高 3 物理総合 S～夏期講習会第 1 回～ ＜解答＞◆荷電粒子①◆

＜予習用問題＞

【１】問 1　（ア）ローレンツ

（イ）磁束密度 B[Wb/m^2]の磁界Φを磁界に垂直な向きに速さv_0[m/s]で運動するq[C]の電荷は，qv_0B[N]のローレンツ力を受ける。

一方，円運動の加速度は$\frac{{v_0}^2}{r_0}$ [m/s^2]であるから，運動方程式は

$$M\frac{{v_0}^2}{r_0} = qv_0B$$

（ウ）（イ）より$r_0 = \dfrac{Mv_0}{qB}$ [m]

（エ）イオンがD_1に入ってから点P_1に達するまでの距離はπr_0であるから，その時間は

$$\frac{\pi r_0}{v_0} = \frac{\pi M}{qB} \text{ [s]}$$

（オ）D_1D_2間の電位差U_0[V]で加速される。点P_1P_2間での運動エネルギーの増加はqU_0[J]だから，点P_2での運動エネルギーは　$\frac{1}{2}M{v_0}^2 + qU_0$ [J]

（カ）点P_3P_4間でも同様にqU_0[J]だけ運動エネルギーは増加するから

$$K_1 = \frac{1}{2}M{v_0}^2 + 2qU_0\text{[J]}$$

（キ）$\frac{1}{2}M{v_1}^2 = \frac{1}{2}M{v_0}^2 + 2qU_0$

$$\therefore \quad v_1 = \sqrt{{v_0}^2 + \frac{4qU_0}{M}} \text{ [m/s]}$$

（ク）運動方程式$M\dfrac{{v_1}^2}{r_1} = qv_1B$より$r_1 = \dfrac{Mv_1}{qB} = \dfrac{M}{qB}\sqrt{{v_0}^2 + \dfrac{4qU_0}{M}}$ [m]

（ケ）増加

（コ）軌道半径がR[m]になったとき，イオンの速さをv [m/s]とすると

運動方程式$M\dfrac{v^2}{R} = qvB$より　$v = \dfrac{qBR}{M}$

よって，取り出されるイオンの運動エネルギーは　$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{(qBR)^2}{2M}$ [J]

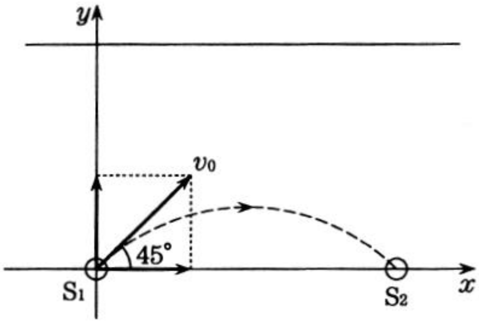
問 2　イオンがD_1またはD_2に入って出るまでの時間は$\dfrac{\pi M}{qB}$[s]で，これはイオンの速さ，円運動の半径に関係なく一定である。イオンがD_1D_2間を通過するごとに加速されればよいので，$\dfrac{\pi M}{qB}$[s]ごとに交流電圧の向きが変わる必要がある。

よって　$\dfrac{\pi M}{qB} = \dfrac{1}{2f} \times (2n-1)$　（n：自然数）　$\therefore$　$f = \dfrac{qB}{2\pi M} \times (2n-1)$

【２】

問１　（１）電位：高い　電場の強さ：$\dfrac{V_0}{d}$

（２）陽イオンにはたらく力は，金属板に垂直で$P_2 \to P_1$の向きに電場から受ける一定の大きさの力だけである。したがって，金属板に垂直な方向には等加速度運動を行い，金属板に平行な方向には等速直線運動を行う。すなわちS_1からS_2へ，放物線の軌道を描いて運動する。



（３）右図のように，x軸，y軸をとる。

y方向の加速度をaとすると，運動方程式より

$$ma = -q\frac{V_0}{d} \qquad \therefore\ a = -\frac{qV_0}{md}$$

陽イオンがS_1から入射するときの速さをv_0，

S_1からS_2に達するまでの時間をtとすると

x方向：$\ell = v_0 \cos 45° \cdot t$

y方向：$0 = v_0 \sin 45° \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{qV_0}{md}\right) \cdot t^2$

これらからtを消去すると　$v_0{}^2 = \dfrac{qV_0 \ell}{md}$

したがって，陽イオンの運動エネルギーK_1は

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_0{}^2 = \frac{qV_0 \ell}{2d} \quad \cdots\cdots（答）$$

（４）陽イオンが到達するy座標の最大値y_0がd未満であれば良い。

すなわち　$y_0 < d$

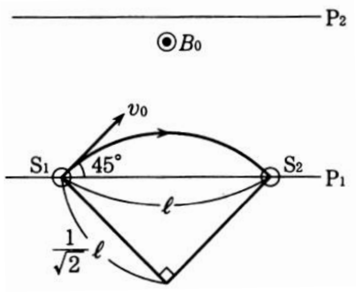
y方向の等加速度直線運動の式より，y方向の速さが 0 になる座標y_0は

$$0 - (v_0 \sin 45°)^2 = 2 \cdot \left(-\frac{qV_0}{md}\right) \cdot y_0 \qquad \therefore\ y_0 = \frac{1}{4}\ell$$

したがって　$d > \dfrac{1}{4}\ell$　……（答）

問２　（１）上向き

（２）陽イオンにはたらく力は，陽イオンの速度の向きに常に垂直なローレンツ力だけである。したがって，紙面を含む面内で，ローレンツ力を向心力として等速円運動を行う。すなわち，S_1からS_2へ，円軌道の一部を描いて運動する。



（３）右図より，陽イオンが描く円軌道の

半径は$\frac{1}{\sqrt{2}}\ell$であるから，運動方程式より

$$m \cdot \frac{{v_0}^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}\ell} = qv_0B_0$$

$$\therefore\ v_0 = \frac{qB_0\ell}{\sqrt{2}m}$$

したがって，陽イオンの運動エネルギーK_2は

$$K_2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{qB_0\ell}{\sqrt{2}m}\right)^2 = \frac{(qB_0\ell)^2}{4m} \quad \cdots\cdots（答）$$

問３　問１と問２の陽イオンの運動エネルギーは等しいから　　$K_1 = K_2$

また，電荷qをeと書き換えると

$$\frac{eV_0\ell}{2d} = \frac{(eB_0\ell)^2}{4m}$$

$$\therefore\ \mathrm{m} = \frac{e{B_0}^2d\ell}{2V_0}$$

すなわち，実験条件のV_0，B_0，d，ℓを測定すれば，mを求めることができる。

注意すべき点は，この方法で求められるのは質量mであり，あるイオンの質量と同じ質量を持つ別のイオンは区別できないことである。　……（答）

＜演習問題＞

【１】　（１）イ：$I = eN\bar{v}S$ [A]

ロ：電子の加速度の大きさを a [m/s^2]とすると $e\dfrac{V}{D} = ma$　より $a = \dfrac{eV}{mD}$

（２）ハ：ロより $v = at + v_0 = \dfrac{eV}{mD}t + v_0$

（３）ニ：電界を加えると電子が動き出し，イオンに衝突していったん静止し再び動き出すが，電子が衝突してから再び衝突するまでの距離を一定であると仮定する。

求める時間を t_0 [s]とおくと　$L = \dfrac{1}{2}a{t_0}^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{eV}{mD}{t_0}^2$　　　$\therefore t_0 = \sqrt{\dfrac{2mDL}{eV}}$ [s]

ホ：$0 < t < t_0$ での速度の大きさは $v = at = \dfrac{eV}{mD}t$

したがって，平均速度の大きさは$\bar{v} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{eV}{mD}t_0 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{eV}{mD}\sqrt{\dfrac{2mDL}{eV}} = \sqrt{\dfrac{eVL}{2mD}}$ [m/s]

ヘ：ホをイに代入すると $I = eN\bar{v}S = eNS\sqrt{\dfrac{eVL}{2mD}}$ [A]

したがって，Iは$V^{\frac{1}{2}}$に比例，すなわち電流は電圧の$\dfrac{1}{2}$乗に比例する。

（4）ト：電子がイオンに衝突してから次の衝突までの時間 T [s]が一定であると仮定

すると，$\frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{eV}{mD}\ T^2$ [m]

チ：$\bar{v}\ = \frac{1}{2}\ aT = \frac{1}{2}\cdot\frac{eV}{mD}\ T$ [m/s]

（5）リ：自由電子の運動を理想気体の分子の熱運動と同様に考えると$\frac{1}{2}m\overline{v^2}\ = \frac{3}{2}k\theta$ [J]

ヌ：リより，電子による寄与は温度の 0 乗に比例する。

【2】〔Ⅰ〕陽子が電極 a，b 間でされる仕事は qV なので，$\frac{1}{2}mv_0^2 = qV$　 よって $v_0 = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$

〔Ⅱ〕（1）陽子は偏向部を通り抜けるとき，z 軸の正の向きに，大きさ qE の力を電界

から受け，この向きに加速度 $a\ = \frac{qE}{m}$ をもつ。y 軸方向は速さ v_0 の等速度運動である

から，c，d 間を通過する時間は $t_1 = \frac{l}{v_0}$ となり，z 軸方向の等加速度直線運動の関係

より，$z_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{qE}{2m}\left(\frac{l}{v_0}\right)^2$

（2）陽子が電極 c に衝突する限界では，$z_1 = h$ となるから，（1）より $h = \frac{qE_1}{2m}\left(\frac{l}{v_0}\right)^2$

$\therefore E_1 = \frac{2hmv_0^2}{ql^2} = \frac{4h}{ql^2}\times\frac{1}{2}mv_0^2$　となる。〔Ⅰ〕より $E_1 = \frac{4h}{ql^2}\times qV = \frac{4hV}{l^2}$

〔Ⅲ〕〔Ⅱ〕式より，$z_1 = \frac{El^2}{4V}$ となる。これは電荷 q や質量 m に依存していないから，

α 粒子を用いても，結果は同じになる。つまり，$z_2 = z_1$

〔Ⅳ〕（1）力のつり合いより $qv_0B_1 = qE_1$　　$\therefore B_1 = \frac{E_1}{v_0}$

また，y 軸方向は等速度運動を行うので $T_1 = \frac{l}{v_0}$

（2）ローレンツ力は仕事をせず，電界から作用する力による仕事の分，陽子の運動

エネルギーが変化するから　　$\frac{1}{2}mv_0^2 + qE_1z_3 = \frac{1}{2}mv_1^2$

よって$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + qE_1z_3 = qV + qE_1z_3 = q(V + E_1z_3)$　　$\therefore v_1 = \sqrt{\frac{2q(V+E_1z_3)}{m}}$

（3）〔Ⅱ〕で求めたように，$B = 0$ のときの通過時間 t_1 は T_1 に等しい。$0 < B < B_1$ のとき，電界から作用する力の方がローレンツ力より大きいから，陽子は$+z$ 方向に偏向する。したがって，$+y$ 方向に加速されることになるから，通過時間 T は T_1 より小さくなる。∴(ア)