1

(1)　$f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+3(1-2\sin^2 x)=-4\sin^2 x+4\sin x+3$

$=-4t^2+4t+3$

(2)　$0\leqq x<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq 1$

$g(t)=-4t^2+4t+3$ とおくと　$g(t)=-4\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+4$

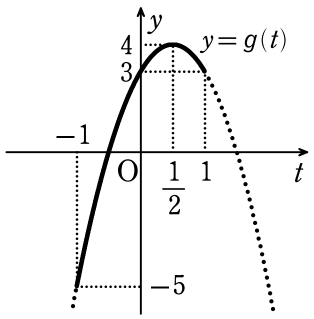
よって，$g(t)$ すなわち $f(x)$ は，$t=\dfrac{1}{2}$ すなわち

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 4 をとり，$t=-1$ すなわち

$\sin x=-1$ のとき最小値 -5 をとる。

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=\dfrac{\pi}{6}，\dfrac{5}{6}\pi$

$\sin x=-1$ のとき　$x=\dfrac{3}{2}\pi$



(3)　$\sin x=t$ …… ① を満たす $x(0\leqq x<2\pi)$ の個数は次のようになる。

$-1<t<1$ のとき　2 個

$t=-1，1$ のとき　1 個

$t<-1，1<t$ のとき　① を満たす x は 存在しない

よって，$f(x)=a$ が相異なる 4 個の解をもつ条件は，$g(t)=a$ が $-1<t<1$ の範囲で異なる 2 個の解をもつことである。

$y=g(t)$ のグラフから，求める a の値の範囲は　$3<a<4$

2

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2-3a，y=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ から y を消去して整理すると

$$x^2-2ax+a^3+a^2-3a=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$y=\dfrac{1}{2}x^2-3a，y=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ が異なる 2 点で交わるから，x の 2 次方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつ。

よって，① の判別式 D について　$D>0$

$$\frac{D}{4}=a^2-(a^3+a^2-3a)=-a^3+3a=-a(a^2-3)>0$$

$a>0$ であるから　$a^2-3<0$　　これを解くと　$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$

$a>0$ であるから　$0<a<\sqrt{3}$

(2)　2 次方程式 ① の解を $\alpha，\beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと

$$S(a)=\int_\alpha^\beta\left\{-\frac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2-\left(\frac{1}{2}x^2-3a\right)\right\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}$$

ここで，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2a，\alpha\beta=a^3+a^2-3a$

よって　$S(a)=\dfrac{1}{6}\{(2a)^2-4(a^3+a^2-3a)\}^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{6}\cdot 4^{\frac{3}{2}}(3a-a^3)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{4}{3}(3a-a^3)^{\frac{3}{2}}$

(3)　$f(a)=3a-a^3$ とおくと　$f'(a)=3-3a^2=-3(a+1)(a-1)$

$f'(a)=0$ とすると　$a=-1，1$

$0<a<\sqrt{3}$ における $f(a)$ の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

よって，$f(a)$ は $a=1$ のとき最大値 2 をとる。

$f(a)$ が最大となるとき，$S(a)$ も最大となる。

$$S(1)=\frac{4}{3}\times 2^{\frac{3}{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

よって，$S(a)$ は $a=1$ のとき最大値 $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ をとる。

$\boxed{3}$

(1)　袋の中にある白球の個数は　　$10-6=4$（個）

よって　　$P_{10}=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_6}=\dfrac{8}{21}$

(2)　$P_n=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-6}\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_6}$，$P_{n+1}=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6}$ であるから

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-5}\mathrm{C}_3}{{}_{n+1}\mathrm{C}_6}\cdot\frac{{}_n\mathrm{C}_6}{{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_{n-6}\mathrm{C}_3}=\frac{(n-5)(n-5)}{(n+1)(n-8)}=\frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)}$$

(3)　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$ とすると，(2) から　　$\dfrac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)}>1$

$n\geqq 9$ より，$n-8>0$ であるから　　$(n-5)^2>(n+1)(n-8)$

よって　　$-3n+33>0$

ゆえに　　$n<11$

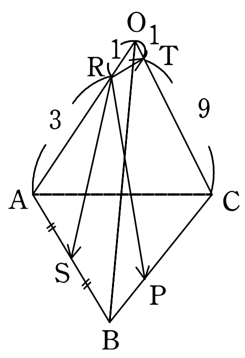
$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=1$ とすると　　$n=11$

$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}<1$ とすると　　$n>11$

以上から　　$P_9<P_{10}<P_{11}=P_{12}$，$P_{12}>P_{13}>\cdots\cdots$

よって，P_n が最大となる n は　　$n=11$，12

$\boxed{4}$



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{4}\vec{a}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{RT}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{10}\vec{c}-\dfrac{1}{4}\vec{a}=-\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{10}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}-\dfrac{1}{4}\vec{a}$

$\qquad=-\dfrac{1}{4}\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

(3)　点 P が 3 点 R, S, T で決まる平面上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{RS}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{RT}}$（$\alpha$, β は実数）とおける．

よって

$-\dfrac{1}{4}\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}=\dfrac{\alpha}{4}\vec{a}+\dfrac{\alpha}{2}\vec{b}-\dfrac{\beta}{4}\vec{a}+\dfrac{\beta}{10}\vec{c}$

$-\dfrac{1}{4}\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}=\left(\dfrac{\alpha-\beta}{4}\right)\vec{a}+\dfrac{\alpha}{2}\vec{b}+\dfrac{\beta}{10}\vec{c}$（$\alpha$, β は定数）

とおける．ここで $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は四面体の 3 辺で表されるベクトルだから

$-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\alpha-\beta}{4}$ …… ①，$1-t=\dfrac{\alpha}{2}$ …… ②，$t=\dfrac{\beta}{10}$ …… ③

①, ②, ③ から $t=\dfrac{1}{4}$, $\alpha=\dfrac{3}{2}$, $\beta=\dfrac{5}{2}$　ゆえに　$t=\dfrac{1}{4}$　である．

1

(1)　$xy+yz+zx=xyz$ の両辺を xyz（$\neq 0$）で割ると

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$0<x\leqq y\leqq z$ より $\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$ であるから

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$$

すなわち　$1\leqq\dfrac{3}{x}$　　よって　$x\leqq 3$

(2)　x は自然数であるから，(1) より　$x=1,\ 2,\ 3$

[1]　$x=1$ のとき　① から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

これを満たす自然数 y，z は存在しない。

[2]　$x=2$ のとき　① から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{2}{y}$ より $y\leqq 4$ で，$x\leqq y$ であるから　$y=2,\ 3,\ 4$

$y=2$ のとき，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ から　これを満たす自然数 z は存在しない。

$y=3$ のとき，$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ から　$z=6$（$y\leqq z$ を満たす）

$y=4$ のとき，$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ から　$z=4$（$y\leqq z$ を満たす）

[3]　$x=3$ のとき　① から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{2}{y}$ より $y\leqq 3$ で，$x\leqq y$ であるから　$y=3$

このとき，$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$ から　$z=3$（$y\leqq z$ を満たす）

[1]～[3] から，求める自然数 x，y，z の組は

$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

2

(1)　与えられた連立不等式から

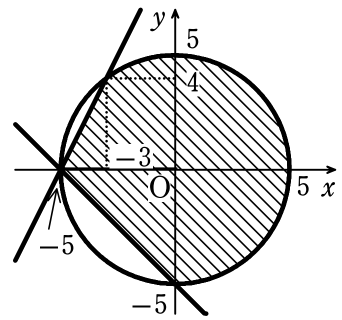
$$A\begin{cases}x^2+y^2\leqq 25\\ y\geqq 2x+10\\ y\leqq -x-5\end{cases}\quad \text{または}\quad B\begin{cases}x^2+y^2\leqq 25\\ y\leqq 2x+10\\ y\geqq -x-5\end{cases}$$

求める領域は，A の表す領域と B の表す領域の和集合である。境界線の交点の座標は

$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ y=2x+10\end{cases}$ を解いて　$(x,\ y)=(-5,\ 0),\ (-3,\ 4)$

$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ y=-x-5\end{cases}$ を解いて　$(x,\ y)=(-5,\ 0),\ (0,\ -5)$

$\begin{cases}y=2x+10\\ y=-x-5\end{cases}$ を解いて　$(x,\ y)=(-5,\ 0)$



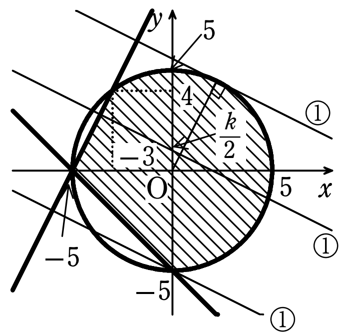
したがって，求める領域は，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。

(2)　$x+2y=k$ …… ① とおくと，① は，

傾き $-\dfrac{1}{2}$，y 切片 $\dfrac{k}{2}$

の直線を表す。



この直線が (1) の領域と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

k が最大となるのは，図から，直線 ① が第 1 象限で円 $x^2+y^2=25$ と接するときである。

直線 ① に垂直で円の中心 $(0,\ 0)$ を通る直線の方程式は $y=2x$ であるから，これと $x^2+y^2=25$ を連立して

$x^2+(2x)^2=25$　　ゆえに　$x=\pm\sqrt{5}$

第 1 象限で接するから　$x=\sqrt{5}$　　よって，接点の座標は　$(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$

また，k の値が最小となるのは，境界線 $y=-x-5$ の傾きは -1 で $-1<-\dfrac{1}{2}$ であるから，直線 ① が点 $(0,\ -5)$ を通るときである。

したがって，$x+2y$ は

$(x,\ y)=(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$ のとき最大値　$M=\sqrt{5}+2\cdot 2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$；

$(x,\ y)=(0,\ -5)$ のとき最小値　$m=0+2\cdot(-5)=-10$

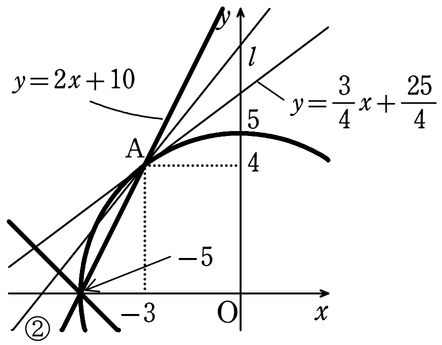
をとる。

(3)　$ax+y=l$ ……② とおくと，② は，

傾き $-a$，y 切片 l の直線を表す。

A $(-3,\ 4)$ とする。

l が点 A で最大となるとき，直線 ② は点 A における円の接線と直線 $y=2x+10$ の間（一致する場合も含む）にある。



点 A における円 $x^2+y^2=25$ の接線の方程式は　　$-3x+4y=25$

すなわち　　$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{25}{4}$

直線 ② が点 A における円の接線と一致するとき

$$-a=\frac{3}{4}\quad \text{すなわち}\quad a=-\frac{3}{4}$$

また，直線 ② が直線 $y=2x+10$ と一致するとき

$$-a=2\quad \text{すなわち}\quad a=-2$$

したがって，求める a の範囲は　　$-2 \leqq a \leqq -\dfrac{3}{4}$