ とすると　　$n>40.75$

ゆえに，$0\leqq n\leqq 40$ のとき　　$p_n<p_{n+1}$

$41\leqq n\leqq 499$ のとき　　$p_n>p_{n+1}$

よって，$p_0<p_1<\cdots\cdots<p_{40}<p_{41}>p_{42}>\cdots\cdots>p_{500}$ であるから，p_n が最大となる n は

$n=41$

$\boxed{11}$

解答 (1)　$P(A)=\dfrac{16}{243}$　　(2)　$P_A(B)=\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　カード 1，カード 2，カード 3 を，それぞれ $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ と書くことにする。

1 回目の試行で，カードの並びは $(123)\longrightarrow(123)$ または (213) または (231) となるから，1 回の試行で $\boxed{3}$ が真ん中にこない確率は $\dfrac{2}{3}$，真ん中にくる確率は $\dfrac{1}{3}$ となる。

よって，事象 A の確率は　　$P(A)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\dfrac{1}{3}=\dfrac{16}{243}$

(2)　事象 $A\cap B$ が起こるのは，4 回目までに $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の交換が奇数回起こり，その結果カードの並びが (213) となり，5 回目に $\boxed{2}$ を右端に置くときである。

1 回の試行で $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の交換が起こる確率は $\dfrac{1}{3}$ であるから，

$\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の交換が 1 回起こる確率は　　$_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{4}{81}$

$\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の交換が 3 回起こる確率は　　$_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{4}{81}$

ゆえに，4 回目に (213) となる確率は　　$\dfrac{4}{81}+\dfrac{4}{81}=\dfrac{8}{81}$

よって　　$P(A\cap B)=\dfrac{8}{81}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{243}$

したがって　　$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{8}{243}\div\dfrac{16}{243}=\dfrac{1}{2}$

$\boxed{12}$

解答 $\dfrac{n-2}{3(2n-1)}$

解説

札の取り出し方の総数は

$$_{2n}\mathrm{P}_3=2n(2n-1)(2n-2)=4n(2n-1)(n-1)\ (\text{通り})$$

このうち，$X_1<X_2<X_3$ となる場合について考える。

X_1，X_2，X_3 に入る番号は，異なる 3 つの番号を選んで小さい順に X_1，X_2，X_3 とすればよいから，その選び方は　　$_n\mathrm{C}_3$ 通り

各 X_1，X_2，X_3 について，札の取り出し方は 2 通りずつあるから，$X_1<X_2<X_3$ となる取り出し方は

$$_n\mathrm{C}_3\times 2^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 2^3=\frac{4n(n-1)(n-2)}{3}\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は

$$\frac{4n(n-1)(n-2)}{3}\times\frac{1}{4n(2n-1)(n-1)}=\frac{n-2}{3(2n-1)}$$

1

解答　(1)　1728 個　　(2)　8695

解説

2 つの数字の和が 9 になる組は $\{0,\ 9\}$，$\{1,\ 8\}$，$\{2,\ 7\}$，$\{3,\ 6\}$，$\{4,\ 5\}$ であるから，この異なる組から数字を取り出せばよい。

(1)　千の位の数字の選び方は，0 以外の 9 通り。

百の位の数字は，千の位で用いた数字が属する集合以外の数字から選んで 8 通り。

同様にして，十の位，一の位の数字の選び方は，それぞれ 6 通り，4 通り。

よって　　$9\cdot8\cdot6\cdot4=1728$（個）

(2)　3 桁以下のものは　$9+9\cdot8+9\cdot8\cdot6=513$（個）

$513+1728=2241$ であるから，求める数は 4 桁の数である。

$2241-2000+1=242$ となるから，大きい方から数えて 242 番目。

9000 台の数は　$8\cdot6\cdot4=192$（個），8900 台の数は $6\cdot4=24$（個），8700 台の数は 24 個。

$$242-(192+24+24)=2$$

よって，求める数は，8600 台で，大きい方から 2 番目の数であるから　　8695

2

解答　(1)　64 枚　　(2)　960 枚　　(3)　99520 枚

解説

(1)　上下を逆さまにしたときに順列を表すカードとして使えるのは，もとの順列が H，I，O，X の 4 文字を重複を許して並べる順列のときである。

このうち，上下を逆さまにして読んでも同じ順列を表すのは，1 番目と 5 番目，2 番目と 4 番目の文字が，それぞれ同じ文字であるときである。

よって，1，2 番目の文字が決まれば 4，5 番目の文字も決まるから，求める総数は，1 ～ 3 番目の文字の順列を考えて　　$4^3=64$（枚）

(2)　上下を逆さまにしても順列を表すような順列の総数は　　$4^5=1024$

このうち，上下を逆さまにして読んでも同じ順列になるものは，(1) より 64 個であるから，求める総数は　　$1024-64=960$（枚）

(3)　10 個の文字を重複を許して 5 つ並べる順列の総数は　　10^5

ここで，上下を逆さまにして読むと異なる順列になるものは，1 枚のカードで 2 種類の順列を表せる。よって，これらの順列は，(2) より $\dfrac{960}{2}$ 枚のカードで表せる。

したがって，求めるカードの枚数は　　$10^5-\dfrac{960}{2}=100000-480=99520$（枚）

3

解答　(1)　36 通り　　(2)　12096 通り　　(3)　432 通り

解説

(1)　D の行に 1，2，3 を置き，G の行に 4，5，6 を置く場合であるから

$$3!\times3!=36\ (\text{通り})$$

(2)　1，2，3 のカードを置く位置を基準にして考える。

[1]　D の行に 3 枚置く場合

A の行に 7，8，9 を置き，G の行に 4，5，6 を置くから，この場合の数は

$3!\times3!\times3!=216$（通り）

[2]　G の行に 3 枚置く場合

[1] と同様に　　216 通り

[3]　D の行に 1 枚，G の行に 2 枚置く場合

4，5，6 のカードは G の行に 1 枚，A の行に 2 枚置き，7，8，9 のカードは A の行に 1 枚，D の行に 2 枚置く。

よって　　$3\times3\times3\times(3!)^3=5832$（通り）

[4]　D の行に 2 枚，G の行に 1 枚置く場合

[3] と同様に　　5832 通り

[1] ～ [4] から，求める場合の数は

$216\times2+5832\times2=12096$（通り）

(3)　1，2，3 のカードを E，F，H に置く場合，7，8，9 は A，B，D に置き，4，5，6 は C，G，I に置くから，この場合の数は　　$3!\times3!\times3!=216$（通り）

1，2，3 のカードを F，H，I に置く場合も上と同様にして　　216 通り

ゆえに，求める場合の数は　　$216\times2=432$（通り）

4

解答　$\left\{1-\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N\right\}\dfrac{1}{N}$

解説

$k=1$ から $k=N$ までの操作終了後，番号 $N+1$ の箱の中に赤玉が残っていると，$k=N+1$ のとき，番号 $N+1$ の箱の中は白玉となり，不適．

また，k_0 回目の操作で赤玉が初めて番号 $N+1$ の箱から出たとすると，赤玉は番号 k_0 の箱に入ることになる．その後，N 回目までのすべての k 回目の操作の後，赤玉の入った箱の番号が k より大きくなることはない．よって，N 回目までは番号 $N+1$ の箱は白玉のままである．

ゆえに，赤玉が番号 $N+1$ の箱に入るためには，1 回目から N 回目までの少なくとも 1 回の操作で番号 $N+1$ の箱が選ばれ，$N+1$ 回目の操作で赤玉の入った箱が選ばれればよいから，求める確率は　$\left\{1-\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N\right\}\dfrac{1}{N}$

5

解答　(1)　$\dfrac{225}{4096}$　　(2)　$\dfrac{15}{64}$　　(3)　$\dfrac{63}{16}$

解説

(1)　操作 (A) を 5 回行い，L に 4 色すべての玉が入っているのは，ある色が 2 回出て，他の色が 1 回ずつ出る場合である。

よって，その確率は　　${}_4\mathrm{C}_1\times\dfrac{5!}{2!1!1!1!}\left(\dfrac{1}{4}\right)^5=\dfrac{15}{64}$

操作 (B) を 5 回行い，R に 4 色すべての玉が入っている確率は，同様に

$${}_4\mathrm{C}_1\times\frac{5!}{2!1!1!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{15}{64}$$

よって，求める確率は　　$P_1=\left(\dfrac{15}{64}\right)^2=\dfrac{225}{4096}$

(2)　操作 (C) を 5 回行い，L に 4 色すべての玉が入っているのは，ある色が 2 回出て，他の色が 1 回ずつ出る場合である。

よって，その確率は　　$P_2={}_4\mathrm{C}_1\times\dfrac{5!}{2!1!1!1!}\left(\dfrac{1}{4}\right)^5=\dfrac{15}{64}$

(3)　操作 (C) を 10 回行い，L にも R にも 4 色すべての玉が入っているのは，次のどちらかの場合である。

[1]　ある色が 4 回出て他の色が 2 回ずつ出る。

[2]　ある 2 色が 3 回ずつ出て他の色が 2 回ずつ出る。

[1] の場合の確率は　　${}_4\mathrm{C}_1\times\dfrac{10!}{4!2!2!2!}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}$

[2] の場合の確率は　　${}_4\mathrm{C}_2\times\dfrac{10!}{3!3!2!2!}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{10}$

よって

$$\begin{aligned}P_3&={}_4\mathrm{C}_1\times\frac{10!}{4!2!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}+{}_4\mathrm{C}_2\times\frac{10!}{3!3!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\\&=4\times\frac{10!}{3\times2^6}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}+6\times\frac{10!}{3^2\times2^4}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\\&=\frac{10!}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{P_3}{P_1}&=\frac{10!}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\div\frac{225}{4096}=\frac{10!}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\times\frac{4096}{225}\\&=\frac{10!}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\times\frac{4^6}{15^2}=\frac{63}{16}\end{aligned}$$

6

解答　n が奇数のとき $\dfrac{1}{n-2}$，n が偶数のとき $\dfrac{n-2}{(n-1)(n-3)}$

解説

2 つの頂点を選べば直線を引くことができるから，直線 ℓ，m の選び方は，${}_n\mathrm{C}_2\times{}_{n-2}\mathrm{C}_2$ 通りで，これらは同様に確からしい。

正 n 角形をある直線に対して線対称となるように 2 つの図形に分ける。

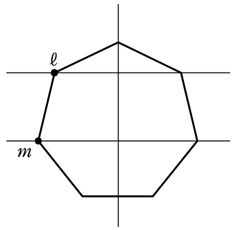
この対称軸は，n が奇数のときは正 n 角形の 1 つの頂点と 1 つの辺の中点を通る。

n が偶数のときは正 n 角形の 2 つの頂点を通る場合と 2 つの辺の中点を通る場合がある。

直線 ℓ と m が平行になる場合の数は，線対称である 2 つの図形の片方にある頂点から 2 つを選び，ℓ と m に対応させる方法の総数に等しい。ただし，対称軸上の点は選ばない。

[1]　n が奇数のとき

対称軸の選び方は n 通りあり，2 つの頂点を ℓ と m に対応させる方法は ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{P}_2$ 通りであるから，求める確率は



$$\frac{n\times{}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{P}_2}{{}_n\mathrm{C}_2\times{}_{n-2}\mathrm{C}_2}=\frac{n\times\dfrac{n-1}{2}\times\dfrac{n-3}{2}}{\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}}=\frac{1}{n-2}$$

[2]　n が偶数のとき

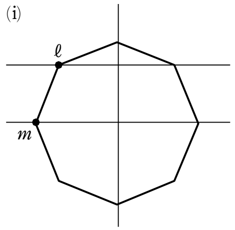
(i)　対称軸が頂点を通るとき

対称軸の選び方は $\dfrac{n}{2}$ 通りあり，2 つの頂点を ℓ と m に対応させる方法は ${}_{\frac{n-2}{2}}\mathrm{P}_2$ 通りである。

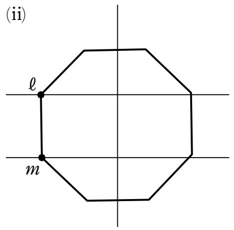
(ii)　対称軸が辺の中点を通るとき

対称軸の選び方は $\dfrac{n}{2}$ 通りあり，2 つの頂点を ℓ と m に対応させる方法は ${}_{\frac{n}{2}}\mathrm{P}_2$ 通りである。

(i)



(ii)



(i)，(ii) から求める確率は

$$\frac{\frac{n}{2}\times{}_{\frac{n-2}{2}}\mathrm{P}_2+\frac{n}{2}\times{}_{\frac{n}{2}}\mathrm{P}_2}{{}_n\mathrm{C}_2\times{}_{n-2}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{n}{2}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-4}{2}+\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}\times\frac{n-2}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{(n-2)(n-3)}{2}}$$

$$=\frac{n(n-2)\frac{(n-4)+n}{2}}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{n-2}{(n-1)(n-3)}$$

$\boxed{7}$

解答　$n=3$ または $n\geqq5$ のとき $\dfrac{(3k-n+1)(3k-n+2)}{(n+1)(n+2)}$；$n=1,\ 2,\ 4$ のとき 0

解説

$\dfrac{n}{3}\leqq k<\dfrac{n}{2}$ …… ① とおく。

$n=1,\ 2,\ 4$ のときは，① を満たす正の整数 k の値は存在しない。

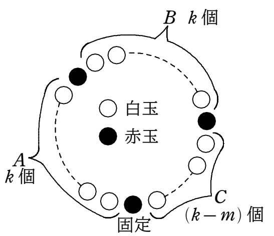
また，$n=3,\ 5$ のときは，それぞれ $k=1,\ 2$ であり，更に $n\geqq6$ のときは

$\dfrac{n}{2}-\dfrac{n}{3}=\dfrac{n}{6}\geqq1$ となるから，① を満たす k の値が必ず存在する。

ゆえに，以下において $n=3$ または $n\geqq5$ とする。

まず，赤玉を 1 個固定して考えると，並べ方の総数は n 個の白玉を 3 つの部分に分割する仕方の総数に等しい。ただし，各部分の白玉の個数は 0 でもよい。

この各部分を，図のように A，B，C で表すとき，n 個の白玉を A，B，C の部分に分割する仕方は，赤白合わせて $n+2$ 個 (固定した赤玉を除く) の玉の位置から赤玉 2 個の位置を選ぶ選び方の数と同じで



$${}_{n+2}\mathrm{C}_2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\quad\cdots\cdots②$$

一方，① より $2k<n\leqq3k$ であるから

$$2k+1\leqq n\leqq3k$$

よって $n=3k-m$ $(0\leqq m\leqq k-1)$ とおける。

ここで，与えられた条件より A，B，C 各部分の白玉の個数がいずれも k 個以下でなくてはならないから，最初に A，B，C の部分の白玉の個数をそれぞれ k 個，k 個，$k-m$ 個とする。

A，B，C 各部分が $k+1$ 個以上の白玉を含まない場合の数は，A と B から合わせて 0 個以上 m 個以下の白玉を選んで C の部分に移す移し方の数に等しい。

その場合の数は，次の表のようになる。

すなわち $1+2+\cdots\cdots+(m+1)$ となる。

A から移す玉の個数	0	1	……	m
B から移す玉の個数	$0\sim m$	$0\sim m-1$	……	0
場合の数	$m+1$	m	……	1

ここで $S=\ 1\ +2+\cdots\cdots+m+(m+1)$ とおき，項を逆にした

$S=(m+1)+m+\cdots\cdots+2+\ 1$

との和を求めると，$2S$ は $(m+2)$ を $(m+1)$ 個加えたものに等しい。

ゆえに　$2S=(m+1)\times(m+2)$　すなわち　$S=\dfrac{1}{2}(m+1)(m+2)$

したがって，条件を満たす場合の総数は，$m=3k-n$ から

$$\frac{1}{2}(m+1)(m+2)=\frac{1}{2}(3k-n+1)(3k-n+2)\quad\cdots\cdots③$$

②，③ から，求める確率は

$n=3$ または $n\geqq5$ のとき $\dfrac{(3k-n+1)(3k-n+2)}{(n+1)(n+2)}$

$n=1,\ 2,\ 4$ のとき 0