$\boxed{1}$

解答 (1) x^4-16 (2) $1-a^9$ (3) $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$
(4) $a^8-2a^4b^4+b^8$ (5) x^6-1

解説

(1) $(x+2)(x-2)(x^2+4)=(x+2)(x-2)\times(x^2+4)$
$=(x^2-4)(x^2+4)=x^4-16$

(2) $(1-a)(1+a+a^2)(1+a^3+a^6)=(1-a^3)\{1+a^3+(a^3)^2\}=1-(a^3)^3$
$=1-a^9$

(3) $(a+b)^3(a-b)^3=\{(a+b)(a-b)\}^3=(a^2-b^2)^3$
$=(a^2)^3-3(a^2)^2b^2+3a^2(b^2)^2-(b^2)^3$
$=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$

(4) $(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2=\{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)\}^2$
$=\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^2$
$=(a^4-b^4)^2=a^8-2a^4b^4+b^8$

(5) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x+1)\times(x-1)(x^2+x+1)$
$=(x^3+1)(x^3-1)=x^6-1$

$\boxed{2}$

解答 (1) $(x+y+1)(x+y-2)$ (2) $(3x-2y-4)(4x+3y-5)$
(3) $(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

解説

(1) 与式$=(x+y)^2-(x+y)-6+4=(x+y)^2-(x+y)-2$
$=(x+y+1)(x+y-2)$

(2) 与式$=12x^2+(y-31)x-2(3y^2+y-10)$
$=12x^2+(y-31)x-2(y+2)(3y-5)$
$=\{3x-2(y+2)\}\{4x+(3y-5)\}$
$=(3x-2y-4)(4x+3y-5)$

(3) 与式$=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

参考 $x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3$ に着目して，次のように因数分解してもよい。

与式$=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
$=(x+y)(x-y)\{x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2\}$
$=(x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)^2-(xy)^2\}$
$=(x+y)(x-y)\{(x^2+y^2)+xy\}\{(x^2+y^2)-xy\}$
$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$\boxed{3}$

解答 (1) $(x-y)(x-y-1)$ (2) $(3x+y)(3x-y)(9x^2+y^2)$
(3) $(x+3y)(x-3y)(2x+y)(2x-y)$ (4) $(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

解説

(1) $x^2-2xy+y^2-x+y=(x^2-2xy+y^2)-(x-y)$
$=(x-y)^2-(x-y)$
$=(x-y)(x-y-1)$

別解 (与式)$=x^2-(2y+1)x+y(y+1)$
$=(x-y)(x-y-1)$

(2) $81x^4-y^4=(9x^2)^2-(y^2)^2$
$=(9x^2+y^2)(9x^2-y^2)$
$=(3x+y)(3x-y)(9x^2+y^2)$

(3) $4x^4-37x^2y^2+9y^4=4(x^2)^2-37y^2\cdot x^2+9y^4$
$=(x^2-9y^2)(4x^2-y^2)$
$=(x+3y)(x-3y)(2x+y)(2x-y)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagup\!\!\!\!\diagdown & -9y^2 & \longrightarrow & -36y^2 \\ 4 & & -y^2 & \longrightarrow & -y^2 \\ \hline 4 & & 9y^4 & & -37y^2 \end{array}$$

(4) $x^2-x=X$ とおくと，$-8x^2+8x=-8X$ であるから
$(x^2-x)^2-8x^2+8x+12=X^2-8X+12$
$=(X-2)(X-6)$
$=(x^2-x-2)(x^2-x-6)$
$=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

$\boxed{4}$

解答 (1) $x=4,\ -1$ (2) $x=1$ (3) $x=-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{2}$

解説

(1) $|2x-3|=5$ から $2x-3=\pm5$
すなわち $2x=3+5$ または $2x=3-5$
よって $x=4,\ -1$

(2) $x-3\geqq0$ すなわち $x\geqq3$ のとき $x-3=2x$
これを解いて $x=-3$ これは $x\geqq3$ を満たさない。
$x-3<0$ すなわち $x<3$ のとき $-(x-3)=2x$
これを解いて $x=1$ これは $x<3$ を満たす。
よって，方程式の解は $x=1$

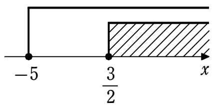
(3) $x\geqq1$ のとき $x+2(x-1)=x+3$
これを解いて $x=\dfrac{5}{2}$ これは $x\geqq1$ を満たす。
$0\leqq x<1$ のとき $x-2(x-1)=x+3$
これを解いて $x=-\dfrac{1}{2}$ これは $0\leqq x<1$ を満たさない。
$x<0$ のとき $-x-2(x-1)=x+3$
これを解いて $x=-\dfrac{1}{4}$ これは $x<0$ を満たす。
よって，方程式の解は $x=-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{2}$

$\boxed{5}$ [西南学院大]

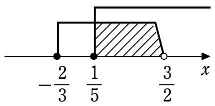
解答 (1) $x\leqq-5,\ \dfrac{1}{5}\leqq x$ (2) $-\dfrac{4}{3}\leqq x\leqq6$

解説

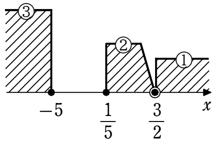
(1) [1] $2x-3\geqq0$，$3x+2\geqq0$ すなわち $x\geqq\dfrac{3}{2}$ のとき
$2x-3\leqq3x+2$
これを解いて $x\geqq-5$
これと $x\geqq\dfrac{3}{2}$ の共通範囲は $x\geqq\dfrac{3}{2}$ ……①



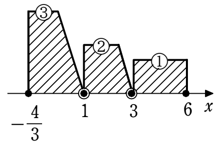
[2] $2x-3<0$，$3x+2\geqq0$ すなわち $-\dfrac{2}{3}\leqq x<\dfrac{3}{2}$
のとき $-(2x-3)\leqq3x+2$
すなわち $5x\geqq1$ これを解いて $x\geqq\dfrac{1}{5}$
これと $-\dfrac{2}{3}\leqq x<\dfrac{3}{2}$ の共通範囲は $\dfrac{1}{5}\leqq x<\dfrac{3}{2}$ ……②



[3] $2x-3<0$，$3x+2<0$ すなわち $x<-\dfrac{2}{3}$ のとき
$-(2x-3)\leqq-(3x+2)$
これを解いて $x\leqq-5$
これと $x<-\dfrac{2}{3}$ の共通範囲は $x\leqq-5$ ……③
不等式の解は ①，②，③ を合わせた範囲であるから
$x\leqq-5,\ \dfrac{1}{5}\leqq x$



(2) [1] $x-1\geqq0$，$x-3\geqq0$ すなわち $x\geqq3$ のとき $x-1+2(x-3)\leqq11$
すなわち $3x\leqq18$ これを解いて $x\leqq6$
これと $x\geqq3$ の共通範囲は $3\leqq x\leqq6$ ……①
[2] $x-1\geqq0$，$x-3<0$ すなわち $1\leqq x<3$ のとき $x-1-2(x-3)\leqq11$
これを解いて $x\geqq-6$
これと $1\leqq x<3$ の共通範囲は $1\leqq x<3$ ……②
[3] $x-1<0$，$x-3<0$ すなわち $x<1$ のとき $-(x-1)-2(x-3)\leqq11$
すなわち $-3x\leqq4$ これを解いて $x\geqq-\dfrac{4}{3}$
これと $x<1$ の共通範囲は $-\dfrac{4}{3}\leqq x<1$ ……③
不等式の解は ①，②，③ を合わせた範囲であるから
$-\dfrac{4}{3}\leqq x\leqq6$



$\boxed{6}$

解答 (1) 28 (2) 144 (3) 3936 (4) $-\sqrt{2}$

解説

$x=\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=3-\sqrt{5}$

$y=\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=3+\sqrt{5}$

よって $x+y=(3-\sqrt{5})+(3+\sqrt{5})=6$
$xy=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})=3^2-(\sqrt{5})^2=4$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\cdot4=36-8=28$

(2) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=6^3-3\cdot4\cdot6=216-72=144$

(3) $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^3-x^3y^2$

$=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(x+y)(xy)^2$

(1)，(2) の結果から　$x^5+y^5=28\cdot144-6\cdot4^2=3936$

(4)　$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x+y-2\sqrt{xy}=6-2\sqrt{4}=6-4=2$

ここで，$0<3-\sqrt{5}<3+\sqrt{5}$ であるから　$0<x<y$

よって　$\sqrt{x}<\sqrt{y}$　すなわち　$\sqrt{x}-\sqrt{y}<0$

したがって　$\sqrt{x}-\sqrt{y}=-\sqrt{2}$

$\boxed{7}$

解答　$a^3+b^3=35$

解説

$a^2+b^2=13$ ……①，　$a^4+b^4=97$ ……②　とする。

② から　$(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=97$

① を代入して　$13^2-2a^2b^2=97$　　よって　$a^2b^2=36$

$ab>0$ であるから　$ab=6$

① から　$(a+b)^2-2ab=13$

$(a+b)^2-2\times6=13$　　よって　$(a+b)^2=25$

$a+b>0$ であるから　$a+b=5$

したがって　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=5(13-6)=35$

$\boxed{8}$

解答　$x^2+y^2+z^2=18$，$x^3+y^3+z^3=24\sqrt{3}$

解説

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=(2\sqrt{3})^2-2(-3)=18$

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\}+3xyz$

$=2\sqrt{3}\{18-(-3)\}+3(-6\sqrt{3})=24\sqrt{3}$

$\boxed{9}$

解答　$a=2$

解説

$A\cap\overline{B}=\{2,\ 5\}$ であるから　$5\in A$

よって　$a^2+1=5$　　ゆえに　$a=\pm2$

[1]　$a=2$ のとき　$a+7=9$，$a^2-4a+5=1$

よって　$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{4,\ 9,\ 1\}$

このとき，$A\cap\overline{B}=\{2,\ 5\}$ となり，条件に適する。

[2]　$a=-2$ のとき　$a+7=5$，$a^2-4a+5=17$

よって　$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{4,\ 5,\ 17\}$

このとき，$A\cap\overline{B}=\{2\}$ となり，条件に適さない。

以上から　$a=2$

$\boxed{10}$

解答　(1)　$A\cap C=\{x\mid4<x<5\}$，$A\cup\overline{C}=\{x\mid-1\leqq x<5\}$

(2)　$A\cap B=\{1,\ 2,\ 4\}$，$A\cap B\cap C=\{1,\ 2\}$，

$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30\}$，

$A\cup(B\cap C)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12\}$

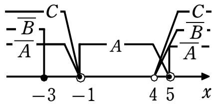
解説

(1)　$\overline{A}=\{x\mid x<-1,\ 5\leqq x\}$，

$\overline{B}=\{x\mid x\leqq-3,\ 4<x\}$

であるから

$C=\overline{A}\cup\overline{B}=\{x\mid x<-1,\ 4<x\}$



よって　$A\cap C=\{x\mid4<x<5\}$

また，$\overline{C}=\{x\mid-1\leqq x\leqq4\}$ であるから

$A\cup\overline{C}=\{x\mid-1\leqq x<5\}$

別解　ド・モルガンの法則により

$C=\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\overline{\{x\mid-1\leqq x\leqq4\}}$

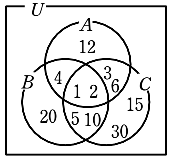
$=\{x\mid x<-1,\ 4<x\}$　（以下同じ）

(2)　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$，

$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$，

$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$

であるから



$A\cap B=\{1,\ 2,\ 4\}$，

$A\cap B\cap C=\{1,\ 2\}$，

$A\cup B\cup C$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30\}$

また，$B\cap C=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ であり

$A\cup(B\cap C)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12\}$

$\boxed{11}$

解答　(1)　十分条件であるが必要条件ではない　(2)　必要十分条件である

(3)　十分条件であるが必要条件ではない

(4)　必要条件であるが十分条件ではない

(5)　必要条件でも十分条件でもない

(6)　必要条件であるが十分条件ではない

解説

(1)　$a=3$ かつ $b=2$ のとき　$a+b=3+2=5$

よって，「$a=3$ かつ $b=2\implies a+b=5$」は真である。

$a=1$，$b=4$ のとき，$a+b=5$ であるが，$a=3$ かつ $b=2$ でない。

よって，「$a+b=5\implies a=3$ かつ $b=2$」は偽である。

したがって，十分条件であるが必要条件ではない。

(2)　$x=3$ のとき　$x^2-6x+9=3^2-6\cdot3+9=0$

よって，「$x=3\implies x^2-6x+9=0$」は真である。

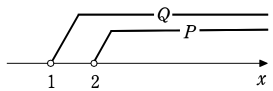
$x^2-6x+9=0$ を解くと　$(x-3)^2=0$　　ゆえに　$x=3$

よって，「$x^2-6x+9=0\implies x=3$」は真である。

したがって，必要十分条件である。

(3)　$P=\{x\mid x>2\}$，$Q=\{x\mid x>1\}$ とする。

P，Q は右の図のようになり　$P\subset Q$

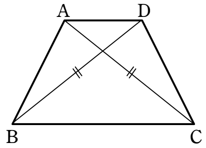


よって，「$x>2\implies x>1$」は真であり，

「$x>1\implies x>2$」は偽である。

したがって，十分条件であるが必要条件ではない。

(4)　右の図のような AD∥BC，AB＝DC の等脚台形において，2 本の対角線の長さは等しいが，長方形でない。



よって，「2 本の対角線の長さが等しい ⟹ 長方形である」は偽である。

また，「長方形である ⟹ 2 本の対角線の長さは等しい」は真である。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

(5)　$a=1$，$b=2$，$c=-1$ のとき，$a<b$ であるが，$ac<bc$ でない。

よって，「$a<b\implies ac<bc$」は偽である。

$a=-1$，$b=-2$，$c=-1$ のとき，$ac<bc$ であるが，$a<b$ でない。

よって，「$ac<bc\implies a<b$」は偽である。

したがって，必要条件でも十分条件でもない。

(6)　12 は 4 かつ 6 の倍数であるが，24 の倍数でない。

よって，「4 かつ 6 の倍数 ⟹ 24 の倍数」は偽である。

また，「24 の倍数 ⟹ 4 かつ 6 の倍数」は真である。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

1

解答 (1) $4a^2+4b^2+4c^2$ (2) $-x^4-y^4-z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2$

解説

(1) $(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$

$=\{a+(b+c)\}^2+\{-a+(b+c)\}^2+\{a-(b-c)\}^2+\{a+(b-c)\}^2$

$=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2+a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$

$\quad+a^2-2a(b-c)+(b-c)^2+a^2+2a(b-c)+(b-c)^2$

$=4a^2+2(b+c)^2+2(b-c)^2$

$=4a^2+2(b^2+2bc+c^2)+2(b^2-2bc+c^2)$

$=4a^2+4b^2+4c^2$

別解 $(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

$\quad+a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca+a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

$=4a^2+4b^2+4c^2$

(2) $(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$

$=\{(y+z)+x\}\{(y+z)-x\}\times\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}$

$=\{(y+z)^2-x^2\}\{x^2-(y-z)^2\}$

$=-x^4+\{(y+z)^2+(y-z)^2\}x^2-(y+z)^2(y-z)^2$

$=-x^4+2(y^2+z^2)x^2-(y^2-z^2)^2$

$=-x^4+2x^2y^2+2z^2x^2-y^4+2y^2z^2-z^4$

$=-x^4-y^4-z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2$

2

解答 (1) $(a+b-1)(ab+1)$ (2) $(x-y)(x-1)(y-1)$ (3) $-(a-b)(b-c)(c-a)$

(4) $(a+b)(b+c)(c+a)$

解説

(1) $a^2b+ab^2+a+b-ab-1$

$=ba^2+(b^2-b+1)a+(b-1)$

$=\{a+(b-1)\}(ba+1)$

$=(a+b-1)(ab+1)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & b-1 & \longrightarrow & b^2-b \\ b & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \hline b & & b-1 & & b^2-b+1 \end{array}$$

別解 $a^2b+ab^2+a+b-ab-1=ab(a+b)+(a+b)-(ab+1)$

$=(a+b)(ab+1)-(ab+1)$

$=(ab+1)(a+b-1)$

(2) $x^2(y-1)+y^2(1-x)+x-y=(y-1)x^2+y^2-y^2x+x-y$

$=(y-1)x^2-(y^2-1)x+y^2-y$

$=(y-1)x^2-(y+1)(y-1)x+y(y-1)$

$=(y-1)\{x^2-(y+1)x+y\}$

$=(y-1)(x-1)(x-y)$

$=(x-y)(x-1)(y-1)$

別解 $x^2(y-1)+y^2(1-x)+x-y=x^2y-x^2+y^2-xy^2+x-y$

$=(x^2y-xy^2)-(x^2-y^2)+(x-y)$

$=xy(x-y)-(x+y)(x-y)+(x-y)$

$=(x-y)(xy-x-y+1)$

$=(x-y)\{(y-1)x-(y-1)\}$

$=(x-y)(x-1)(y-1)$

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(b-c)a^2+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(4) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$=(b+c)a^2+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+2abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

3

解答 (1) $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(2) $(xy+x+1)(xy+y+1)$ (3) $(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

解説

(1) (与式)$=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

別解 (与式)$=(a^2)^3-(b^2)^3=(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$

$=(a+b)(a-b)\{(a^2+b^2)^2-(ab)^2\}$

$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(2) (与式)$=(x+1)\{xy^2+(x+1)y+1\}+xy$

$=x(x+1)y^2+\{(x+1)^2+x\}y+x+1$

$=\{x\cdot y+(x+1)\}\{(x+1)\cdot y+1\}$

$=(xy+x+1)(xy+y+1)$

$$\begin{array}{ccccc} x & \times & x+1 & \longrightarrow & (x+1)^2 \\ x+1 & & 1 & \longrightarrow & x \\ \hline x(x+1) & & x+1 & & (x+1)^2+x \end{array}$$

別解 $(x+1)(y+1)(xy+1)+xy=(xy+x+y+1)(xy+1)+xy$

$=\{(xy+1)+x+y\}(xy+1)+xy$

$=(xy+1)^2+(x+y)(xy+1)+xy$

$=\{(xy+1)+x\}\{(xy+1)+y\}$

$=(xy+x+1)(xy+y+1)$

(3) (与式)$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+b^4-2b^2c^2+c^4$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+\{(b+c)(b-c)\}^2$

$=a^4-\{(b+c)^2+(b-c)^2\}a^2+(b+c)^2(b-c)^2$

$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$

$=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$

$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

別解 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

$=\{(a^2)^2+(b^2)^2+(-c^2)^2+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2\}-4a^2b^2$

$=(a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2$

$=\{(a^2+b^2-c^2)+2ab\}\{(a^2+b^2-c^2)-2ab\}$

$=\{(a^2+2ab+b^2)-c^2\}\{(a^2-2ab+b^2)-c^2\}$

$=\{(a+b)^2-c^2\}\{(a-b)^2-c^2\}$

$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

4

解答 $(x+1)(x-1)(x+y)(y+1)$

解説

(与式)$=(x^2-1)y^2+(x^3+x^2-x-1)y+x^3-x$

$=(x+1)(x-1)y^2+(x+1)^2(x-1)y+x(x+1)(x-1)$

$=(x+1)(x-1)\{y^2+(x+1)y+x\}=(x+1)(x-1)(x+y)(y+1)$

5

解答 $(a-b)(a+b+c)(a+b-c)$

解説

$a^3+a^2b-a(c^2+b^2)+bc^2-b^3=a^3+a^2b-ac^2-ab^2+bc^2-b^3$

$=-(a-b)c^2+a^3-b^3+a^2b-ab^2$

$=-(a-b)c^2+(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)$

$=(a-b)\{-c^2+(a^2+ab+b^2)+ab\}$

$=(a-b)(a^2+2ab+b^2-c^2)=(a-b)\{(a+b)^2-c^2\}$

$=(a-b)\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)(a+b+c)(a+b-c)$

6

解答 $a+b+c$

解説

(与式)$=\dfrac{-a^3(b-c)-b^3(c-a)-c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

(分子)$=-a^3(b-c)+a(b^3-c^3)-bc(b^2-c^2)=-(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=-(b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)+(a^3-c^2a)\}$

$=-(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}=-(b-c)(c-a)\{b^2+bc-a(c+a)\}$

$=-(b-c)(c-a)\{-c(a-b)-(a^2-b^2)\}=-(b-c)(c-a)(a-b)\{-c-(a+b)\}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

よって (与式)$=a+b+c$

7

解答 (1) $a\neq0$ のとき $x=1,\ \dfrac{1}{a}$；$a=0$ のとき $x=1$

(2) $a\neq\pm1$ のとき $x=\dfrac{1}{a+1},\ y=\dfrac{1}{a+1}$

$a=1$ のとき $x=1-t,\ y=t$ (t は実数)

$a=-1$ のとき 解はない

解説

(1) 方程式の左辺を因数分解して $(x-1)(ax-1)=0$

ゆえに $x-1=0$ または $ax-1=0$

よって $a\neq0$ のとき $x=1,\ \dfrac{1}{a}$；$a=0$ のとき $x=1$

(2) ①×a−② から $(a^2-1)x=a-1$

すなわち $(a+1)(a-1)x=a-1$ …… ③

$a\neq\pm1$ のとき $x=\dfrac{1}{a+1}$ ① から $y=1-a\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{1}{a+1}$

$a=1$ のとき ①, ② はともに $x+y=1$ となる。

$y=t$ (t は実数) とすると　$x=1-y=1-t$

$a=-1$ のとき　③ は　$0\cdot x=-2$　これを満たす x の値はない。

したがって　$a\fallingdotseq\pm1$ のとき $x=\dfrac{1}{a+1}$，$y=\dfrac{1}{a+1}$

$a=1$ のとき $x=1-t$，$y=t$ (t は実数)

$a=-1$ のとき 解はない

$\boxed{8}$

解答　(1)　$6\leqq x\leqq 12$　(2)　$k\geqq 2$　(3)　$k\geqq 8$

解説

(1)　① から　$-2\leqq|x-9|-1\leqq 2$

よって　$-1\leqq|x-9|\leqq 3$

$|x-9|\geqq -1$ は常に成り立つ。

$|x-9|\leqq 3$ から　$-3\leqq x-9\leqq 3$　よって　$6\leqq x\leqq 12$

したがって，① の解は　$6\leqq x\leqq 12$

(2)　$k>0$ であるから，② より　$-k\leqq x-4\leqq k$

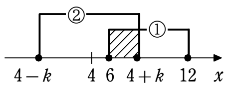
よって　$4-k\leqq x\leqq 4+k$

$k>0$ から　$4-k<4$

①，② をともに満たす実数 x が存在するための条件は

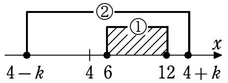
$6\leqq 4+k$

よって　$k\geqq 2$



(3)　(2) により，① の解が ② の解に含まれるための条件は　$12\leqq 4+k$

よって　$k\geqq 8$



$\boxed{9}$

解答　(1)　(ア)　-1　(イ)　2　(ウ)　1　(エ)　4

(2)　(オ)　3　(カ)　3　(キ)　2

(3)　(ク)　1　(ケ)　7　(コ)　10　(サ)　4　(シ)　7

解説

(1)　$a=1$ のとき，方程式 ① は　$|x-1|=3|x|$

(i)　$x<0$ のとき，方程式は　$-(x-1)=-3x$

これを解くと　$x=-\dfrac{1}{2}$　これは，$x<0$ を満たす。

(ii)　$0\leqq x<1$ のとき，方程式は　$-(x-1)=3x$

これを解くと　$x=\dfrac{1}{4}$　これは，$0\leqq x<1$ を満たす。

(iii)　$x\geqq 1$ のとき，方程式は　$x-1=3x$

これを解くと　$x=-\dfrac{1}{2}$　これは，$x\geqq 1$ を満たさない。

(i)，(ii)，(iii) より，$a=1$ のとき，① の解は　$x=\dfrac{{}^{\text{ア}}-1}{{}^{\text{イ}}2}$，$\dfrac{{}^{\text{ウ}}1}{{}^{\text{エ}}4}$

(2)　(i)　$x<0$ のとき，方程式は　$-a(x-a)=-3x$

これを解くと，$a\fallingdotseq 3$ のとき　$x=\dfrac{a^2}{a-3}$

$a<3$ のとき，これは，$x<0$ を満たす。

(ii)　$0\leqq x<a$ のとき，方程式は　$-a(x-a)=3x$

これを解くと　$x=\dfrac{a^2}{a+3}$　これは，$0\leqq x<a$ を満たす。

(iii)　$x\geqq a$ のとき，方程式は　$a(x-a)=3x$

これを解くと，$a\fallingdotseq 3$ のとき　$x=\dfrac{a^2}{a-3}$

$a>3$ のとき，これは，$x\geqq a$ を満たす。

(i)，(ii)，(iii) より，① の解の個数は，$a\fallingdotseq 3$ のとき 2 個，$a=3$ のとき 1 個となる。

したがって，① の解の個数が 1 個のとき，$a={}^{\text{オ}}3$ であり，その解は

$$x=\frac{a^2}{a+3}=\frac{3^2}{3+3}=\frac{{}^{\text{カ}}3}{{}^{\text{キ}}2}$$

(3)　$x=2$ が ① の解であるとき　$a|2-a|=6$　……②

[1]　$0<a<2$ のとき，方程式 ② は

$a(2-a)=6$　すなわち　$a^2-2a+6=0$

2 次方程式 $a^2-2a+6=0$ の判別式を D とすると $D=(-2)^2-4\cdot1\cdot6=-20<0$ であるから，方程式 ② は実数解をもたない。

[2]　$a\geqq 2$ のとき，方程式 ② は

$-a(2-a)=6$　すなわち　$a^2-2a-6=0$

これを解くと　$a=1\pm\sqrt{7}$

$a\geqq 2$ を満たすのは　$a=1+\sqrt{7}$

[1]，[2] より，$x=2$ が ① の解であるとき　$a={}^{\text{ク}}1+\sqrt{{}^{\text{ケ}}7}$

$a=1+\sqrt{7}$ とする。

$1+\sqrt{7}>3$ であるから，(2) より ① の解は　$x=\dfrac{a^2}{a-3}$，$\dfrac{a^2}{a+3}$

ここで　$$\frac{a^2}{a-3}=\frac{(1+\sqrt{7})^2}{(1+\sqrt{7})-3}=\frac{(2\sqrt{7}+8)(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$$
$$=\frac{14+4\sqrt{7}+8\sqrt{7}+16}{(\sqrt{7})^2-2^2}=10+4\sqrt{7}$$
$$\frac{a^2}{a+3}=\frac{(1+\sqrt{7})^2}{(1+\sqrt{7})+3}=\frac{(2\sqrt{7}+8)(4-\sqrt{7})}{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}$$
$$=\frac{8\sqrt{7}-14+32-8\sqrt{7}}{4^2-(\sqrt{7})^2}=2$$

したがって，① の解は　$x=2$，${}^{\text{コ}}10+{}^{\text{サ}}4\sqrt{{}^{\text{シ}}7}$

$\boxed{10}$

解答　(1)　順に 52，194　(2)　$4+\sqrt{2}$　(3)　$\sqrt{2}-\sqrt{3}-2+\sqrt{6}$　(4)　$\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

解説

(1)　$x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$ とおくと

$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$，

$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

よって　$(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3=x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=4^3-3\cdot1\cdot4=52$

また　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot1=14$

ゆえに　$(2+\sqrt{3})^4+(2-\sqrt{3})^4=x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$
$=14^2-2\cdot1^2=194$

(2)　$$\frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{3+2\sqrt{2}-3}=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}=\frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}{2}$$
$$=(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}=\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$$
$$\sqrt{10+4\sqrt{6}}=\sqrt{10+2\sqrt{24}}=\sqrt{(6+4)+2\sqrt{6\cdot4}}=\sqrt{6}+\sqrt{4}=\sqrt{6}+2$$

よって　$$\frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt{10+4\sqrt{6}}=(\sqrt{2}+2-\sqrt{6})+(\sqrt{6}+2)=4+\sqrt{2}$$

(3)　$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}}=\frac{1}{(\sqrt{2}+2)+(\sqrt{3}+\sqrt{6})}=\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{1}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})\}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-2+\sqrt{6}}{(1-2)(2-3)}=\sqrt{2}-\sqrt{3}-2+\sqrt{6}$$

(4)　$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right)$$
$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})-(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}+\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}$$
$$=\frac{-2\sqrt{5}}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}+\frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{6}-5}+\frac{2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2}=\frac{2\sqrt{30}}{6}=\frac{\sqrt{30}}{3}$$

$\boxed{11}$

解答　$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

解説

$a+b=3$，$ab=1$ から

$$\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b+2\sqrt{ab}}=\frac{3-2}{3+2}=\frac{1}{5}$$

$a>b$ から　$\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}>0$　よって　$\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{12}$

解答　(1)　略　(2)　略

解説

(1)　$x\in B$ ならば　$x=6n+5$ (n は整数) と表される。

このとき　$x=6(n+1)-1=3\cdot2(n+1)-1$

$2(n+1)$ は整数であるから　$x\in A$

よって，$x\in B$ ならば $x\in A$ であるから　$A\supset B$

(2)　[1]　$x\in A$ ならば　$x=2n-1$ (n は整数) と表される。

このとき　$x=2(n-1)+1$

$n-1$ は整数であるから　$x\in B$

よって，$x \in A$ ならば $x \in B$ であるから　$A \subset B$

[2]　$x \in B$ ならば　$x=2n+1$ (n は整数) と表される。

このとき　$x=2(n+1)-1$

$n+1$ は整数であるから　$x \in A$

よって，$x \in B$ ならば $x \in A$ であるから　$A \supset B$

[1]，[2] から　$A=B$

$\boxed{13}$

解答　(1)　$P=\{-3,\ a\}$，$Q=\{1,\ b\}$，$R=\{2a,\ 5b\}$

(2)　負の数 -3；$a=-\dfrac{3}{2}$，$b=-3$

解説

(1)　① から　$(x+3)(x-a)=0$　　よって　$P=\{-3,\ a\}$

② から　$(x-1)(x-b)=0$　　よって　$Q=\{1,\ b\}$

③ から　$(x-2a)(x-5b)=0$　　よって　$R=\{2a,\ 5b\}$

(2)　$P \cap Q \cap R$ がただ 1 つの負の数からなることと，$Q=\{1,\ b\}$ から　$P \cap Q \cap R=\{b\}$

$b=5b$ とすると，$b=0$ となり不適であるから　$b=2a$　……④

$b=a$ とすると，④ から $b=0$ となり不適である。

したがって　$b=-3$

このとき，④ から　$a=-\dfrac{3}{2}$

以上から，求める負の数は -3 であり，そのときの a，b の値は

$$a=-\frac{3}{2},\quad b=-3$$

$\boxed{14}$

解答　5，15，25，35，45

解説

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 49\}$

$50=2\cdot5^2$ であるから　$V=\{2,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 48,\ 5,\ 15,\ 25,\ 35,\ 45\}$

$W=\{2,\ 4,\ \cdots\cdots,\ 48\}$

(i) から　$A \cup \overline{B}=V$

$\overline{A} \cap \overline{B}=\overline{A \cup B}$，(ii) から　$\overline{A \cup B}=W$

よって　$A=(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)=V \cap \overline{W}$

したがって，A の要素は V の要素から W の要素を除いたもので

5，15，25，35，45

$\boxed{15}$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　与えられた命題の対偶は

「a，b がともに 3 の倍数でないならば，ab は 3 の倍数でない」

a，b がともに 3 の倍数でないならば，k，l を整数として $a=3k\pm1$，$b=3l\pm1$ (複号任意) と表される。

このとき　$ab=\begin{cases}(3k+1)(3l\pm1)\\(3k-1)(3l\pm1)\end{cases}=\begin{cases}9kl\pm3k+3l\pm1\\9kl\pm3k-3l\mp1\end{cases}=\begin{cases}3(3kl\pm k+l)\pm1\\3(3kl\pm k-l)\mp1\end{cases}$ (複号同順)

よって，ab は 3 の倍数でない。

したがって，対偶が真であるから，もとの命題は真である。

(2)　ab が 3 の倍数であるから，(1) より a または b は 3 の倍数である。

a が 3 の倍数のとき $b=(a+b)-a$ より，b は 3 の倍数である。

b が 3 の倍数のとき $a=(a+b)-b$ より，a は 3 の倍数である。

したがって，$a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき，a，b はともに 3 の倍数である。

(3)　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ から　$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$

$a+b$，a^2+b^2 がともに 3 の倍数であるから，$2ab$ は 3 の倍数である。

2 と 3 は互いに素であるから，ab は 3 の倍数である。

よって，$a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるから，(2) より，a と b はともに 3 の倍数である。

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$x \in D(m) \cap D(n)$ ならば $x \in D(m+n)$ を示す。

$x \in D(m) \cap D(n)$ より，$x \in D(m)$ かつ $x \in D(n)$ であるから，x は m の約数かつ n の約数である。

すなわち　$m=xm_1$ かつ $n=xn_1$ (m_1，n_1 は自然数)

このとき　$m+n=xm_1+xn_1=x(m_1+n_1)$

よって，x は $m+n$ の約数であるから　$x \in D(m+n)$

したがって　$D(m) \cap D(n) \subset D(m+n)$

(2)　$y \in D(m) \cup D(n)$ ならば $y \in D(mn)$ を示す。

$y \in D(m) \cup D(n)$ より，$y \in D(m)$ または $y \in D(n)$ であるから，y は m の約数または n の約数である。

すなわち　$m=ym_2$ または $n=yn_2$ (m_2，n_2 は自然数)

$m=ym_2$ のとき　$mn=(ym_2)n=y(m_2n)$

$n=yn_2$ のとき　$mn=m(yn_2)=y(mn_2)$

よって，いずれの場合も y は mn の約数であるから　$y \in D(mn)$

したがって　$D(m) \cup D(n) \subset D(mn)$

(3)　$m \in D(n)$ のとき，$n=mn_3$ (n_3 は自然数) と表される。

このとき，$D(m)$ の任意の要素 z について，$m=zm_3$ (m_3 は自然数) と表される。

よって　$n=mn_3=(zm_3)n_3=z(m_3n_3)$

ゆえに，$z \in D(n)$ であるから　$D(m) \subset D(n)$

逆に，$D(m) \subset D(n)$ のとき，m は明らかに $D(m)$ の要素である。

$D(m) \subset D(n)$ であるから　$m \in D(n)$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　略

解説

(1)　$m \in (A \cap B)'$ ならば $m \in (A' \cap B')$ を示す。

$m \in (A \cap B)'$ であるとき，次の [1] または [2] の場合が考えられる。

[1]　m は奇数で　$m \in (A \cap B)$　　[2]　$2m \in (A \cap B)$

[1] のとき，m が奇数で $m \in A$ かつ $m \in B$ であるから

$m \in A'$　かつ　$m \in B'$

[2] のとき，$2m \in A$ かつ $2m \in B$ で，$2m$ は偶数であるから

$m \in A'$　かつ　$m \in B'$

よって，[1]，[2] のいずれの場合にも $m \in (A' \cap B')$ が成り立つ。

したがって　$(A \cap B)' \subset (A' \cap B')$

(2)　仮定より，$7 \notin (A \cap B)$ かつ $14 \notin (A \cap B)$ であるから　$7 \notin (A \cap B)'$

一方，$7 \in A$，$14 \in B$ であるから　$7 \in (A' \cap B')$

すなわち，$A' \cap B'$ に含まれ，$(A \cap B)'$ に含まれない要素 7 が存在する。

したがって　$(A \cap B)' \neq (A' \cap B')$

(3)　$A \neq \varnothing$ であるから，A には最小の要素 n が存在し，n は偶数である。

よって　$\dfrac{n}{2} \in A'$

一方，$\dfrac{n}{2} < n$ であり，n が A の最小の要素であることから　$\dfrac{n}{2} \notin A$

すなわち，A' に含まれ，A に含まれない要素 $\frac{n}{2}$ が存在する。

したがって　　$A' \neq A$

3

解答　略

解説

[1]　$a \in A$ ならば　　$a=2m+3n$　($m \in Z$，$n \in Z$)　　と表される。

また　　　　$2m+3n=3(-m+n)+5m$

$-m+n \in Z$，$m \in Z$ であるから　　$a \in B$

よって　　　$A \subset B$

[2]　$b \in B$ ならば　　$b=3m+5n$　($m \in Z$，$n \in Z$)　　と表される。

また　　　　$3m+5n=2n+3(m+n)$

$n \in Z$，$m+n \in Z$ であるから　　$b \in A$

よって　　　$B \subset A$

[1]，[2] より，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるから　　$A=B$

4

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　方程式が有理数の解 $x=\alpha$ をもつとする。$\alpha=0$ のとき，α は整数である。

$\alpha>0$ のとき，$\alpha=\frac{n}{m}$ (m，n は互いに素な自然数) とおく。

$x=\alpha$ は方程式の解であるから　　$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0$

すなわち　　$\left(\frac{n}{m}\right)^3+a\left(\frac{n}{m}\right)^2+b\cdot\frac{n}{m}+c=0$

ゆえに　　　$n^3+amn^2+bm^2n+cm^3=0$

よって　　　$n^3=-m(an^2+bmn+cm^2)$

a，b，c，m，n は整数であるから，n^3 は m の倍数である。また，m と n は互いに素であるから，m と n^3 も互いに素である。

したがって，$m=1$ であり，α は整数である。

$\alpha<0$ のときは $\alpha=-\frac{n}{m}$ とおくと，同様に示される。

(2)　方程式 $x^3+2x^2+2=0$ が有理数の解 $x=\alpha$ をもつと仮定する。

(1) から，α は整数である。

$\alpha^3+2\alpha^2+2=0$ から　　$\alpha^2(\alpha+2)=-2$

α，α^2 は整数で，$\alpha^2 \geqq 0$ であるから　　$(\alpha^2,\ \alpha+2)=(1,\ -2)$，$(2,\ -1)$

ところが，これを満たす整数 α は存在しないから，矛盾。

よって，$x^3+2x^2+2=0$ は有理数の解をもたない。

5

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　p，q の少なくとも一方が偶数であると仮定する。

このとき，$\frac{q}{p}$ は既約分数であるから，p，q の一方が偶数で他方が奇数となる。

ここで，$a\left(\frac{q}{p}\right)^2+b\cdot\frac{q}{p}+c=0$ であるから　　$aq^2+bpq+cp^2=0$　……①

a，b，c はすべて奇数であり，p，q の一方だけが偶数で他方が奇数であるから，bpq は偶数である。

また，aq^2 と cp^2 の一方が偶数で他方が奇数となる。

よって，$aq^2+bpq+cp^2$ は奇数となる。

これは ① の右辺が 0 であることに矛盾する。

したがって，p と q はともに奇数である。

(2)　この方程式が有理数の解をもつと仮定すると，その解は $\frac{q'}{p'}$ (p'，q' は互いに素である整数，$p' \neq 0$) と表される。

(1) から，p'，q' はともに奇数である。

このとき，(1) と同様にして　　$aq'^2+bp'q'+cp'^2=0$　……②

ここで，a，b，c は奇数であるから，aq'^2，$bp'q'$，cp'^2 はすべて奇数となる。

よって，② の左辺は奇数となり，右辺が 0 であることに矛盾する。

したがって，この 2 次方程式は有理数の解をもたない。

6

解答　$a+b$，$a-b$，c が偶数

解説

[1]　条件 (A) で $x=0$，$x=1$，$x=-1$ とすると，

$$f(0)=c,\ f(1)=a+b+c,\ f(-1)=a-b+c$$

は偶数である。

ゆえに，l，m，n を整数として

$$c=2l,\quad a+b+c=2m,\quad a-b+c=2n$$

と表される。これを解いて

$$a=m+n-2l,\quad b=m-n,\quad c=2l\quad \cdots\cdots①$$

[2]　逆に，① であるとき

$$f(x)=(m+n-2l)x^2+(m-n)x+2l=m(x^2+x)+n(x^2-x)+2l(1-x^2)$$
$$=mx(x+1)+nx(x-1)+2l(1-x^2)$$

x が整数のとき，連続 2 整数の積 $x(x+1)$，$x(x-1)$ は偶数であり，$2l(1-x^2)$ も偶数であるから，$f(x)$ の値は偶数になる。

したがって，求める必要十分条件は ① が成り立つことである。

① は，$c=2l$，$a+b=2(m-l)$，$a-b=2(n-l)$ と同値であるから，求める必要十分条件は　　　　$a+b$，$a-b$，c が偶数

7

解答　(命題 p) 正しくない，理由略　(命題 q) 正しい，証明略

解説

(命題 p)　正しくない。

(理由)　ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数であると仮定すると，

$\sqrt{n}=\frac{a}{b}$　(a と b は互いに素な自然数)　　と表される。

両辺を 2 乗すると　　$n=\frac{a^2}{b^2}$

a と b は互いに素であるから，a^2 と b^2 も互いに素である。

よって，n が自然数となるのは，$b^2=1$ のときであるから

$$n=a^2\quad\cdots\cdots①$$

同様に　　　　$n+1=c^2$　……②　(c は自然数，$c>a \geqq 1$)　　とおける。

②$-$① から　　$1=c^2-a^2$　　変形すると　　$(c+a)(c-a)=1$　……③

$c>a \geqq 1$ より　　　$c+a \geqq 3$，$c-a \geqq 1$

これと ③ を同時に満たす自然数 a，c は存在しないから，矛盾する。

したがって，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数になることはない。

別解　(一般に，自然数 N に対して，$\sqrt{N}$ が有理数のとき，$\sqrt{N}$ は自然数となることを利用する。)

n が自然数となるのは，$b^2=1$ すなわち $b=1$ のときであるから　　$\sqrt{n}=a$

ここで　　　　$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}$ が有理数のとき，$\sqrt{n}$ は自然数であるから　　$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>1$

よって　　$0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<1$

2 数 $\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ の差の絶対値が 1 より小さいから，$\sqrt{n}$ が自然数のとき，$\sqrt{n+1}$ は自然数ではない。すなわち，$\sqrt{n+1}$ は有理数ではない。

同様に，$\sqrt{n+1}$ が自然数のときは，$\sqrt{n}$ は有理数ではない。

したがって，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数になることはない。

(命題 q)　正しい。

(証明)　ある自然数 n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ が有理数であると仮定すると，

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=r$　……④　(r は正の有理数)　　と表される。

④ の両辺に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ を掛けると　　$1=r(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

$r \neq 0$ であるから　　$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\frac{1}{r}$　……⑤

④，⑤ から　　$\sqrt{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)$，$\sqrt{n+1}=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$

よって，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ がともに有理数となり，命題 p が正しくないことに矛盾する。

したがって，すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。