高 3 物理総合 S～前期第 11 回～ ＜解答＞◆ドップラー効果◆

＜予習用問題＞

【１】（１）音源 S の出す音の周波数は f_0 なので，時間 ΔT の間に発する波の個数を Δn_1 とすると，$\Delta n_1 = f_0 \Delta T$

（２）音速は V なので，時刻 t_s に発射された波面が，時刻 $t_s + \Delta T$ の瞬間までに進む距離を ΔX_1 とすると，この間の経過時間は ΔT（$= (t_s + \Delta T) - t_s$）なので，

$\Delta X_1 = V\Delta T$

一方，この間の音源 S の移動距離を Δx_1 とすると，音源 S の速さは v_0 なので，

$\Delta x_1 = v_0 \Delta T$

ここで，音源 S から出た音と音源 S はいずれも観測者に向かって進んでいるので，求める距離を ΔL_1 とすると，

$\Delta L_1 = \Delta X_1 - \Delta x_1 = (V - v_0)\,\Delta T$

（３）時刻 $t_s + \Delta T$ のとき Δn_1 個の音波の長さは ΔL_1 なので，ΔL_1 の中にある音波の波長を λ_1 とすると，$\Delta L_1 = \lambda_1 \times \Delta n_1$　　$\therefore \lambda_1 = \dfrac{\Delta L_1}{\Delta n_1} = \dfrac{(V - v_0)\,\Delta T}{f_0 \Delta T} = \dfrac{V - v_0}{f_0}$

ここで，観測者 O は静止しているのでえ，観測者 O に対する音速は V である。また，観測者 O に向かう音波の波長は λ_1 であるから，このとき観測者 O が聞く音の周波数を f_1 とすると，$f_1 = \dfrac{V}{\lambda_1} = \dfrac{V}{\dfrac{(V - v_0)}{f_0}} = \dfrac{V}{V - v_0} f_0$

〔Ⅱ〕（１）$\Delta n_2 = f_0 \Delta T$

（２）時刻 t_s のとき音源の速さを v_s とすると，$v_s = at_s + v_0$

また，時間 ΔT（$= (t_s + \Delta T) - t_s$）の間，音源 S の速さは v_s で一定とみなせるので，〔Ⅰ〕（２）より，求める距離を ΔL_2 とすると，$\Delta L_2 = (V - v_s)\Delta T = \{V - (at_s + v_0)\}\Delta T$

（３）時刻 t_s の瞬間に発射された音を観測者 O が聞くときの波長を λ_2 とすると，

$\lambda_2 = \dfrac{V - v_s}{f_0} = \dfrac{V - (at_s + v_0)}{f_0}$

よって，観測者 O が聞く音の周波数を f_2 とすると，$f_2 = \dfrac{V}{\lambda_2} = \dfrac{V}{V - (at_s + v_0)} f_0$

（４）求める時刻を t_0 とすると，

$D = \dfrac{1}{2}at_0^2 + v_0 t_0$　より $at_0^2 + 2v_0 t_0 - 2D = 0$　$\therefore t_0 = \dfrac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2aD}}{a}$　（$\because t_0 > 0$）

（５）$0 \leqq t_s \leqq \dfrac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2aD}}{a}$ であるから，辺々 a をかけて整理すると，

$0 \leqq at_s \leqq -v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2aD}$　　$\therefore v_0 \leqq at_s + v_0 \leqq \sqrt{v_0^2 + 2aD}$

これと，〔Ⅱ」（３）より $\dfrac{V}{V - v_0} f_0 \leqq f \leqq \dfrac{V}{V - \sqrt{v_0^2 + 2aD}}$

〔Ⅲ〕（１）時刻 t_s のときの音源 S から観測者 O までの距離を x_s とすると，

$$x_s = D - \left(\frac{1}{2}at_s{}^2 + v_0 t_s\right)$$

$$\Delta t_s = \frac{x_s}{V} = \frac{1}{V}\left\{D - \left(\frac{1}{2}at_s{}^2 + v_0 t_s\right)\right\}$$

（２）t，t_s，Δt_s の間には $t = t_s + \Delta t_s$ の関係があることと，〔Ⅲ〕（１）より，

$$t = t_s + \frac{1}{V}\left\{D - \left(\frac{1}{2}at_s{}^2 + v_0 t_s\right)\right\} \quad \therefore at_s{}^2 - 2(V - v_0)t_s + 2(Vt - D) = 0$$

$$\therefore t_s = \frac{V - v_0 - \sqrt{(V - v_0)^2 - 2a(Vt - D)}}{a} \quad (\because V > at_s + v_0)$$

（３）〔Ⅲ〕（２）より $V - (at_s + v_0) = \sqrt{(V - v_0)^2 - 2a(Vt - D)}$ および，〔Ⅱ〕（３）より，

求める周波数を f_3 とすると，$f_3 = \dfrac{V}{\sqrt{(V - v_0)^2 - 2a(Vt - D)}} f_0$

【２】〔Ⅰ〕

（１）音源が時間Δtの間に発した音波の個数は$f_0\Delta t$である。観測者

はこの音波を時間Δt_1の間に観測するので

$$f_1\Delta t_1 = f_0\Delta t \quad \therefore f_1 = \frac{\Delta t}{\Delta t_1}f_0$$

（２）与えられた２式$d = ct_1$，$d' = c(t_1 + \Delta t_1 - \Delta t)$より，$d - d'$を求めると

$$d - d' = c\Delta t - c\Delta t_1$$

また，音源の時間Δtの間での等速度運動から$d - d' = v\Delta t$

したがって，この２式より，$d - d'$を消去すると

$$c\Delta t - c\Delta t_1 = v\Delta t \quad \therefore \frac{\Delta t}{\Delta t_1} = \frac{c}{c - v}$$

（３）（２）で求めた$\dfrac{\Delta t}{\Delta t_1}$を（１）の結果に代入すると　$f_1 = \dfrac{c}{c - v}f_0$

〔Ⅱ〕

（４）A 点で時刻$t = 0$に音源が発した音に着目する。初めの，風が吹いておらず音速がcのときの時間がt_0，その後の，風が吹いて音の伝わる速さが$c + w$になっているときの時間が$t_2 - t_0$なので$d = ct_0 + (c + w)(t_2 - t_0)$

（５）A′点で時刻$t = \Delta t$に音源が発した音に着目する。初めの，風が吹いておらず音速がcのときの時間が$t_0 - \Delta t$，その後の，風が吹いて音の伝わる速さが$c + w$になっているときの時間が$t_2 + \Delta t_2 - t_0$なので$d' = c(t_0 - \Delta t) + (c + w)(t_2 + \Delta t_2 - t_0)$

（６）（４）と（５）で求めた２式より，$d - d'$を求めると

$$d - d' = c\Delta t - (c + w)\,\Delta t_2$$

また，音源の時間Δtの間での等速度運動から$d - d' = v\Delta t$

したがって，この２式より，$d - d'$を消去すると

$$c\varDelta t-(c+w)\varDelta t_2 = v\varDelta t \quad \therefore \frac{\varDelta t}{\varDelta t_2}=\frac{c+w}{c-v}$$

（７）（１）と同様に考え，f_2をf_0，$\varDelta t$，$\varDelta t_2$ を用いて表すと

$f_2=\dfrac{\varDelta t}{\varDelta t_2}f_0$　したがって，この式に（６）で求めた$\dfrac{\varDelta t}{\varDelta t_2}$を代入すると$f_2=\dfrac{c+w}{c-v}f_0$

（８）観測者が聞く振動数$f_2{}'$の音は，風が吹き始めてから音源が発した音である。
この場合，音の伝わる速さは常に$c+w$となるので，この音の伝わる速さを用いて〔Ⅰ〕と同様に考えればよい。すなわち，（３）の結果の音速cのところに$c+w$が当てはまる。

したがって$f_2'=\dfrac{c+w}{c+w-v}f_0$

〔Ⅲ〕

（９）A 点で時刻$t=0$に音源が発した音の波面の中心は，時間t_3の間に真横から吹く速さwの風によって，B 点まで移動している。したがって　$s=wt_3$

(10) 波面の中心が時刻$t=t_3$に B 点にあり，この時刻に，A 点で時刻$t=0$に音源が発した音の波面が O 点に達している。この波面は，時間t_3の間に音速cで音が B 点から O 点まで伝わったことを意味する。したがって　$s'=ct_3$

(11) 三平方の定理より$d=\sqrt{s'^2-s^2}$

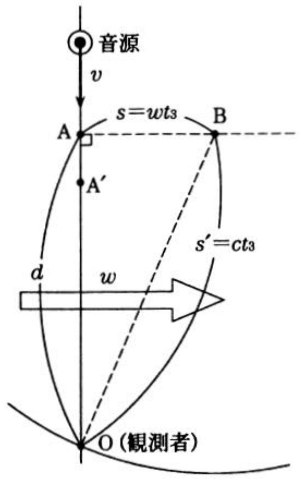
（９），(10) より$d=\sqrt{(ct_3)^2-(wt_3)^2}=\sqrt{c^2-w^2}\,t_3$

(12) (11) より，A 点から O 点の向きに伝わる音の速さは$\sqrt{c^2-w^2}$である。この音の伝わる速さを用いて，〔Ⅰ〕と同様に考えればよい。したがって

$$f_3=\frac{\varDelta t}{\varDelta t_3}f_0 \quad \frac{\varDelta t}{\varDelta t_3}=\frac{\sqrt{c^2-w^2}}{\sqrt{c^2-w^2}-v}$$

この 2 式より，$\dfrac{\varDelta t}{\varDelta t_3}$を消去すると

$$f_3=\frac{\sqrt{c^2-w^2}}{\sqrt{c^2-w^2}-v}f_0$$



【３】〔Ⅰ〕（ア）

〔Ⅱ〕直接音について，$f_1=f_0$，

反射音について，断崖で跳ね返るときの振動数は$f'=\dfrac{V}{V-u}f_0$ なので，

A 君が観測する反射音は$f_2=\dfrac{V+u}{V}f'=\dfrac{V+u}{V-u}f_0$

〔Ⅲ〕時刻 $t=0$ に警笛が鳴り始めるから，振動数f_1の警笛音に対して，

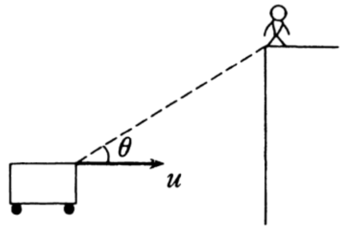
$Vt_{A1}+ut_{A1}=L \quad \therefore t_{A1}=\dfrac{L}{V+u}$

また，振動数f_2の警笛音に対して

$Vt_{A2}+ut_{A2}=2X+L \quad \therefore t_{A2}=\dfrac{2X+L}{V+u}$

〔Ⅳ〕右図の場合，B 君に聞こえた警笛音の振動数は

$f_B = \dfrac{V}{V - u\cos\theta} f_0$



列車が進むほど，角θは大きくなるので，$\cos\theta$ の値は小さくなり，f_B は単調減少となる。$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $f_B = f_0$ となるから，ア

〔Ⅴ〕B 君に対して最初の警笛音が伝わる距離は$\sqrt{X^2 + H^2}$ なので，$t_B = \dfrac{\sqrt{X^2+H^2}}{V}$

〔Ⅵ〕列車の先頭がトンネルの入り口に達する時刻は$\dfrac{X}{u}$ であり，このときに出た最後の警笛音が B 君に達する時刻を t_B' とすると，$t_B' = \dfrac{X}{u} + \dfrac{H}{V}$ なので，B 君に警笛音が聞こえた時間間隔Δt_B は$\Delta t_B = t_B' - t_B = \dfrac{X}{u} + \dfrac{H}{V} - \dfrac{\sqrt{X^2+H^2}}{V} = \dfrac{X}{u} + \dfrac{H - \sqrt{X^2+H^2}}{V}$

よって，警笛が鳴っていた時間間隔$\Delta t = \dfrac{X}{u}$ と比較すると$\dfrac{\sqrt{X^2+H^2} - H}{V}$ だけ短い。

〔Ⅶ〕列車の先頭がトンネルの入り口に達する時刻は$\dfrac{X}{u}$ であり，このときに出た最後の警笛音が A 君に達する時刻を t_A'とすると，$(V+u)\left(t_A' - \dfrac{X}{u}\right) = L$ なので，

$t_A' = \dfrac{X}{u} + \dfrac{L}{V+u}$ となる。よって，A 君に警笛音が聞こえた時間間隔Δt_A は

$\Delta t_A = t_A' - t_A = \dfrac{X}{u} + \dfrac{L}{V+u} - \dfrac{L}{V+u} = \dfrac{X}{u}$ である。$u = \dfrac{V}{10}$，$H = X$ とすると，

$\Delta t_A = \dfrac{X}{u} = \dfrac{10X}{V}$，$\Delta t_B = \dfrac{X}{u} + \dfrac{H - \sqrt{X^2+H^2}}{V} = \dfrac{10X}{V} + \dfrac{X - \sqrt{2}X}{V} = \dfrac{(11-\sqrt{2})X}{V}$

よって$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = \dfrac{11-\sqrt{2}}{10}$ 倍

＜演習問題＞

【１】

〔Ⅰ〕片方が閉じた管で，管の長さを調節できるものを用意し，共鳴するときの長さを測定する。管内の気柱が最初に共鳴する点 A，次に共鳴する点 B を探すと，$\lambda_0 = 2\mathrm{AB}$ である。

〔Ⅱ〕気温が$(\theta_0 - \Delta\theta)$の夜における音速は $c = c_0 + a\{(\theta_0 - \Delta\theta) - \theta_0\} = c_0 - a\Delta\theta$ である。笛から出る音の波長は，気温が変化してもλ_0 のままなので，場所 B にいる子供のたて笛から出る音について $c_0 - a\Delta\theta = (f_0 - \Delta f_n)\lambda_0$ が成立。

また，$c_0 = f_0\lambda_0$ なので，$a\Delta\theta = \lambda_0\Delta f_n$　　$\therefore \Delta\theta = \dfrac{\lambda_0\Delta f_n}{a} = \dfrac{c_0\Delta f_n}{af_0}$ [K]

〔Ⅲ〕ブランコの台の速さは最下点で最大になるが，その速さを v_0 [m/s]とする。

最小の振動数のとき，台は最下点を B から遠ざかる向きに通過する。

$$f_0 - \Delta f = \frac{c_0}{c_0 + v_0} f_0 = f_0\left(1+\frac{v_0}{c_0}\right)^{-1} \fallingdotseq f_0\left(1-\frac{v_0}{c_0}\right) \cdots ①$$

最大の振動数のとき，台は最下点を B に近づく向きに通過する。

$$f_0 + \Delta f = \frac{c_0}{c_0 - v_0} f_0 = f_0\left(1-\frac{v_0}{c_0}\right)^{-1} \fallingdotseq f_0\left(1+\frac{v_0}{c_0}\right) \cdots ②$$

②－①より $2\Delta f = 2\dfrac{f_0 v_0}{c_0}$　　$\therefore v_0 = \dfrac{c_0\Delta f}{f_0}$ が得られる。台が最下点を B に近づく向きに

通過する時刻を $t = 0$ とすると，B に近づく向きを正とした速度は

$$v = v_0\cos\frac{2\pi}{T}\,t = \frac{c_0\Delta f}{f_0}\cos\frac{2\pi}{T}\,t \text{ [m/s]}$$

〔Ⅳ〕ブランコの水平な支持棒の地面からの高さ H は，ブランコの綱の長さ l と，

ブランコの台の地面からの高さ h の和である。綱の質量を無視すると，ブランコは

単振り子とみなせるので，$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$　　$\therefore l = \dfrac{gT^2}{4\pi^2}$ である。

　また，振動数$(f_0 + \Delta f)$の音が時間ΔT の間だけ続くのは，最下点を B に近づく向きに

通過する瞬間に落ちたためと考えられる。落下時間をΔT_0 とすると，

$$f_0\Delta T_0 = (f_0 + \Delta f)\Delta T \quad \therefore \Delta T_0 = \left(1+\frac{\Delta f}{f_0}\right)\Delta T$$ となるから

$$h = \frac{1}{2}g\,(\Delta T_0)^2 = \frac{1}{2}g(\Delta T)^2\left(1+\frac{\Delta f}{f_0}\right)^2$$ である。

よって $H = l + h = \dfrac{g}{2}\left\{\dfrac{T^2}{2\pi^2} + (\Delta T)^2\left(1+\dfrac{\Delta f}{f_0}\right)^2\right\}$ [m]