1

解答　(1)　$(-2,\ 1,\ -3)$　　(2)　$(-2,\ -1,\ 3)$　　(3)　$(-2,\ -1,\ -3)$

解説

(1)　求める点の座標は　$(-2,\ 1,\ -3)$

(2)　求める点の座標は　$(-2,\ -1,\ 3)$

(3)　求める点の座標は　$(-2,\ -1,\ -3)$

2

解答　(1)　$\left(0,\ \dfrac{1}{4},\ 0\right)$　　(2)　$\left(0,\ -21,\ \dfrac{17}{2}\right)$

解説

(1)　$\mathrm{P}(0,\ y,\ 0)$ とおく。

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ から　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(0-3)^2+(y-0)^2+\{0-(-2)\}^2=\{0-(-1)\}^2+(y-2)^2+(0-3)^2$

整理すると　$1-4y=0$　　ゆえに　$y=\dfrac{1}{4}$

したがって　$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{1}{4},\ 0\right)$

(2)　$\mathrm{Q}(0,\ y,\ z)$ とおく。

$\mathrm{AQ}=\mathrm{BQ}$ から　$\mathrm{AQ}^2=\mathrm{BQ}^2$

よって　$(0-3)^2+y^2+\{z-(-2)\}^2=\{0-(-1)\}^2+(y-2)^2+(z-3)^2$

ゆえに　$9+y^2+(z+2)^2=1+(y-2)^2+(z-3)^2$

整理すると　$4y+10z=1$　……①

$\mathrm{AQ}=\mathrm{CQ}$ から　$\mathrm{AQ}^2=\mathrm{CQ}^2$

よって　$(0-3)^2+y^2+\{z-(-2)\}^2=(0-2)^2+(y-1)^2+z^2$

ゆえに　$9+y^2+(z+2)^2=4+(y-1)^2+z^2$

整理すると　$y+2z=-4$　……②

①，② を解いて　$y=-21,\ z=\dfrac{17}{2}$

したがって　$\mathrm{Q}\left(0,\ -21,\ \dfrac{17}{2}\right)$

3

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$：$\overrightarrow{\mathrm{DC}},\ \overrightarrow{\mathrm{EF}},\ \overrightarrow{\mathrm{HG}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$：$\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{EH}},\ \overrightarrow{\mathrm{FG}}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$：$\overrightarrow{\mathrm{BF}},\ \overrightarrow{\mathrm{CG}},\ \overrightarrow{\mathrm{DH}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{CE}}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　(3)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に等しいベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{DC}},\ \overrightarrow{\mathrm{EF}},\ \overrightarrow{\mathrm{HG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ に等しいベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{EH}},\ \overrightarrow{\mathrm{FG}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ に等しいベクトルは　$\overrightarrow{\mathrm{BF}},\ \overrightarrow{\mathrm{CG}},\ \overrightarrow{\mathrm{DH}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=2\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{DF}}-\overrightarrow{\mathrm{CE}}=(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})-(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=2\vec{a}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}-\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{DF}}-\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

4

解答　(1)　$(5,\ -9,\ -4),\ \sqrt{122}$

解答　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 3,\ -7),\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{14},\ \overrightarrow{\mathrm{CA}}=(1,\ -4,\ 1),\ |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=3\sqrt{2}$

解説

(1)　$-2\vec{a}-(\vec{c}-3\vec{b})=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}=-2(1,\ 2,\ -1)+3(2,\ -1,\ -2)-(-1,\ 2,\ 0)$

$=(-2,\ -4,\ 2)+(6,\ -3,\ -6)-(-1,\ 2,\ 0)$

$=(-2+6+1,\ -4-3-2,\ 2-6-0)$

$=(5,\ -9,\ -4)$

$|-2\vec{a}-(\vec{c}-3\vec{b})|=\sqrt{5^2+(-9)^2+(-4)^2}=\sqrt{122}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-3,\ 2-(-1),\ 3-2)=(-2,\ 3,\ -7)$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(3-2,\ -1-3,\ 2-1)=(1,\ -4,\ 1)$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}=3\sqrt{2}$

5

解答　(1)　1　　(2)　$\theta=60°$　　(3)　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(4)　$\dfrac{3}{2}$

解説

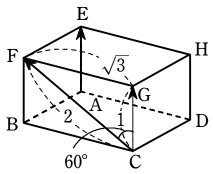
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ のなす角は $60°$，

$|\overrightarrow{\mathrm{CG}}|=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{CF}}|=2$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{CG}}||\overrightarrow{\mathrm{CF}}|\cos 60°$

$=1\times2\times\dfrac{1}{2}=1$



(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-1)+(-3)\times(-2)+(-1)\times(-3)=7$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{7}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2}}$

$=\dfrac{7}{14}=\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=60°$

(3)　求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$\vec{a}\perp\vec{e},\ \vec{b}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{e}=0$

よって　$2x+y+3z=0$ ……①，$x-y=0$ ……②

また，$|\vec{e}|=1$ であるから　$x^2+y^2+z^2=1$ ……③

② から　$y=x$　　更に ① から　$z=-x$

これらを ③ に代入して　$x^2+x^2+(-x)^2=1$

ゆえに　$3x^2=1$　　よって　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

このとき　$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ z=\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (複号同順)

したがって，求める単位ベクトルは

$\vec{e}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ -2,\ 4),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ -2,\ 3)$ であるから

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{29}$，

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{17}$，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3)\times(-2)+(-2)\times(-2)+4\times3=22$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{29})^2\cdot(\sqrt{17})^2-22^2}=\dfrac{3}{2}$

別解　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{22}{\sqrt{29}\times\sqrt{17}}=\dfrac{22}{\sqrt{493}}$

$\sin\angle\mathrm{BAC}>0$ から　$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\left(\dfrac{22}{\sqrt{493}}\right)^2}=\dfrac{3}{\sqrt{493}}$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\sqrt{17}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{493}}=\dfrac{3}{2}$

$\boxed{1}$

解答　xy 平面：$(3,\ 7,\ 4)$，yz 平面：$(-3,\ 7,\ -4)$，x 軸：$(3,\ -7,\ 4)$
原点：$(-3,\ -7,\ 4)$

解説

xy 平面に関して対称な点の座標は　$(3,\ 7,\ 4)$
yz 平面に関して対称な点の座標は　$(-3,\ 7,\ -4)$
x 軸に関して対称な点の座標は　$(3,\ -7,\ 4)$
原点に関して対称な点の座標は　$(-3,\ -7,\ 4)$

参考　次の座標平面，座標軸，点に関して，点 $(a,\ b,\ c)$ と対称な点の座標は
xy 平面 …… $(a,\ b,\ -c)$　　x 軸 …… $(a,\ -b,\ -c)$
yz 平面 …… $(-a,\ b,\ c)$　　y 軸 …… $(-a,\ b,\ -c)$
zx 平面 …… $(a,\ -b,\ c)$　　z 軸 …… $(-a,\ -b,\ c)$
原点 …… $(-a,\ -b,\ -c)$

$\boxed{2}$

解答　(1) $\sqrt{19}$　(2) $\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{6}\right)$　(3) $\left(-\frac{5}{2},\ 8,\ 0\right)$

解説

(1) $\mathrm{AB}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(1-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{19}$

(2) $\mathrm{P}(0,\ 0,\ z)$ とおく。
$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ から　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$
よって　$\{0-(-1)\}^2+(0-0)^2+(z-2)^2=(0-2)^2+(0-1)^2+\{z-(-1)\}^2$
整理すると　$6z=-1$　　よって　$z=-\frac{1}{6}$
したがって　$\mathrm{P}\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{6}\right)$

(3) $\mathrm{Q}(x,\ y,\ 0)$ とおく。
$\mathrm{OQ}=\mathrm{AQ}$ から　$\mathrm{OQ}^2=\mathrm{AQ}^2$
よって　$x^2+y^2=\{x-(-1)\}^2+y^2+(0-2)^2$
整理すると　$2x+5=0$　…… ①
$\mathrm{OQ}=\mathrm{BQ}$ から　$\mathrm{OQ}^2=\mathrm{BQ}^2$
よって　$x^2+y^2=(x-2)^2+(y-1)^2+\{0-(-1)\}^2$
整理すると　$2x+y-3=0$　…… ②
①，② を解いて　$x=-\frac{5}{2}$，$y=8$
したがって　$\mathrm{Q}\left(-\frac{5}{2},\ 8,\ 0\right)$

$\boxed{3}$

解答　(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　(2) 略

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$
および (1) より
$3\overrightarrow{\mathrm{BH}}+2\overrightarrow{\mathrm{DF}}=3(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+2(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$
$=(-3+2)\vec{a}+(3-2)\vec{b}+(3+2)\vec{c}$
$=-\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}$
また　$2\overrightarrow{\mathrm{AG}}+3\overrightarrow{\mathrm{CE}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+3(-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})+2\vec{b}$
$=(2-3)\vec{a}+(2-3+2)\vec{b}+(2+3)\vec{c}$
$=-\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}$
したがって　$3\overrightarrow{\mathrm{BH}}+2\overrightarrow{\mathrm{DF}}=2\overrightarrow{\mathrm{AG}}+3\overrightarrow{\mathrm{CE}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$\boxed{4}$

解答　(1) ① $(3,\ -1,\ 1)$，$\sqrt{11}$　② $(-5,\ 5,\ 5)$，$5\sqrt{3}$
(2) ① $(0,\ 1,\ 2)$，$\sqrt{5}$　② $(1,\ 2,\ -2)$，3

解説

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 0,\ 3)+(2,\ -1,\ -2)$
$=(1+2,\ 0-1,\ 3-2)=(3,\ -1,\ 1)$
$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{11}$

(2) $2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=2(1,\ 0,\ 3)-3(2,\ -1,\ -2)+(-1,\ 2,\ -7)$
$=(2,\ 0,\ 6)-(6,\ -3,\ -6)+(-1,\ 2,\ -7)$
$=(2-6-1,\ 0+3+2,\ 6+6-7)=(-5,\ 5,\ 5)$
$|2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(-5)^2+5^2+5^2}=5\sqrt{3}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 1,\ 2)$
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt{5}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(2-1,\ 1-(-1),\ -1-1)=(1,\ 2,\ -2)$
$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$

$\boxed{5}$

解答　(1) (ア) 3　(イ) -1
(2) (ア) 内積は 3，$\theta=45°$　(イ) 内積は $-\sqrt{6}$，$\theta=120°$
(3) (ア) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
(イ $(-2,\ -1,\ 2)$，$(2,\ 1,\ -2)$　(4) (ア) $\frac{3}{2}$　(イ) $\frac{7}{2}$

解説

(1) (ア) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は $30°$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2$ であるから
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos 30°$
$=\sqrt{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

(イ) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ となる点 I をとる。
$\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ のなす角は $135°$，$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{2}$ であるから
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{CI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=|\overrightarrow{\mathrm{CI}}||\overrightarrow{\mathrm{CH}}|\cos 135°$
$=1\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1$

(2) (ア) 内積は　$(-2)\times(-1)+1\times 1+2\times 0=3$
また　$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから　$\theta=45°$

(イ) 内積は　$1\times 1+(-1)\times\sqrt{6}+1\times(-1)=-\sqrt{6}$
また　$\cos\theta=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+(\sqrt{6})^2+(-1)^2}}=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$
$0°\leqq\theta\leqq 180°$ であるから　$\theta=120°$

(3) (ア) $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とする。
$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　すなわち　$2x+y-3z=0$　…… ①
$\vec{b}\perp\vec{e}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$　すなわち　$x-2y+z=0$　…… ②
$|\vec{e}|^2=1^2$ であるから　$x^2+y^2+z^2=1$　…… ③
①，② から x，y を z で表して　$x=z$，$y=z$
これを ③ に代入して　$3z^2=1$　ゆえに　$z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
$z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　$x=y=\frac{1}{\sqrt{3}}$
$z=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　$x=y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$
よって　$\vec{e}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(イ) $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とする。
$\vec{a}\perp\vec{p}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{p}=0$　すなわち　$2y+z=0$　…… ①
$\vec{b}\perp\vec{p}$ であるから　$\vec{b}\cdot\vec{p}=0$　すなわち　$2x-2y+z=0$　…… ②
$|\vec{p}|^2=3^2$ であるから　$x^2+y^2+z^2=9$　…… ③
①，② から x，y を z で表して　$x=-z$，$y=-\frac{z}{2}$
これを ③ に代入して　$\frac{9}{4}z^2=9$　ゆえに　$z=\pm 2$
$z=2$ のとき　$x=-2$，$y=-1$
$z=-2$ のとき　$x=2$，$y=1$
よって　$\vec{p}=(-2,\ -1,\ 2)$，$(2,\ 1,\ -2)$

(4) (ア) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 2,\ 2)$ であるから
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1)\times(-1)+0\times 2+1\times 2=3$
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-1)^2+0^2+1^2=2$
$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=(-1)^2+2^2+2^2=9$
よって　$S=\frac{1}{2}\sqrt{2\times 9-3^2}=\frac{3}{2}$

(イ) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 2,\ -1)$ であるから
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3)\times 0+2\times 2+0\times(-1)=4$
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-3)^2+2^2+0^2=13$
$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0^2+2^2+(-1)^2=5$
よって　$S=\frac{1}{2}\sqrt{13\times 5-4^2}=\frac{7}{2}$

参考　S は，それぞれ次のようにして求めることもできる。
(ア) $\cos\angle\mathrm{A}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\times 3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$0°<\angle\mathrm{A}<180°$ であるから　$\angle\mathrm{A}=45°$

よって　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}$

（イ）$\cos\angle A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{65}}$

$0^\circ<\angle A<180^\circ$ より，$\sin\angle A>0$ であるから

$\sin\angle A=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{\sqrt{65}}\right)^2}=\dfrac{7}{\sqrt{65}}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{13}\times\sqrt{5}\times\dfrac{7}{\sqrt{65}}=\dfrac{7}{2}$

1

解答　D(0, −1, 1) または D(6, −1, −7) または D(−4, 3, 3)

解説

D$(a,\ b,\ c)$ とする。

[1] $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ のとき

$\overrightarrow{AB}=(-3,\ 0,\ 4)$，$\overrightarrow{CD}=(a-3,\ b+1,\ c+3)$ から

$-3=a-3,\ 0=b+1,\ 4=c+3$

よって，$a=0,\ b=-1,\ c=1$ であり　D(0, −1, 1)

[2] $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ のとき

$\overrightarrow{AB}=(-3,\ 0,\ 4)$，$\overrightarrow{DC}=(3-a,\ -1-b,\ -3-c)$ から

$-3=3-a,\ 0=-1-b,\ 4=-3-c$

よって，$a=6,\ b=-1,\ c=-7$ であり　D(6, −1, −7)

[3] $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ のとき

$\overrightarrow{AC}=(2,\ -2,\ -1)$，$\overrightarrow{DB}=(-2-a,\ 1-b,\ 2-c)$ から

$2=-2-a,\ -2=1-b,\ -1=2-c$

よって，$a=-4,\ b=3,\ c=3$ であり　D(−4, 3, 3)

別解　四角形が平行四辺形であるための条件は，2 本の対角線がそれぞれの中点で交わることである。

[1] 対角線が BC，AD の場合

対角線 BC の中点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$，

対角線 AD の中点の座標は　$\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b+1}{2},\ \dfrac{c-2}{2}\right)$

これらが一致することから　$a=0,\ b=-1,\ c=1$　ゆえに　D(0, −1, 1)

[2] 対角線が AC，BD，[3] 対角線が AB，CD の場合も同様である（解答は省略）。

2

解答　$\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

解説

$\vec{d}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ とすると

$(0,\ 8,\ -3)=p(1,\ 2,\ 3)+q(0,\ -1,\ 2)+r(-2,\ 1,\ -3)$

ゆえに　$(0,\ 8,\ -3)=(p-2r,\ 2p-q+r,\ 3p+2q-3r)$

よって　$0=p-2r,\ 8=2p-q+r,\ -3=3p+2q-3r$

これを解いて　$p=2,\ q=-3,\ r=1$

したがって　$\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

3

解答　(1) $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$　(2) $\sqrt{21}$

解説

(1) $\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1,\ 1)+t(1,\ 2,\ -1)=(2+t,\ 1+2t,\ 1-t)$

ゆえに　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(2+t)^2+(1+2t)^2+(1-t)^2=6t^2+6t+6=6\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小となり，$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから $|\vec{a}+t\vec{b}|$ もこのとき最小になる。

したがって　$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

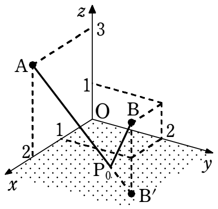
(2) xy 平面に関して A と B は同じ側にある。

そこで，xy 平面に関して点 B と対称な点を B′ とすると B′(1, 2, −1) であり，PB＝PB′ であるから

AP＋PB＝AP＋PB′≧AB′

よって，P として直線 AB′ と xy 平面の交点 P_0 をとると AP＋PB は最小となり，最小値は

$AB'=\sqrt{(1-2)^2+(2-0)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{21}$



4

解答　$s=-1,\ t=1$ のとき最小値 $\sqrt{2}$

解説

$s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}=s(1,\ 1,\ 1)+t(1,\ 1,\ 0)+(1,\ -1,\ 1)$

$=(s+t+1,\ s+t-1,\ s+1)$

したがって

$|s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}|^2=(s+t+1)^2+(s+t-1)^2+(s+1)^2$

$=(s^2+t^2+1+2st+2t+2s)+(s^2+t^2+1+2st-2t-2s)+(s^2+2s+1)$

$=2t^2+4st+3s^2+2s+3=2(t^2+2st)+3s^2+2s+3$

$=2(t+s)^2-2s^2+3s^2+2s+3=2(t+s)^2+s^2+2s+3$

$=2(t+s)^2+(s+1)^2+2$

ゆえに，$|s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}|^2$ は $t+s=0$ かつ $s+1=0$ すなわち $s=-1,\ t=1$ のとき最小値 2 をとる。

$|s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}|\geqq 0$ であるから，このとき $|s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{c}|$ も最小で，その最小値は　$\sqrt{2}$

よって　$s=-1,\ t=1$ のとき最小値 $\sqrt{2}$

5

解答　$-\dfrac{1}{2}a^2$

解説

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=a\times a\times\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ であるから

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$

$=-\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=-\dfrac{1}{2}a^2$

6

解答　$(\sqrt{2},\ 1,\ 1)$，60°；$(\sqrt{2},\ 1,\ -1)$，120°

解説

求めるベクトルを $\vec{a}=(x,\ y,\ z)$ とする。

$|\vec{a}|=2$ から　$|\vec{a}|^2=4$

ゆえに　$x^2+y^2+z^2=4$　……①

$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とすると，これらは，

それぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の向きを表す単位ベクトルである。

条件より，$\vec{a}$ と $\vec{e_1}$ のなす角が 45° であるから　　$\vec{a}\cdot\vec{e_1}=|\vec{a}||\vec{e_1}|\cos 45°$

すなわち　　$x=2\times1\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　よって　　$x=\sqrt{2}$　……②

また，$\vec{a}$ と $\vec{e_2}$ のなす角が 60° であるから　　$\vec{a}\cdot\vec{e_2}=|\vec{a}||\vec{e_2}|\cos 60°$

すなわち　　$y=2\times1\times\dfrac{1}{2}$　　よって　　$y=1$　……③

②，③ を ① に代入して

$$(\sqrt{2})^2+1^2+z^2=4 \qquad ゆえに \qquad z^2=1$$

よって　　$z=\pm1$

したがって　　$\vec{a}=(\sqrt{2},\ 1,\ 1)$，$(\sqrt{2},\ 1,\ -1)$

$\vec{a}$ が z 軸の正の向きとなす角を $\gamma\ (0°\leqq\gamma\leqq180°)$ とすると

[1]　$\vec{a}=(\sqrt{2},\ 1,\ 1)$ のとき

$$\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\vec{e_3}}{|\vec{a}||\vec{e_3}|}=\frac{1}{2} \qquad よって \qquad \gamma=60°$$

[2]　$\vec{a}=(\sqrt{2},\ 1,\ -1)$ のとき

$$\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\vec{e_3}}{|\vec{a}||\vec{e_3}|}=-\frac{1}{2} \qquad よって \qquad \gamma=120°$$

$\boxed{1}$

解答　$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=8$

解説

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるから　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60°$

これに $|\vec{a}|=6$ を代入して　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3|\vec{b}|$　……①

また，$\vec{a}\perp\vec{c}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$ であるから　　$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　……②

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\perp(2\vec{a}-5\vec{b})$ であるから　　$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(2\vec{a}-5\vec{b})=0$　……③

ここで，$|\vec{a}|=6$ と ①，② から

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(2\vec{a}-5\vec{b})&=2(|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c})-5(\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c})\\&=2|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{b}|^2=2\times6^2-3\times3|\vec{b}|-5|\vec{b}|^2\\&=-(5|\vec{b}|^2+9|\vec{b}|-72)=-(5|\vec{b}|+24)(|\vec{b}|-3)\end{aligned}$$

よって，③ から　　$(5|\vec{b}|+24)(|\vec{b}|-3)=0$　　　$|\vec{b}|>0$ であるから　$|\vec{b}|=3$

これを ① に代入して　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=9$

したがって　　
$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=6^2+3^2+1^2+2(9+0+0)=64\end{aligned}$$

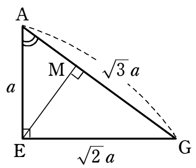
$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|>0$ であるから　　$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=8$

$\boxed{2}$

解答　(ア)　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$　　(イ)　$-\dfrac{a^2}{3}$　　(ウ)　$-\dfrac{1}{2}$　　(エ)　120

解説

$\mathrm{EG}=\sqrt{2}\,a$，$\mathrm{AG}=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}\,a)^2}=\sqrt{3}\,a$ であるから



$$\mathrm{EM}=\mathrm{AE}\sin\angle\mathrm{EAG}=a\times\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{3}\,a}={}^{ア}\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{DM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=0$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}&=(\overrightarrow{\mathrm{EM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{DM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}+|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{EA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=0$，$\mathrm{MA}=a\cos\angle\mathrm{EAG}=a\times\dfrac{a}{\sqrt{3}\,a}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ であるから

$$0=\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \qquad よって \qquad \overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}={}^{イ}-\frac{a^2}{3}$$

また　　
$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{EM}}||\overrightarrow{\mathrm{DM}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DM}}}{|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|^2}=\frac{-\dfrac{a^2}{3}}{\dfrac{2}{3}a^2}={}^{ウ}-\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\alpha\leqq180°$ であるから　　$\alpha={}^{エ}120°$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$　　(2)　$\dfrac{3}{5}$　　(3)　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\ \dfrac{1}{2}r,\ 0\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\ -\dfrac{1}{4}r,\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}r\right)$

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(3,\ \sqrt{3},\ 3)$ より

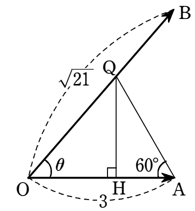
$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2+3^2}=\sqrt{21},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\cdot3+0\cdot\sqrt{3}+0\cdot3=9$$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\dfrac{9}{3\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

(2)　$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ と $\angle\mathrm{OAQ}=60°$ は鋭角であるから，Q から線分 OA へ垂線 QH を引くことができる。

また，Q は線分 OB 上の点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0\leqq k\leqq1)$ と表される。



このとき　　$\mathrm{OQ}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|k=\sqrt{21}\,k$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

よって　　$\mathrm{QH}=\mathrm{OQ}\sin\theta=\sqrt{21}\,k\cdot\dfrac{2\sqrt{7}}{7}=2\sqrt{3}\,k$

また　　$\mathrm{HA}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{QH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot2\sqrt{3}\,k=2k$

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OQ}\cos\theta=\sqrt{21}\,k\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}=3k$$

$\mathrm{OH}+\mathrm{HA}=\mathrm{OA}$ より　　$3k+2k=3$

したがって　　$k=\dfrac{3}{5}$　　($0\leqq k\leqq1$ を満たす)

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(x,\ y,\ z)$ とする。

条件 (A) から　　$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2=r^2$　　すなわち　　$x^2+y^2+z^2=r^2$　……①

条件 (B) から　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos30°$　　すなわち　　$3x=r\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$　……②

条件 (C) から　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\sqrt{3}\,r$　　すなわち　　$3x+\sqrt{3}\,y+3z=2\sqrt{3}\,r$

よって　　$\sqrt{3}\,x+y+\sqrt{3}\,z=2r$　……③

② を ①，③ に代入すると　　$y^2+z^2=\dfrac{1}{4}r^2$　……④，　$y+\sqrt{3}\,z=\dfrac{1}{2}r$　……⑤

⑤ から　　$y=-\sqrt{3}\,z+\dfrac{1}{2}r$　……⑥

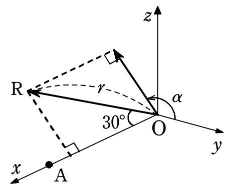
④ に代入して　　$\left(-\sqrt{3}\,z+\dfrac{1}{2}r\right)^2+z^2=\dfrac{1}{4}r^2$

整理すると　　$z(4z-\sqrt{3}\,r)=0$　　　したがって　　$z=0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}r$　……⑦

②，⑥，⑦ から，点 R の座標は　　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\ \dfrac{1}{2}r,\ 0\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\ -\dfrac{1}{4}r,\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}r\right)$

別解　条件 (A)，(B) から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=(r\cos30°,\ r\sin30°\cos\alpha,\ r\sin30°\sin\alpha)\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r,\ \frac{1}{2}r\cos\alpha,\ \frac{1}{2}r\sin\alpha\right)\quad(0°\leqq\alpha<360°)\end{aligned}$$



とおける。ただし，α は $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の yz 平面への正射影と y 軸の正の部分が作る角である。

条件 (C) より　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\sqrt{3}\,r$

よって　　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}r+\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\cos\alpha+\dfrac{3}{2}r\sin\alpha=2\sqrt{3}\,r$

整理すると　　$\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=1$

$$2\sin(\alpha+30^\circ)=1$$

$$\sin(\alpha+30^\circ)=\frac{1}{2}$$

$30^\circ \leqq \alpha+30^\circ < 390^\circ$ であるから　　$\alpha+30^\circ=30^\circ,\ 150^\circ$

よって　　$\alpha=0^\circ,\ 120^\circ$

したがって，点 R の座標は　　$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r,\ \frac{1}{2}r,\ 0\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r,\ -\frac{1}{4}r,\ \frac{\sqrt{3}}{4}r\right)$

$\boxed{1}$

解答　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{12}\vec{c}$

解説

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{10}{9}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{10}{9}\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+3\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{4}=\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)+\frac{1}{3}\vec{b}$$

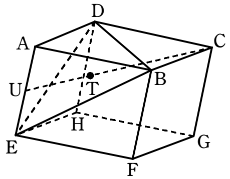
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{12}\vec{c}$$

$\boxed{2}$

解答　(1)　略，CT : TU=2 : 1　　(2)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とする。



T は △BDE の重心であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{CT}}=\overrightarrow{\mathrm{AT}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}-(\vec{b}+\vec{d})$

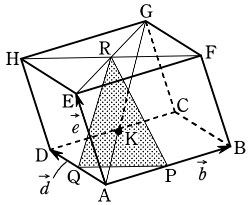
$$=\frac{-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e}}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CU}}=\overrightarrow{\mathrm{AU}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{\vec{e}}{2}-(\vec{b}+\vec{d})=\frac{-2\vec{b}-2\vec{d}+\vec{e}}{2}$$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{CU}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CT}}$

したがって，3 点 C，T，U は一直線上にあり　　CT : TU=2 : 1

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\vec{d}}{2}$$

また　　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$

点 R は対角線 EG の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AG}}}{2}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{2}$$

ゆえに，△PQR の重心 K について

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{d}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{2}\right)$$

$$=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3}$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=3\overrightarrow{\mathrm{AK}}$

したがって，対角線 AG は △PQR の重心 K を通る。

$\boxed{3}$

解答　$x=6$

解説

[解答 1]　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(3,\ 4,\ x)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 3,\ 5)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 2,\ 6)$

3 点 A，B，C は一直線上にないから，点 P が平面 ABC 上にあるための条件は，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t があることである。

よって　　$(3,\ 4,\ x)=s(2,\ 3,\ 5)+t(0,\ 2,\ 6)$

すなわち　$(3,\ 4,\ x)=(2s,\ 3s+2t,\ 5s+6t)$

ゆえに　　$2s=3$，$3s+2t=4$，$5s+6t=x$

よって　　$s=\frac{3}{2}$，$t=-\frac{1}{4}$　　　したがって　　$x=6$

[解答 2]　3 点 A，B，C は一直線上にないから，原点を O とすると，点 P が平面 ABC 上にあるための条件は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$s+t+u=1$ となる実数 s，t，u があることである。

よって　　$(4,\ 5,\ x)=s(1,\ 1,\ 0)+t(3,\ 4,\ 5)+u(1,\ 3,\ 6)$

すなわち　$(4,\ 5,\ x)=(s+3t+u,\ s+4t+3u,\ 5t+6u)$

ゆえに　　$s+3t+u=4$，$s+4t+3u=5$，$5t+6u=x$

また　　$s+t+u=1$

これらを解くと　　$s=-\frac{1}{4}$，$t=\frac{3}{2}$，$u=-\frac{1}{4}$

したがって　　$x=5\cdot\frac{3}{2}+6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=6$

別解　3 点 A，B，C を通る平面の方程式を求めると　　$2x-3y+z+1=0$

この平面上に点 P があるための条件は　　$2\cdot4-3\cdot5+x+1=0$

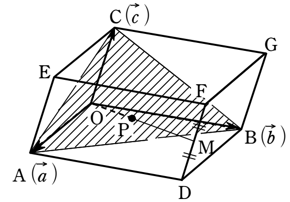
よって　　$x=6$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$



$$=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

点 P は直線 OM 上にあるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$（$k$ は実数）とおけて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\left(\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=k\vec{a}+k\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{c}\quad\cdots\cdots ①$$

また，点 P は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$（$s$，$t$ は実数）とおけて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{c}+s(\vec{a}-\vec{c})+t(\vec{b}-\vec{c})=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}\quad\cdots\cdots ②$$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いた表し方はただ 1 通りである。

①，② から　　$s=k$，$t=k$，$1-s-t=\frac{1}{2}k$

s，t を消去すると　　　$1-k-k=\frac{1}{2}k$　　　　これを解くと　　$k=\frac{2}{5}$

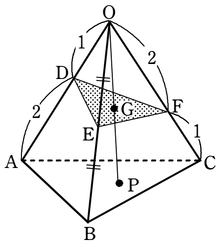
これを ① に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$

別解　点 P は平面 ABC 上にあるから，① より

$k+k+\frac{1}{2}k=1$　　これを解くと　$k=\frac{2}{5}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると



$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\vec{a}}{3}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\vec{b}}{2}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{2}{3}\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{3}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{2}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$

点 P は直線 OG 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ (k は実数) とおけて

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)=\frac{k}{9}\vec{a}+\frac{k}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}k\vec{c}$　…… ①

また，P は平面 ABC 上にあるから，s，t を実数として $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表される。

これを変形すると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$　…… ②

①，② から　$\frac{k}{9}\vec{a}+\frac{k}{6}\vec{b}+\frac{2}{9}k\vec{c}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから

$\frac{k}{9}=1-s-t$，　$\frac{k}{6}=s$，　$\frac{2}{9}k=t$

ゆえに　$\frac{k}{9}=1-\frac{k}{6}-\frac{2k}{9}$　　これを解くと　$k=2$

$k=2$ を ① に代入して　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$

すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

参考　一直線上にない 3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ の定める平面を α とするとき，次のことが成り立つ。

点 P$(\vec{p})$ が平面 α 上にある

$\Longleftrightarrow$　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，$s+t+u=1$　(s，t，u は実数)

このことを利用すると，① から直ちに k の値を求めることができる。

(別解)　P は平面 ABC 上にあるから，① より

$\frac{k}{9}+\frac{k}{6}+\frac{2}{9}k=1$　　これを解くと　$k=2$

$\boxed{5}$

解答　$\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)$

解説

点 H は平面 ABC 上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，　$s+t+u=1$　…… ①　(s，t，u は実数)

と表される。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s(1,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+u(0,\ 0,\ 1)=(s,\ 2t,\ u)$

OH⊥ 平面 ABC であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から　$s\times(-1)+2t\times2+u\times0=0$　　よって　$t=\frac{1}{4}s$　…… ②

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ から　$s\times(-1)+2t\times0+u\times1=0$　　よって　$u=s$　…… ③

①，②，③ を解くと　$s=\frac{4}{9}$，$t=\frac{1}{9}$，$u=\frac{4}{9}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)$ であるから，点 H の座標は　$\left(\frac{4}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9}\right)$

注意　点 P が平面 ABC 上にある

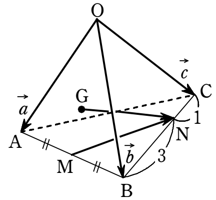
$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$s+t+u=1$ (s，t，u は実数)

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{-3\vec{a}-\vec{b}+4\vec{c}}{6}$，$\overrightarrow{\mathrm{GN}}=\frac{-\vec{a}+2\vec{c}}{3}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{13}{27}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2+1}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

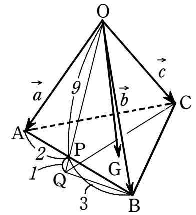


$=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{-3\vec{a}-\vec{b}+4\vec{c}}{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{GN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$

$=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{-\vec{a}+2\vec{c}}{3}$

(2)　点 P は線分 AB を 2 : 3 に内分するから



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

点 Q は線分 OP を 10 : 1 に外分するから

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{10}{9}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{10}{9}\left(\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$

点 G は △QBC の重心であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

$=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{13}{27}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

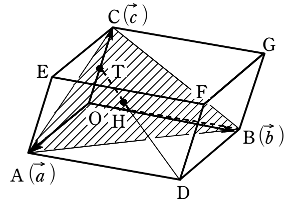
$\boxed{2}$

解答　(1)　証明略，TH : HD＝1 : 2　　(2)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

T は辺 OC の中点であるから



$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{1}{2}\vec{c}$

H は △ABC の重心であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{TH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$

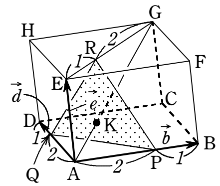
$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{c}$　…… ①

$\overrightarrow{\mathrm{TD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$　…… ②

①，② から　$\overrightarrow{\mathrm{TD}}=3\overrightarrow{\mathrm{TH}}$

したがって，3 点 T，H，D は一直線上にあり　TH : HD＝1 : 2

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$ とする。



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{3}\vec{d}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}$ …… ① から

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{AG}}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+3\vec{e}}{3}$

ゆえに，△PQR の重心 K について

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}+\frac{\vec{b}+\vec{d}+3\vec{e}}{3}\right)=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}}{3} \quad \cdots\cdots ②$$

①，②から　$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AK}$

したがって，対角線 AG は △PQR の重心 K を通る。

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=1$　　(2)　$z=-6$

解説

(1)　$\overrightarrow{OC}=(x,\ 12,\ 5)$，$\overrightarrow{OA}=(1,\ 2,\ 3)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,\ 3,\ -2)$ に対して，

$\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ となる実数 s，t があるから

$(x,\ 12,\ 5)=s(1,\ 2,\ 3)+t(-1,\ 3,\ -2)$

すなわち

$(x,\ 12,\ 5)=(s-t,\ 2s+3t,\ 3s-2t)$

ゆえに　$x=s-t$　……①

$12=2s+3t$　……②

$5=3s-2t$　……③

②，③から　$s=3$，$t=2$

よって，①から　$x=1$

(2)　$\overrightarrow{AD}=(-5,\ -2,\ z-2)$，$\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 1)$，　$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 3)$ に対して，

$\overrightarrow{AD}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s，t があるから

$(-5,\ -2,\ z-2)=s(1,\ 1,\ 1)+t(2,\ 1,\ 3)$

すなわち

$(-5,\ -2,\ z-2)=(s+2t,\ s+t,\ s+3t)$

ゆえに　$-5=s+2t$　……①

$-2=s+t$　……②

$z-2=s+3t$　……③

①，②から　$s=1$，$t=-3$

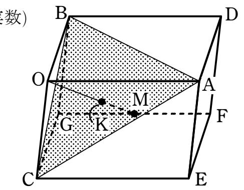
よって，③から　$z=-6$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$　　(2)　$\overrightarrow{OK}=\frac{6}{23}\vec{a}+\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}$

解説

(1)　点 K は直線 OM 上にあるから　$\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OM}$ (k は実数) とおける。



ここで　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM}=\vec{b}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$

よって　$\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OM}=k\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{k}{2}\vec{a}+k\vec{b}+k\vec{c}$

ところで点 K は平面 ABC 上にあるから

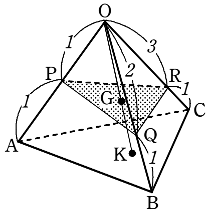
$\frac{k}{2}+k+k=1$

よって　$k=\frac{2}{5}$

したがって　$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

(2)　点 K は直線 OG 上にあるから $\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OG}$ (k は実数) とおける。

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{3}{4}\vec{c}$ であるから



$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)$

$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{OK}=k\overrightarrow{OG}=k\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)$

$=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{2k}{9}\vec{b}+\frac{k}{4}\vec{c}$

ところで，点 K は平面 ABC 上にあるから　$\frac{k}{6}+\frac{2k}{9}+\frac{k}{4}=1$

よって　$k=\frac{36}{23}$　　したがって　$\overrightarrow{OK}=\frac{6}{23}\vec{a}+\frac{8}{23}\vec{b}+\frac{9}{23}\vec{c}$

$\boxed{5}$

解答　$\left(\frac{18}{17},\ \frac{12}{17},\ \frac{12}{17}\right)$

解説

H が平面 ABC 上にあるから

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，　$s+t+u=1$ ……①

(s，t，u は実数) と表される。

よって　$\overrightarrow{OH}=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 3,\ 0)+u(0,\ 0,\ 3)$

$=(2s,\ 3t,\ 3u)$　……②

OH⊥(平面 ABC) であるから，$\overrightarrow{OH}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直である。

よって　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　……③，　$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　……④

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 3,\ 0)$ であるから，③より　$2s\times(-2)+3t\times3+3u\times0=0$

ゆえに　$-4s+9t=0$　……⑤

$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 0,\ 3)$ であるから，④より　$2s\times(-2)+3t\times0+3u\times3=0$

ゆえに　$-4s+9u=0$　……⑥

⑤，⑥から　$t=\frac{4}{9}s$，$u=\frac{4}{9}s$　……⑦

⑦を①に代入して　$s+\frac{4}{9}s+\frac{4}{9}s=1$　　これを解いて　$s=\frac{9}{17}$

このとき，⑦から　$t=\frac{4}{17}$，$u=\frac{4}{17}$

s，t，u の値を②に代入すると　$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{18}{17},\ \frac{12}{17},\ \frac{12}{17}\right)$

したがって，点 H の座標は　$\left(\frac{18}{17},\ \frac{12}{17},\ \frac{12}{17}\right)$

$\boxed{1}$

解答　略

解説

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると

$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\frac{\vec{b}}{2}$，　$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2+1}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$，

$\overrightarrow{AR}=\frac{\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AD}}{5+1}=\frac{\vec{c}+5\vec{d}}{6}$，　$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$

線分 AG を 5 : 1 に内分する点を S とすると

$\overrightarrow{AS}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AG}=\frac{5}{6}\times\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}=\frac{5(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})}{18}$

△PQR の重心を H とすると

$\overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}+\frac{\vec{c}+5\vec{d}}{6}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{3\vec{b}+2(\vec{b}+2\vec{c})+(\vec{c}+5\vec{d})}{6}=\frac{5(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})}{18}$

よって　$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AH}$

ゆえに，S と H は一致する。

すなわち，線分 AG を 5 : 1 に内分する点は，△PQR の重心と一致する。

$\boxed{2}$

解答　略

解説

点 R が 3 点 A，P，Q の定める平面上にあるための条件は，$\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{AQ}$ となる実数 s，t が存在することである。

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とすると

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}$，$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FQ}=\vec{a}+\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}$，

$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DR}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{AQ}$ とすると

$\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=s\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)+t\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)$

よって　$\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=(s+t)\vec{a}+\frac{2}{3}t\vec{b}+\left(\frac{2}{3}s+t\right)\vec{c}$

4 点 A，B，D，E は同じ平面上にないから

$s+t=0$　……①，　$\frac{2}{3}t=1$　……②，　$\frac{2}{3}s+t=\frac{1}{2}$　……③

①，②から　$s=-\frac{3}{2}$，$t=\frac{3}{2}$　　これは③を満たす。

ゆえに，$\overrightarrow{AR}=s\overrightarrow{AP}+t\overrightarrow{AQ}$ となる実数 s，t が存在するから，4 点 A，P，Q，R は同一平面上にある。

$\boxed{3}$

解答　辺 BC を 3 : 2 に内分する点を Q，線分 QD を 6 : 5 に内分する点を R とすると，点 P は線分 AR を 11 : 1 に内分する点

解説

与えられた等式から　$\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+3(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})+6(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD})=\vec{0}$

よって　$12\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{AD}$

ゆえに　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+6\overrightarrow{AD}}{12}=\dfrac{1}{12}\left(5\times\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}+6\overrightarrow{AD}\right)$

$\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}=\overrightarrow{AQ}$ とおくと

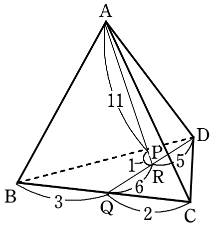
$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{12}(5\overrightarrow{AQ}+6\overrightarrow{AD})=\frac{11}{12}\times\frac{5\overrightarrow{AQ}+6\overrightarrow{AD}}{11}$$

$\dfrac{5\overrightarrow{AQ}+6\overrightarrow{AD}}{11}=\overrightarrow{AR}$ とおくと　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{11}{12}\overrightarrow{AR}$

よって　BQ : QC＝3 : 2，QR : RD＝6 : 5，

AP : PR＝11 : 1

したがって，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を Q，線分 QD を 6 : 5 に内分する点を R とすると，点 P は線分 AR を 11 : 1 に内分する点である。



4

解答　(1)　$\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{7}\vec{c}+\dfrac{2}{7}\vec{d}$　　(2)　2 : 1

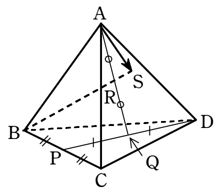
解説

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ とおくと

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{d}\right)=\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{4}$$

$$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\times\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{4}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{8}$$



点 S は直線 BR 上にあるから

$\overrightarrow{BS}=k\overrightarrow{BR}$　……①

(k は実数) とおける。

① から　$\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AB})$

よって　$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+k(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AB})=\vec{b}+k\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{8}-\vec{b}\right)$

$=\left(1-\dfrac{7}{8}k\right)\vec{b}+\dfrac{k}{8}\vec{c}+\dfrac{k}{4}\vec{d}$　……②

また，点 S は平面 ACD 上にあるから，s，t を実数として

$\overrightarrow{AS}=s\vec{c}+t\vec{d}$　……③　　と表される。

②，③ から　$\left(1-\dfrac{7}{8}k\right)\vec{b}+\dfrac{k}{8}\vec{c}+\dfrac{k}{4}\vec{d}=s\vec{c}+t\vec{d}$

4 点 A，B，C，D は同じ平面上にないから

$$1-\frac{7}{8}k=0,\quad \frac{k}{8}=s,\quad \frac{k}{4}=t$$

よって　$k=\dfrac{8}{7}$，$s=\dfrac{1}{7}$，$t=\dfrac{2}{7}$　　したがって　$\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{7}\vec{c}+\dfrac{2}{7}\vec{d}$

(2)　点 T は直線 AS 上にあるから，$\overrightarrow{AT}=l\overrightarrow{AS}$ (l は実数) とおける。

(1) から　$\overrightarrow{AT}=l\left(\dfrac{1}{7}\vec{c}+\dfrac{2}{7}\vec{d}\right)=\dfrac{l}{7}\vec{c}+\dfrac{2}{7}l\vec{d}$

T は直線 CD 上にあるから　$\dfrac{l}{7}+\dfrac{2}{7}l=1$　　ゆえに　$l=\dfrac{7}{3}$

よって　$\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\vec{c}+\dfrac{2}{3}\vec{d}=\dfrac{\vec{c}+2\vec{d}}{2+1}$

すなわち，T は辺 CD を 2 : 1 に内分する。

したがって　CT : TD＝2 : 1

5

解答　OR : OQ＝10 : 23

解説

O に関する位置ベクトルを考え，A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$)，E($\vec{e}$)，F($\vec{f}$) とする。

また，R は線分 OQ 上にあるから，OR : OQ＝k : 1 とおくと，

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{3\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OC}}{2+3}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$$

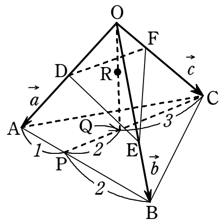
$=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}=k\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}\right)=\frac{2}{5}k\vec{a}+\frac{1}{5}k\vec{b}+\frac{2}{5}k\vec{c}$$

$\vec{d}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\vec{e}=\dfrac{2}{3}\vec{b}$，$\vec{f}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{OR}=\frac{2}{5}k\cdot2\vec{d}+\frac{1}{5}k\cdot\frac{3}{2}\vec{e}+\frac{2}{5}k\cdot3\vec{f}$$

$=\dfrac{4}{5}k\vec{d}+\dfrac{3}{10}k\vec{e}+\dfrac{6}{5}k\vec{f}$　……①



R は平面 DEF 上にあるから，$\overrightarrow{DR}=s\overrightarrow{DE}+t\overrightarrow{DF}$ とおくと

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DR}=\vec{d}+s(\vec{e}-\vec{d})+t(\vec{f}-\vec{d})$

$=(1-s-t)\vec{d}+s\vec{e}+t\vec{f}$　……②

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから，①，② より

$$1-s-t=\frac{4}{5}k,\quad s=\frac{3}{10}k,\quad t=\frac{6}{5}k$$

これを解くと $k=\dfrac{10}{23}$ であるから　OR : OQ＝$\dfrac{10}{23}$: 1＝10 : 23

1

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$ から　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

ゆえに　$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ ……①

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2$

よって　$|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2-2(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB})$

OA＝OB と ① から　$|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2=0$

したがって　$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$　　すなわち　AC＝BC

(2)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ であるから

$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OG}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\dfrac{1}{3}(|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})$

OA＝OB と ① から　$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

よって　$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{AB}$

別解　辺 AB の中点を M とする.

(1)　OA＝OB であるから　OM⊥AB

また，OC⊥AB であるから　(平面 OCM)⊥AB

よって　CM⊥AB　　したがって　AC＝BC

(2)　G は線分 CM 上にあるから，平面 OCM 上にある.

(平面 OCM)⊥AB であるから　OG⊥AB　すなわち　$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{AB}$

2

解答　(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=3$　　(2)　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

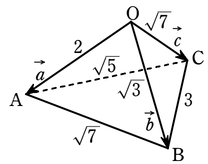
解説

(1)　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{7}$ から　$|\overrightarrow{AB}|^2=(\sqrt{7})^2$

よって　$|\vec{b}-\vec{a}|^2=7$

すなわち　$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=7$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ を代入して整理すると　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$



$|\overrightarrow{BC}|=3$ から　$|\overrightarrow{BC}|^2=3^2$

よって　$|\vec{c}-\vec{b}|^2=9$

すなわち　$|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=9$

$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{c}|=\sqrt{7}$ を代入して整理すると　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}$

$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{5}$ から　$|\overrightarrow{CA}|^2=(\sqrt{5})^2$

よって　$|\vec{a}-\vec{c}|^2=5$

すなわち　$|\vec{a}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{c}|^2=5$

$|\vec{c}|=\sqrt{7}$，$|\vec{a}|=2$ を代入して整理すると　$\vec{c}\cdot\vec{a}=3$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{a}+y\vec{b}$（$x$，$y$ は実数）とおく。

CH⊥平面 α であるから　　$\mathrm{CH}\perp\mathrm{OA}$，$\mathrm{CH}\perp\mathrm{OB}$

また　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ から　　$(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

よって　　$x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　　ゆえに　　$4x-3=0$　　よって　　$x=\dfrac{3}{4}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から　　$(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

ゆえに　　$x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　　よって　　$3y-\dfrac{1}{2}=0$　　ゆえに　　$y=\dfrac{1}{6}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

(3)　$\cos\angle\mathrm{AOB}=0$ より，$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ であるから

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|=\sqrt{3}$$

また　　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left|\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}-\vec{c}\right|^2$

$$=\frac{9}{16}|\vec{a}|^2+\frac{1}{36}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{3}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{9}{16}\times4+\frac{1}{36}\times3+7-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\times3=\frac{56}{12}=\frac{14}{3}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|>0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\dfrac{14}{3}}$

ゆえに，四面体 OABC の体積は　　$\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OAB}\times|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$

$\boxed{3}$

解答　AS : SC＝6 : 1

解説

点 S は線分 AC 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$0\leqq k\leqq1$）

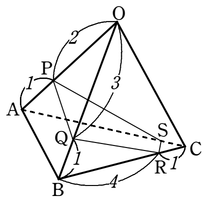
とすると　　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　……①

また，点 S は 3 点 P，Q，R を通る平面上にあるから，

実数 s，t，u を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+u\overrightarrow{\mathrm{OR}},\ s+t+u=1$$

と表される。



ここで，BR : RC＝4 : 1 であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4+1}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{3}{4}t+\frac{1}{5}u\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{5}u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots\cdots ②$$

4 点 O，A，B，C は同一平面上にないから，①，② より

$$1-k=\frac{2}{3}s,\ 0=\frac{3}{4}t+\frac{1}{5}u,\ k=\frac{4}{5}u$$

ゆえに　　$s=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}k$，$t=-\dfrac{1}{3}k$，$u=\dfrac{5}{4}k$

これらを $s+t+u=1$ に代入して　　$\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}k-\dfrac{1}{3}k+\dfrac{5}{4}k=1$

よって　　$k=\dfrac{6}{7}$　　これは $0\leqq k\leqq1$ を満たす。

ゆえに　　AS : SC＝6 : 1

$\boxed{1}$

解答　(1)　内分 $\left(\dfrac{11}{4},\ -2,\ \dfrac{5}{4}\right)$，外分 $\left(\dfrac{1}{2},\ -5,\ -\dfrac{5}{2}\right)$

(2)　$\left(\dfrac{13}{2},\ 0,\ 3\right)$　　(3)　$(5,\ -1,\ 2)$

解説

(1)　線分 AB を 1 : 3 に内分する点の座標は

$\left(\dfrac{3\cdot2+1\cdot5}{1+3},\ \dfrac{3\cdot(-3)+1\cdot1}{1+3},\ \dfrac{3\cdot0+1\cdot5}{1+3}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{11}{4},\ -2,\ \dfrac{5}{4}\right)$

線分 AB を 1 : 3 に外分する点の座標は

$\left(\dfrac{-3\cdot2+1\cdot5}{1-3},\ \dfrac{-3\cdot(-3)+1\cdot1}{1-3},\ \dfrac{-3\cdot0+1\cdot5}{1-3}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{1}{2},\ -5,\ -\dfrac{5}{2}\right)$

(2)　$\left(\dfrac{5+8}{2},\ \dfrac{1+(-1)}{2},\ \dfrac{5+1}{2}\right)$　すなわち　$\left(\dfrac{13}{2},\ 0,\ 3\right)$

(3)　$\left(\dfrac{2+5+8}{3},\ \dfrac{-3+1+(-1)}{3},\ \dfrac{0+5+1}{3}\right)$　すなわち　$(5,\ -1,\ 2)$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=18$　　(2)　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=8$

(3)　$(x-3)^2+(y+5)^2+(z-2)^2=4$

解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-1)^2+\{-1-(-2)\}^2+(-1-3)^2}=3\sqrt{2}$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-1)^2+\{y-(-2)\}^2+(z-3)^2=(3\sqrt{2})^2$$

したがって　　$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=18$

(2)　線分 AB の中点 M が球面の中心であるから

$\mathrm{M}\left(\dfrac{3-1}{2},\ \dfrac{2+2}{2},\ \dfrac{-4+0}{2}\right)$　すなわち　$\mathrm{M}(1,\ 2,\ -2)$

また　　$\mathrm{AM}=\sqrt{(1-3)^2+(2-2)^2+\{-2-(-4)\}^2}=2\sqrt{2}$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2+\{z-(-2)\}^2=(2\sqrt{2})^2$$

したがって　　$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=8$

(3)　中心の z 座標が 2 であるから，球面の半径は　2

よって，求める球面の方程式は

$$(x-3)^2+\{y-(-5)\}^2+(z-2)^2=2^2$$

したがって　　$(x-3)^2+(y+5)^2+(z-2)^2=4$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=4+3t$，$y=5+2t$，$z=3-4t$；$\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$

(2)　$x=1+t$，$y=2-3t$，$z=3+2t$；$x-1=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$

解説

(1)　点 A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y,\ z)=(4,\ 5,\ 3)+t(3,\ 2,\ -4)$$

すなわち　　$x=4+3t$，$y=5+2t$，$z=3-4t$

また，t を消去して　　$\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$

(2)　2 点 A，B を通る直線の媒介変数表示は

$$(x,\ y,\ z)=(1-t)(1,\ 2,\ 3)+t(2,\ -1,\ 5)$$

すなわち　$x=1+t,\ y=2-3t,\ z=3+2t$

また，t を消去して　$x-1=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$

$\boxed{4}$

解答　$(9,\ -8,\ 0)$

解説

与えられた直線上の点 P の原点を始点とする位置ベクトル $\vec{p}$ は

$\vec{p}=(2,\ 6,\ 7)+t\vec{u}=(t+2,\ -2t+6,\ -t+7)$ (t は実数)　と表される．

よって，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと　$x=t+2,\ y=-2t+6,\ z=-t+7$

よって，P が xy 平面上にあるとすると $z=0$ から　$-t+7=0$　すなわち　$t=7$

このとき，$x=9,\ y=-8$ であるから　$\mathrm{P}(9,\ -8,\ 0)$

$\boxed{5}$

解答　$(6,\ 9,\ 12)$

解説

2 直線 ℓ，m は，s，t を実数として

$$\ell:(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 0)+s(1,\ 2,\ 3)=(2+s,\ 1+2s,\ 3s)$$

$$m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ -3)+t(2,\ 3,\ 5)=(2t,\ 3t,\ -3+5t)$$

と表される。

$(2+s,\ 1+2s,\ 3s)=(2t,\ 3t,\ -3+5t)$ とすると

$2+s=2t$ ……①，　$1+2s=3t$ ……②，　$3s=-3+5t$ ……③

①，② から　$s=4,\ t=3$　　これは ③ を満たす。

したがって，ℓ と m の交点の座標は　$(6,\ 9,\ 12)$

$\boxed{6}$

解答　$\mathrm{H}(2,\ -4,\ -2)$，$\mathrm{OH}=2\sqrt{6}$

解説

H は直線 AB 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t がある。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(5,\ -2,\ -3)$　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ 2,\ -1)$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(5,\ -2,\ -3)+t(3,\ 2,\ -1)=(5+3t,\ -2+2t,\ -3-t)\quad\cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$3(5+3t)+2(-2+2t)-(-3-t)=0$$

これを解いて　$t=-1$

よって，① から　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2,\ -4,\ -2)$

したがって，H の座標は　$(2,\ -4,\ -2)$

また　$\mathrm{OH}=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$3x-2y+4z=7$　(2)　$2x-3y+9z-6=0$

解説

(1)　求める平面の方程式は　$3\times(x-1)+(-2)\times(y-2)+4\times(z-2)=0$

すなわち　$3x-2y+4z=7$

(2)

[解答 1]　平面の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)\ (\vec{n}\neq\vec{0})$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(6,\ -2,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3,\ -2,\ 0)$ であるから，

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　よって　$6a-2b-2c=0$ ……①

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$　よって　$-3a-2b=0$ ……②

①，② から　$b=-\dfrac{3}{2}a,\ c=\dfrac{9}{2}a$　ゆえに　$\vec{n}=\dfrac{a}{2}(2,\ -3,\ 9)$

$\vec{n}\neq\vec{0}$ より，$a\neq0$ であるから，$\vec{n}=(2,\ -3,\ 9)$ とする。

よって，求める平面は，点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 1)$ を通り $\vec{n}=(2,\ -3,\ 9)$ に垂直であるから，

その方程式は

$$2x-3(y-1)+9(z-1)=0\quad すなわち\quad 2x-3y+9z-6=0$$

[解答 2]　求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とすると

$\mathrm{A}(0,\ 1,\ 1)$ を通るから　$b+c+d=0$ ……①

$\mathrm{B}(6,\ -1,\ -1)$ を通るから　$6a-b-c+d=0$ ……②

$\mathrm{C}(-3,\ -1,\ 1)$ を通るから　$-3a-b+c+d=0$ ……③

① ～ ③ から　$b=-\dfrac{3}{2}a,\ c=\dfrac{9}{2}a,\ d=-3a$

よって，求める平面の方程式は　$ax-\dfrac{3}{2}ay+\dfrac{9}{2}az-3a=0$

$a\neq0$ であるから　$2x-3y+9z-6=0$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$\left(\dfrac{21}{8},\ -\dfrac{15}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)$　(2)　$\left(3,\ -\dfrac{1}{2},\ 5\right)$　(3)　$\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{9}{2},\ -4\right)$

(4)　$\left(\dfrac{73}{24},\ -\dfrac{55}{24},\ \dfrac{3}{4}\right)$

解説

(1)　$\left(\dfrac{5\cdot3+3\cdot2}{3+5},\ \dfrac{5\cdot(-3)+3\cdot0}{3+5},\ \dfrac{5\cdot(-1)+3\cdot5}{3+5}\right)$

よって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{21}{8},\ -\dfrac{15}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)$

(2)　$\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{0+(-1)}{2},\ \dfrac{5+5}{2}\right)$　よって　$\mathrm{Q}\left(3,\ -\dfrac{1}{2},\ 5\right)$

(3)　$\left(\dfrac{-3\cdot3+1\cdot2}{1-3},\ \dfrac{-3\cdot(-3)+1\cdot0}{1-3},\ \dfrac{-3\cdot(-1)+1\cdot5}{1-3}\right)$

よって　$\mathrm{R}\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{9}{2},\ -4\right)$

(4)　$\left(\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{21}{8}+3+\dfrac{7}{2}\right),\ \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{15}{8}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{9}{2}\right),\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{4}+5-4\right)\right)$

よって　$\mathrm{G}\left(\dfrac{73}{24},\ -\dfrac{55}{24},\ \dfrac{3}{4}\right)$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=13$　(2)　$(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=27$

(3)　$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$

解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(\sqrt{5}-0)^2+(4-2)^2}=\sqrt{13}$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-3)^2+(y-0)^2+(z-2)^2=(\sqrt{13})^2$$

ゆえに　$(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=13$

(2)　線分 AB の中点 M が球面の中心であるから

$\mathrm{M}\left(\dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{1+7}{2},\ \dfrac{2+(-4)}{2}\right)$　すなわち　$\mathrm{M}(2,\ 4,\ -1)$

また　$\mathrm{AM}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(4-1)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{3}$

よって，求める球面の方程式は

$$(x-2)^2+(y-4)^2+\{z-(-1)\}^2=(3\sqrt{3})^2$$

ゆえに　$(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=27$

(3)　中心の y 座標が -3 であるから，球面の半径は 3 となる。

よって，求める球面の方程式は

$$(x-2)^2+\{y-(-3)\}^2+(z-1)^2=3^2$$

ゆえに　$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$x=1+2t,\ y=1+3t,\ z=-1+t$；$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$

(2)　$x=5+t,\ y=8-17t,\ z=-7+10t$；$x-5=\dfrac{y-8}{-17}=\dfrac{z+7}{10}$

解説

(1)　求める直線の媒介変数表示は　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ -1)+t(2,\ 3,\ 1)$

すなわち　$x=1+2t,\ y=1+3t,\ z=-1+t$

t を消去して　$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$

(2)　求める直線の方向ベクトル $\vec{d}$ は

$$\vec{d}=(6-5,\ -9-8,\ 3-(-7))=(1,\ -17,\ 10)$$

点 $(5,\ 8,\ -7)$ を通るから　$(x,\ y,\ z)=(5,\ 8,\ -7)+t(1,\ -17,\ 10)$

よって　$x=5+t$，$y=8-17t$，$z=-7+10t$

t を消去して　$x-5=\dfrac{y-8}{-17}=\dfrac{z+7}{10}$

4

解答　$(0,\ -1,\ 9)$

解説

点 $(3,\ 5,\ 6)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(1,\ 2,\ -1)$ に平行な直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ と
おくと　$x=3+t$，$y=5+2t$，$z=6-t$　（t は実数）
と表すことができる。

$x=0$ とすると　$t=-3$　　このとき　$y=-1$，$z=9$

よって，求める交点の座標は　$(0,\ -1,\ 9)$

5

解答　$\left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$

解説

2 直線が交点をもつとき，$(1, 2, -3)+s\vec{a}=(4, -3, 1)+t\vec{b}$ を満たす実数 s，t が存在する．

よって　$(1, 2, -3)+s(3, -1, 2)=(4, -3, 1)+t(3, 7, -2)$ から

$(3s+1, -s+2, 2s-3)=(3t+4, 7t-3, -2t+1)$

ゆえに　$3s+1=3t+4$，$-s+2=7t-3$，$2s-3=-2t+1$

整理して　$s=t+1$，$-s=7t-5$，$s=-t+2$

第 1，第 3 式から　$s=\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$　　これは第 2 式を満たす.

よって，交点の 座標は　$(3s+1, -s+2, 2s-3)=\left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$

6

解答　$\mathrm{H}(4,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{PH}=3$

解説

H は直線 AB 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t がある。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(-3,\ -1,\ -7)$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(8,\ 6,\ 10)$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=(-3,\ -1,\ -7)+t(8,\ 6,\ 10)\\&=(-3+8t,\ -1+6t,\ -7+10t)\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$8(-3+8t)+6(-1+6t)+10(-7+10t)=0$$

これを解いて　$t=\dfrac{1}{2}$

よって，① から　$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(1,\ 2,\ -2)$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(3,\ -1,\ 4)+(1,\ 2,\ -2)=(4,\ 1,\ 2)$

したがって，H の座標は　$(4,\ 1,\ 2)$

また　$\mathrm{PH}=|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$

7

解答　(1)　①　$2x+5y+z+9=0$　　②　$z=0$

　　(2)　①　$3x+7y+2z-7=0$　　②　$3x+2y+6z-6=0$

解説

(1)　①　求める平面の方程式は

$2(x-1)+5(y+3)+(z-4)=0$　　すなわち　$2x+5y+z+9=0$

②　求める平面の方程式は

$0\times(x-\sqrt{2})+0\times(y-2)+z=0$　　すなわち　$z=0$

(2)　①

［解答 1］　平面の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)\ (\vec{n}\neq\vec{0})$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1,\ -5)$ であるから，

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　　よって　$-a+b-2c=0$　……①

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$　　よって　$a+b-5c=0$　……②

①，② から　$a=\dfrac{3}{2}c$，$b=\dfrac{7}{2}c$　　ゆえに　$\vec{n}=\dfrac{c}{2}(3,\ 7,\ 2)$

$\vec{n}\neq\vec{0}$ より，$c\neq0$ であるから，$\vec{n}=(3,\ 7,\ 2)$ とする。

よって，求める平面は，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ を通り $\vec{n}=(3,\ 7,\ 2)$ に垂直であるから，その方程式は　$3(x-1)+7y+2(z-2)=0$　　すなわち　$3x+7y+2z-7=0$

［解答 2］　求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とすると，3 点 A，B，C を通ることから　$a+2c+d=0$ ……①，$b+d=0$ ……②，$2a+b-3c+d=0$ ……③

① ～ ③ から　$a=-\dfrac{3}{7}d$，$b=-d$，$c=-\dfrac{2}{7}d$

よって，求める平面の方程式は　$-\dfrac{3}{7}dx-dy-\dfrac{2}{7}dz+d=0$

$d\neq0$ であるから　$3x+7y+2z-7=0$

②　求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とすると，3 点 A，B，C を通ることから　$2a+d=0$，$3b+d=0$，$c+d=0$

ゆえに　$a=-\dfrac{d}{2}$，$b=-\dfrac{d}{3}$，$c=-d$

よって，求める平面の方程式は　$-\dfrac{d}{2}x-\dfrac{d}{3}y-dz+d=0$

$d\neq0$ であるから　$3x+2y+6z-6=0$

1

解答　(1)　中心の座標は $(4,\ -3,\ 2)$，半径は $\sqrt{29}$

　　(2)　$(x-4)^2+(y+3)^2=25$，$z=0$

解説

(1)　球面の方程式を

$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$

とする。

点 O，A，B，C がこの球面上にあるから

$D=0$，$16+4C+D=0$，

$1+1+A+B+D=0$，

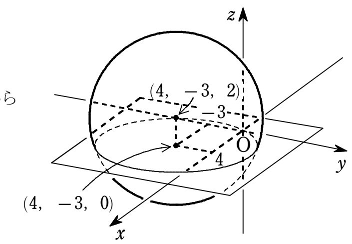
$1+1+36+A-B+6C+D=0$

この連立方程式を解いて

$A=-8$，$B=6$，$C=-4$，$D=0$

よって，球面の方程式は

$x^2+y^2+z^2-8x+6y-4z=0$



変形すると　$(x-4)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=29$

中心の座標は $(4,\ -3,\ 2)$，半径は $\sqrt{29}$

(2)　xy 平面では $z=0$ であるから　$(x-4)^2+(y+3)^2=25$，$z=0$

2

解答　$k=-6$

解説

2 直線 ℓ，m は，s，t を実数として

$$\begin{aligned}\ell\ :\ (x,\ y,\ z)&=(-2,\ 0,\ 2)+s(-3,\ 2,\ k)\\&=(-2-3s,\ 2s,\ 2+ks)\\m\ :\ (x,\ y,\ z)&=(-3,\ -3,\ 0)+t(2,\ -1,\ 4)\\&=(-3+2t,\ -3-t,\ 4t)\end{aligned}$$

と表される。

ℓ と m が交わるとき，

$$(-2-3s,\ 2s,\ 2+ks)=(-3+2t,\ -3-t,\ 4t)$$

を満たす実数 s，t，k が存在する。

よって　$-2-3s=-3+2t$ ……①，　$2s=-3-t$ ……②，　$2+ks=4t$ ……③

①，② から　$s=-7$，$t=11$

これらを ③ に代入して　$2-7k=44$　　したがって　$k=-6$

3

解答　$\alpha=30^\circ$

解説

$\vec{d_1}=(3,\ 5,\ 4)$，$\vec{d_2}=(1,\ -10,\ -7)$ とすると，$\vec{d_1}$，$\vec{d_2}$ はそれぞれ直線 ℓ，m に平行である。

$\vec{d_1}$ と $\vec{d_2}$ のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}}{|\vec{d_1}||\vec{d_2}|}=\frac{3\times1+5\times(-10)+4\times(-7)}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\sqrt{1^2+(-10)^2+(-7)^2}}\\&=\frac{-75}{5\sqrt{2}\times5\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから　$\theta=150^\circ$

α は鋭角であるから　　$\alpha=180°-\theta=180°-150°=30°$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$(-1,\ 5,\ -3)$　　(2)　$k=4$，接点の座標は $(-2,\ 0,\ 4)$

解説

(1)　ℓ の方程式は $(x,\ y,\ z)=(2,\ 4,\ -1)+t(3,\ -1,\ 2)$ から

$$x=2+3t,\ y=4-t,\ z=-1+2t\ \ (t \text{ は実数})$$

これらを $2x+3y-z=16$ に代入して

$$2(2+3t)+3(4-t)-(-1+2t)=16$$

よって　　$t=-1$

ゆえに，求める交点の座標は　　$(-1,\ 5,\ -3)$

(2)　m の方程式は $(x,\ y,\ z)=(-3,\ -1,\ 0)+t(1,\ 1,\ k)$ から

$$x=-3+t,\ y=-1+t,\ z=kt\ \ (t \text{ は実数})\ \ \cdots\cdots ①$$

また，球面の方程式は　　$x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$

① を代入すると　　$(-3+t)^2+(-3+t)^2+(kt-3)^2=9$

よって　　$(k^2+2)t^2-6(k+2)t+18=0$　$\cdots\cdots ②$

直線 m が球面に接する条件は，2 次方程式 ② の判別式 D に

ついて　　$\dfrac{D}{4}=\{-3(k+2)\}^2-18(k^2+2)=0$

ゆえに　　$k^2-4k=0$　　　よって　　$k(k-4)=0$

ゆえに　　$k=0,\ 4$　　　$k>0$ であるから　　$k=4$

このとき，② から　　$t=-\dfrac{-3(4+2)}{4^2+2}=1$

よって，接点の座標は，① から　　$(-2,\ 0,\ 4)$

$\boxed{1}$

解答　$(2,\ -3,\ 4)$

解説

円の方程式を変形すると

$$(x-2)^2+(y+3)^2=9,\ z=0\quad \cdots\cdots ①$$

これは xy 平面上で中心 $(2,\ -3,\ 0)$ の円を表す。

ゆえに，球の中心の座標は $(2,\ -3,\ p)$ $(p>0)$ と表され，半径が 5 であるから，その方程式は　　$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-p)^2=5^2$

この球面と xy 平面の交わりの図形の方程式は

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(0-p)^2=25,\ z=0$$

よって　　$(x-2)^2+(y+3)^2=25-p^2,\ z=0$

条件より，この方程式が ① と一致するから　　$25-p^2=9$

ゆえに　　$p^2=16$　　　$p>0$ であるから　　$p=4$

したがって，求める球の中心の座標は　　$(2,\ -3,\ 4)$

別解　[球の中心の座標を $(2,\ -3,\ p)$ $(p>0)$ とおくまでは同じ。]

球の半径は 5，円 ① の半径は 3 であるから，三平方の定理により　　$p^2+3^2=5^2$

$p>0$ であるから　　$p=4$

したがって，求める球の中心の座標は　　$(2,\ -3,\ 4)$

$\boxed{2}$

解答　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(1,\ 2,\ 0)$ のとき最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(1,\ -1,\ 1)$ であるから，直線 ℓ，m の方程式は，s，t を実数とすると

$\ell:(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ -1)+s(-1,\ 1,\ 2)$ から　　$x=1-s,\ y=1+s,\ z=-1+2s$

$m:(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 1)+t(1,\ -1,\ 1)$ から　　$x=2+t,\ y=1-t,\ z=1+t$

よって，$\mathrm{P}(1-s,\ 1+s,\ -1+2s)$，$\mathrm{Q}(2+t,\ 1-t,\ 1+t)$ とすると

$$\mathrm{PQ}^2=(1+t+s)^2+(-t-s)^2+(2+t-2s)^2=6s^2-6s+3t^2+6t+5$$

$$=6\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+3(t+1)^2+\frac{1}{2}$$

よって，PQ^2 は $s=\dfrac{1}{2}$ かつ $t=-1$，すなわち $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(1,\ 2,\ 0)$ のとき最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

$\mathrm{PQ}>0$ であるから，PQ はこのとき最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をとる。

別解　$\mathrm{P}(1-s,\ 1+s,\ -1+2s)$，$\mathrm{Q}(2+t,\ 1-t,\ 1+t)$ とするところまでは同じ。

長さ PQ が最小となるのは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のときであるから，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ より

$$-1\times(1+s+t)+1\times(-s-t)+2\times(2-2s+t)=0,$$
$$1\times(1+s+t)-1\times(-s-t)+1\times(2-2s+t)=0$$

ゆえに，$-6s+3=0$，$3t+3=0$ から　　$s=\dfrac{1}{2},\ t=-1$

このとき $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(1,\ 2,\ 0)$，最小値は　　$\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2+0^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$30°$　　(2)　$3x+y-2z-4=0$

解説

(1)　直線 ℓ の方向ベクトル $\vec{d}$ は，$\vec{d}=(4,\ -1,\ 1)$ とおける。

平面 α の法線ベクトル $\vec{n}$ は，$\vec{n}=(1,\ -4,\ 1)$ とおける。

$\vec{d}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ_1 $(0°\leqq\theta_1\leqq180°)$ とすると

$$\cos\theta_1=\frac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}||\vec{n}|}$$
$$=\frac{4\cdot1+(-1)\cdot(-4)+1\cdot1}{\sqrt{4^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

$0°\leqq\theta_1\leqq180°$ であるから　　$\theta_1=60°$

よって，直線 ℓ と平面 α のなす角は　　$90°-60°=30°$

(2)　直線 $\dfrac{x-6}{3}=y-2=\dfrac{z-1}{-2}$ の方向ベクトル $\vec{d}$ は，$\vec{d}=(3,\ 1,\ -2)$ とおける。

求める平面は点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$ を通り，$\vec{d}$ を法線ベクトルとする平面であるから，その方程式は

$$3\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+(-2)(z-0)=0$$

ゆえに　　$3x+y-2z-4=0$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{2}$　　(2)　$6x+2y+3z+6=0$

解説

(1)　②－① から　　$6y-9z+18=0$　　　よって　　$z=\dfrac{2(y+3)}{3}$

①×2＋② から　　$9x+9z=0$　　　ゆえに　　$z=-x$

よって，$-x=\dfrac{2(y+3)}{3}=z$ から　　$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{2}$

(2)　交線 ℓ 上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ -3,\ 0)$，$\mathrm{B}(-2,\ 0,\ 2)$ があるから，γ は 3 点 A，B，P を通る平面である。

平面 γ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ $(\vec{n}\neq\vec{0})$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,\ 3,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1,\ -6,\ 2)$ であるから，

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　　　よって　　$-2a+3b+2c=0$ $\cdots\cdots ③$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$　　　よって　　$a-6b+2c=0$　　$\cdots\cdots ④$

③，④ から　　$a=3b$，$c=\dfrac{3}{2}b$　　　ゆえに　　$\vec{n}=\dfrac{b}{2}(6,\ 2,\ 3)$

$\vec{n}\neq\vec{0}$ より，$b\neq0$ であるから，$\vec{n}=(6,\ 2,\ 3)$ とする。

よって，平面 γ は点 $\mathrm{A}(0,\ -3,\ 0)$ を通り，$\vec{n}=(6,\ 2,\ 3)$ に垂直であるから，その方程式は　　$6x+2(y+3)+3z=0$　すなわち　$6x+2y+3z+6=0$

$\boxed{1}$

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{GU}}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{r}+\vec{s})$ (2) 略

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OT}}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OR}}+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}})}{2}=\frac{\vec{r}+\vec{p}+\vec{s}}{2}$

また $\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QU}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\vec{p}+\vec{r}+\vec{s}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{GU}}=\overrightarrow{\mathrm{OU}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{r}+\vec{s})$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{QT}}=\overrightarrow{\mathrm{QU}}+\overrightarrow{\mathrm{UT}}=\vec{s}-\vec{r}$ $\overrightarrow{\mathrm{QV}}=\overrightarrow{\mathrm{QU}}+\overrightarrow{\mathrm{UV}}=\vec{s}-\vec{p}$

$\vec{p}$，$\vec{r}$，$\vec{s}$ はすべて大きさが等しく，互いに垂直であるから

$|\vec{p}|=|\vec{r}|=|\vec{s}|$，$\vec{p}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{s}=\vec{s}\cdot\vec{p}=0$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{GU}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QT}}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{s}+\vec{r})\cdot(\vec{s}-\vec{r})$$
$$=\frac{1}{2}\vec{p}\cdot(\vec{s}-\vec{r})+\frac{1}{2}(\vec{s}+\vec{r})\cdot(\vec{s}-\vec{r})$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{p}\cdot\vec{s}-\vec{p}\cdot\vec{r})+\frac{1}{2}(|\vec{s}|^2-|\vec{r}|^2)=0$$

同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{GU}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QV}}=\frac{1}{2}(\vec{r}+\vec{s}+\vec{p})\cdot(\vec{s}-\vec{p})$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{r}\cdot\vec{s}-\vec{r}\cdot\vec{p})+\frac{1}{2}(|\vec{s}|^2-|\vec{p}|^2)=0$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{GU}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QT}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GU}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QV}}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{GU}}$ は平面QTV上の交わる2直線QT，QVに垂直であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{GU}}$ は平面QTVに垂直である。

$\boxed{2}$

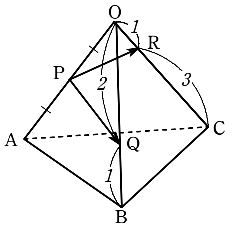
解答 (1) $\mathrm{PQ}=\frac{\sqrt{13}}{6}$，$\mathrm{PR}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ (2) $\frac{5}{48}$ (3) $\frac{\sqrt{131}}{96}$

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

また $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$



$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left|\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2$$
$$=\frac{4}{9}|\vec{b}|^2-\frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{4}{9}\times1^2-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times1^2=\frac{13}{36}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|>0$ であるから $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{\sqrt{13}}{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|^2=\frac{1}{16}|\vec{c}|^2-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{4}|\vec{a}|^2$$
$$=\frac{1}{16}\times1^2-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times1^2=\frac{3}{16}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|>0$ であるから $|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=\frac{\sqrt{3}}{4}$

したがって $\mathrm{PQ}=\frac{\sqrt{13}}{6}$，$\mathrm{PR}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{1}{24}(4\vec{b}-3\vec{a})\cdot(\vec{c}-2\vec{a})$

$$=\frac{1}{24}(4\vec{b}\cdot\vec{c}-8\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{c}+6|\vec{a}|^2)$$
$$=\frac{1}{24}\left(4\times\frac{1}{2}-8\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{2}+6\times1^2\right)=\frac{5}{48}$$

(3) (1)，(2)から

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{36}\times\frac{3}{16}-\left(\frac{5}{48}\right)^2}=\frac{\sqrt{131}}{96}$$

$\boxed{3}$

解答 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

解説

$|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2+|\vec{a}-\vec{d}|^2$

$=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2$

$=6-2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$

$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{c}|=|\vec{a}-\vec{d}|$，$\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=-\vec{a}$ であるから

$$3|\vec{a}-\vec{b}|^2=6-2\vec{a}\cdot(-\vec{a})=6+2|\vec{a}|^2=8$$

したがって $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\boxed{4}$

解答 略

解説

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

OA⊥BC より $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ であるから $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ ……①

OB⊥CA より $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$ であるから $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ ……②

①，②から $\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{c}$

このとき $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

したがって OC⊥AB

$\boxed{5}$

解答 $a=\pm3$

解説

中心が点$(3,\ a,\ 1)$，半径が4の球面の方程式は

$$(x-3)^2+(y-a)^2+(z-1)^2=16$$

この球面が zx 平面 $y=0$ と交わってできる図形の方程式は

$$(x-3)^2+(0-a)^2+(z-1)^2=16,\ y=0$$

すなわち $(x-3)^2+(z-1)^2=16-a^2$，$y=0$

これは zx 平面上で，中心が点$(3,\ 0,\ 1)$，半径が $\sqrt{16-a^2}$ の円を表す。

その半径が $\sqrt{7}$ であるから $16-a^2=7$

よって $a^2=9$ ゆえに $a=\pm3$

$\boxed{6}$

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}$

解説

(1) 点Dは直線BC′上にあるから，s を実数として

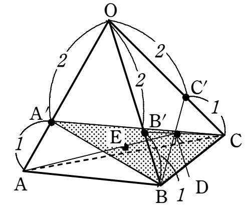
$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\vec{b}+\frac{2}{3}s\vec{c}$ ……①

と表される。

また，点Dは直線B′C上にあるから，t を実数として $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ ……② と表される。



$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ であり，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行でないから，①，②より

$$1-s=\frac{2}{3}(1-t),\ \frac{2}{3}s=t$$

これを解いて $s=\frac{3}{5}$，$t=\frac{2}{5}$ ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

(2) 点Eは直線AD上にあるから，u を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-u)\vec{a}+\frac{2}{5}u\vec{b}+\frac{2}{5}u\vec{c}$ ……③ と表される。

$\vec{a}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ であるから，③より $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{3}{2}(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\frac{2}{5}u\vec{b}+\frac{2}{5}u\vec{c}$

ここで，点Eは平面A′BC上にあるから $\frac{3}{2}(1-u)+\frac{2}{5}u+\frac{2}{5}u=1$

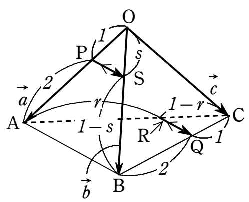
これを解いて $u=\frac{5}{7}$ よって $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}$

$\boxed{7}$

解答 (ア) $(r-1)\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-r\right)\vec{c}$ (イ) $-\frac{1}{3}\vec{a}+s\vec{b}$ (ウ) $\frac{2}{3}$ (エ) $\frac{1}{3}$

解説

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}-\{(1-r)\vec{a}+r\vec{c}\}$$
$$={}^{ア}(r-1)\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-r\right)\vec{c}\ \text{……①}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}={}^{イ}-\frac{1}{3}\vec{a}+s\vec{b}$$



RQ∥PS であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ となる実数 k が

あるから $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=-\frac{k}{3}\vec{a}+ks\vec{b}$ ……②

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないから，①，②より

$r-1=-\frac{k}{3}$ ……③，$\frac{1}{3}=ks$ ……④，$\frac{2}{3}-r=0$ ……⑤

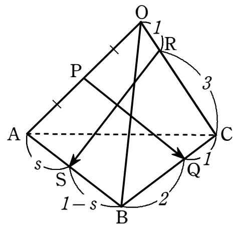
⑤から　$r={}^{\text{ウ}}\dfrac{2}{3}$　　よって，③から　$k=1$

したがって，④から　$s={}^{\text{エ}}\dfrac{1}{3}$

$\boxed{8}$

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{RS}}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}-\dfrac{1}{4}\vec{c}$　(3) $s=\dfrac{1}{7}$

解説



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1\cdot\vec{b}+2\vec{c}}{2+1}=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

であるから

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{4}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}-\dfrac{1}{4}\vec{c}$

(3) 線分 PQ と線分 RS の交点を T とする。

T は直線 PQ 上にあるから　$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=u\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　(u は実数)

よって，(1) から

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+u\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$=\dfrac{1}{2}(1-u)\vec{a}+\dfrac{1}{3}u\vec{b}+\dfrac{2}{3}u\vec{c}$　……①

T は直線 RS 上にあるから　$\overrightarrow{\mathrm{RT}}=v\overrightarrow{\mathrm{RS}}$　(v は実数)

ゆえに，(2) から

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+v\overrightarrow{\mathrm{RS}}$

$=v(1-s)\vec{a}+vs\vec{b}+\dfrac{1}{4}(1-v)\vec{c}$　……②

4 点 O，A，B，C は同一平面上にないから，①，② より

$\dfrac{1}{2}(1-u)=v(1-s)$，$\dfrac{1}{3}u=vs$，$\dfrac{2}{3}u=\dfrac{1}{4}(1-v)$

よって　$u=\dfrac{1}{5}$，$v=\dfrac{7}{15}$，$s=\dfrac{1}{7}$

$\boxed{9}$

解答 (1) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　(2) $5\sqrt{2}$

解説

(1) $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=5\cdot3\cos60^\circ=\dfrac{15}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3\cdot4\cos60^\circ=6$

点 H は平面 OAB 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (s，t は実数) と表される。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は平面 OAB に垂直であるから　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ であるから

$(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$，$(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

よって　$s\cdot4^2+t\cdot0-6=0$，$s\cdot0+t\cdot5^2-\dfrac{15}{2}=0$

すなわち　$16s-6=0$，$25t-\dfrac{15}{2}=0$

これを解いて　$s=\dfrac{3}{8}$，$t=\dfrac{3}{10}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(2) $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot5=10$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left|\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$

$=\dfrac{9}{64}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\dfrac{9}{100}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

$+\dfrac{9}{40}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=\dfrac{9}{64}\cdot16+\dfrac{9}{100}\cdot25+9+0-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{15}{2}-\dfrac{3}{4}\cdot6$

$=\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}+9-\dfrac{9}{2}-\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

よって，四面体 OABC の体積は　$\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CH}=\dfrac{1}{3}\cdot10\cdot\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

$\boxed{10}$

解答　$5a-3b=1$

解説

直線 AB 上の点を P，直線 OC 上の点を Q とする。このとき，s，t を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ 1,\ 2)+s(b-a,\ 1,\ 1)$

$=(a+s(b-a),\ s+1,\ s+2)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(1,\ -1,\ 1)=(t,\ -t,\ t)$

と表される。2 点 P，Q が一致するための条件は

$a+s(b-a)=t$　……①，

$s+1=-t$　……②，

$s+2=t$　……③

②，③ を解くと　$s=-\dfrac{3}{2}$，$t=\dfrac{1}{2}$

この s，t の値を ① に代入して　$a-\dfrac{3}{2}(b-a)=\dfrac{1}{2}$

よって　$5a-3b=1$

$\boxed{11}$

解答 (1) 略　(2) $(3,\ 1,\ 0)$

解説

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(-4,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ 1,\ -1)$

3 点 A，B，C は一直線上にないから，点 P が H 上にあるための条件は，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t が存在することである。

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とすると

$(-4,\ 1,\ 1)=s(2,\ -1,\ 0)+t(0,\ 1,\ -1)$

よって　$-4=2s$　……①，　$1=-s+t$　……②，　$1=-t$　……③

①，③ から　$s=-2$，$t=-1$

これは ② を満たす。

したがって，点 P は H 上の点である。

(2) 求める交点を R とすると，R は H 上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=u\overrightarrow{\mathrm{AB}}+v\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(u，v は実数)

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(0,\ 4,\ 5)+u(2,\ -1,\ 0)+v(0,\ 1,\ -1)$

$=(2u,\ 4-u+v,\ 5-v)$

$\mathrm{QR}\perp H$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

ゆえに　$4u-4+u-v=0$，$4-u+v-5+v=0$

すなわち　$5u-v=4$，$-u+2v=1$

よって　$u=1$，$v=1$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(2,\ 4,\ 4)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(3,\ 1,\ 0)$

ゆえに，求める交点の座標は　$(3,\ 1,\ 0)$

$\boxed{12}$

解答 (1) $z=a-1$　(2) $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ 2,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}(3,\ -2,\ 1)$　(3) $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{1}{3}$

解説

(1) 4 点 A，B，C，D が同じ平面上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t が存在する。

$s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s(-1,\ 4,\ -5)+t(3,\ -3,\ -3)=(-s+3t,\ 4s-3t,\ -5s-3t)$，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-8+5a,\ 14-8a,\ z-3)$

であるから　$-s+3t=-8+5a$　……①

$4s-3t=14-8a$　……②

$-5s-3t=z-3$　……③

①＋② から　$3s=6-3a$　　よって　$s=2-a$

よって，① から　$3t=-8+5a+(2-a)=4a-6$

ゆえに，③ から　$z=-5s-3t+3=-5(2-a)-(4a-6)+3=a-1$

(2) (1) より　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(2-a)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4a-6}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\vec{0}$ でなく平行でないから，点 D が直線 AB 上にあるのは，$\dfrac{4a-6}{3}=0$

すなわち　$a=\dfrac{3}{2}$ のときである。

同様に，点 D が直線 AC 上にあるのは，$2-a=0$ すなわち $a=2$ のときである。

P，Q の座標は，それぞれ $\mathrm{D}(-7+5a,\ 14-8a,\ a-1)$ に $a=\dfrac{3}{2}$，$a=2$ を代入して

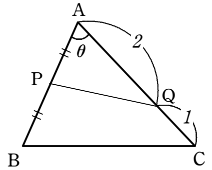
得られるから　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ 2,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}(3,\ -2,\ 1)$

(3)　$a=\frac{3}{2}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$a=2$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



よって　$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2},\ \frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AC}}=\frac{2}{3}$

ここで，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ $(0<\theta<\pi)$ とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\theta,\quad S_2=\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\sin\theta$$

ゆえに　$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

13

解答　(1) $\sqrt{14}$　(2) $\left(\frac{27}{14},\ -\frac{9}{14},\ \frac{9}{7}\right)$

(3) $\mathrm{P}\left(-\frac{9\sqrt{14}}{14},\ \frac{3\sqrt{14}}{14},\ -\frac{3\sqrt{14}}{7}\right)$ のとき最大値 $3+\sqrt{14}$

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ -2,\ 2)$ であるから

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=(-1)^2+1^2+2^2=6$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=(-2)^2+(-2)^2+2^2=12$，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1)\times(-2)+1\times(-2)+2\times2=4$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{6\times12-4^2}=\frac{1}{2}\sqrt{56}=\sqrt{14}$$

(2)　H は平面 ABC 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 s，t がある。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ……①

OH⊥(平面 ABC) であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から　$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

ゆえに　$6s+4t=3$ ……②

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ から　$(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0$

ゆえに　$2s+6t=3$ ……③

②，③ を解いて　$s=\frac{3}{14}$，$t=\frac{3}{7}$

これを ① に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(3,\ 0,\ 0)+\frac{3}{14}(-1,\ 1,\ 2)+\frac{3}{7}(-2,\ -2,\ 2)=\left(\frac{27}{14},\ -\frac{9}{14},\ \frac{9}{7}\right)\ \cdots\cdots④$$

よって，H の座標は　$\left(\frac{27}{14},\ -\frac{9}{14},\ \frac{9}{7}\right)$

(3)　V が最大になるのは，△ABC を底面と考えると，高さが最大になるときである。
これは 3 点 P，O，H がこの順に一直線上にあるときである。

④ から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{9}{14}(3,\ -1,\ 2)$ であり

$$\mathrm{OH}=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{9}{14}\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}=\frac{9\sqrt{14}}{14}$$

よって，高さ PH の長さは

$$\mathrm{PH}=\mathrm{PO}+\mathrm{OH}=3+\frac{9\sqrt{14}}{14}$$

であるから，V の最大値は，(1) から

$$\frac{1}{3}\times\sqrt{14}\times\left(3+\frac{9\sqrt{14}}{14}\right)=3+\sqrt{14}$$

V が最大となるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OH}}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(-\frac{3}{\frac{9\sqrt{14}}{14}}\cdot\frac{9}{14}\right)(3,\ -1,\ 2)$$

$$=-\frac{3\sqrt{14}}{14}(3,\ -1,\ 2)$$

よって，求める点 P の座標は

$$\left(-\frac{9\sqrt{14}}{14},\ \frac{3\sqrt{14}}{14},\ -\frac{3\sqrt{14}}{7}\right)$$

14

解答　(1) $x^2+y^2+z^2=9$　(2) 略　(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=5\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=3$

(4) $\mathrm{P}\left(\frac{9\sqrt{2}}{10},\ \frac{6\sqrt{2}}{5},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき最大値 $15\sqrt{2}$

解説

(1)　中心 (0，0，0)，半径 3 の球面の方程式を求めて

$x^2+y^2+z^2=9$ ……①

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y-3,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y+3,\ z)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=x^2+(y-3)(y+3)+z^2=x^2+y^2+z^2-9$$

点 P は球面 S 上の点であるから，① より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{9}=3$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta=5\sqrt{2}\times3\cos\theta=15\sqrt{2}\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3x+4y+5z$ であるから　$3x+4y+5z=15\sqrt{2}\cos\theta$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$-1\leqq\cos\theta\leqq1$

ゆえに　$-15\sqrt{2}\leqq3x+4y+5z\leqq15\sqrt{2}$

$\cos\theta=1$ となるのは $\theta=0$ のときであり，そのとき

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　ただし $k>0$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=k|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$　ゆえに　$k=\frac{3\sqrt{2}}{10}$

よって，$\mathrm{P}\left(\frac{9\sqrt{2}}{10},\ \frac{6\sqrt{2}}{5},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき $3x+4y+5z$ は最大値 $15\sqrt{2}$ をとる。

章末問題B

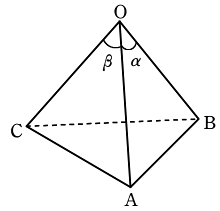
1

解答　(1) 略　(2) 略

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



一方，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

ここで，$\angle\mathrm{AOB}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOC}=\beta$ とすると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\alpha=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\beta$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\alpha=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\beta$ ……①

また，△OAB=△OAC から　$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\alpha=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\sin\beta$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\alpha=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\sin\beta$ ……②

①，② から　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\sin^2\alpha+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\cos^2\alpha$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\sin^2\beta+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\cos^2\beta$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$　すなわち　OB=OC

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{3}\{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\}$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{3}(|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2)=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直である。

2

解答　略

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ から　$(-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$　ゆえに　$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2$ ……①

$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ から　$(-\vec{d})\cdot(\vec{b}-\vec{d})=0$　ゆえに　$\vec{b}\cdot\vec{d}=|\vec{d}|^2$ ……②

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ から　$\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})=0$　ゆえに　$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ ……③

①～③ から　$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2$　すなわち　AC=AD

よって，△ACD は辺 CD を底辺とする二等辺三角形となり，M は辺 CD の中点であるから　AM⊥CD

また，仮定から　AB⊥CD

したがって，3 点 A，B，M を通る平面は辺 CD と直交する。

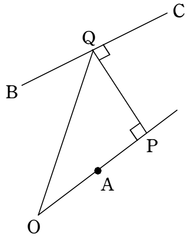
3

解答　(1) P(2，−2，2)，Q(2，0，4)　(2) (0，2，2)　(3) 4

解説

(1) $\overrightarrow{BC}=(6-(-2),\ (-1)-1,\ 5-3)=(8,\ -2,\ 2)$

直線OA上に点P，直線BC上に点Qがあるから，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ は実数 s，t を用いて次のように表せる。



$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}=s(1,\ -1,\ 1)=(s,\ -s,\ s)$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}=(-2,\ 1,\ 3)+t(8,\ -2,\ 2)$
$=(8t-2,\ -2t+1,\ 2t+3)$

したがって　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$
$=(8t-2,\ -2t+1,\ 2t+3)-(s,\ -s,\ s)$
$=(-s+8t-2,\ s-2t+1,\ -s+2t+3)$

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OA}$ より $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ であるから

$(-s+8t-2)-(s-2t+1)+(-s+2t+3)=0$

よって　$-3s+12t=0$　　ゆえに　$s-4t=0$ ……①

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$ より $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ であるから

$8(-s+8t-2)-2(s-2t+1)+2(-s+2t+3)=0$

よって　$-12s+72t-12=0$　　ゆえに　$s-6t+1=0$ ……②

①，②を解くと　$s=2$，$t=\dfrac{1}{2}$

したがって　P(2，−2，2)，Q(2，0，4)

(2) 点Hは平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{OH}$ は実数 u，v を用いて次のように表せる。

$\overrightarrow{OH}=u\overrightarrow{OP}+v\overrightarrow{OQ}=(2u+2v,\ -2u,\ 2u+4v)$

したがって　$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}$
$=(2u+2v,\ -2u,\ 2u+4v)-(-2,\ 1,\ 3)$
$=(2u+2v+2,\ -2u-1,\ 2u+4v-3)$

$\overrightarrow{BH}\perp\alpha$ であるから　$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OP}$ かつ $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OP}$ より $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OP}=0$ であるから

$2(2u+2v+2)-2(-2u-1)+2(2u+4v-3)=0$

よって　$12u+12v=0$ ……③

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OQ}$ より $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ であるから

$2(2u+2v+2)+0\cdot(-2u-1)+4(2u+4v-3)=0$

よって　$12u+20v-8=0$ ……④

③，④を解くと　$u=-1$，$v=1$　　したがって　H(0，2，2)

(3) 底面を△OPQと考えると，高さは $|\overrightarrow{BH}|$ である。

$\overrightarrow{BH}=(0-(-2),\ 2-1,\ 2-3)=(2,\ 1,\ -1)$ より

$|\overrightarrow{BH}|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

△OPQは∠OPQ＝90°の直角三角形である。

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2}=2\sqrt{3}$

$\overrightarrow{PQ}=(2-2,\ 0-(-2),\ 4-2)=(0,\ 2,\ 2)$ より

$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{0^2+2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

よって　$\triangle OPQ=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{2}=2\sqrt{6}$

四面体OBPQの体積は　$\dfrac{1}{3}\cdot2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=4$

$\boxed{4}$

解答　(1) 略　(2) 略　(3) $\dfrac{49}{36}$

解説

(1) P$(x,\ y,\ z)$ とすると

$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y,\ z)$

$\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=(x,\ y-2,\ z)+2(x,\ y,\ z-3)=(3x,\ 3y-2,\ 3z-6)$

よって，$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP})=0$ から

$3x(x-1)+y(3y-2)+z(3z-6)=0$

ゆえに　$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2+(z-1)^2=\left(\dfrac{7}{6}\right)^2$

よって，動点Pは $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$ から $\dfrac{7}{6}$ の距離にある.

(2) 点Qが平面ABC上にあるための条件は $\overrightarrow{AQ}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ ……① となる実数 a，b が存在することである.

$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 3)$

また　$\overrightarrow{AQ}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$

ゆえに，①から　$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)=(-a-b,\ 2a,\ 3b)$

よって　$-\dfrac{1}{2}=-a-b$，$\dfrac{1}{3}=2a$，$1=3b$

$a=\dfrac{1}{6}$，$b=\dfrac{1}{3}$ のとき，これらを満たす.

ゆえに，点Qは平面ABC上にある.

(3) 点Pから平面ABCに垂線PHを引くと，体積が最大となるのは，PHが最大のとき，すなわちHがQに一致するときである．よって，求める体積の最大値を V として

$V=\dfrac{1}{3}\triangle ABC\cdot PQ=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}\cdot PQ$

ここで　$|\overrightarrow{AB}|^2=(-1)^2+2^2+0^2=5$，

$|\overrightarrow{AC}|^2=(-1)^2+0^2+3^2=10$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1\cdot(-1)+2\cdot0+0\cdot3=1$

また，(1)から　$PQ=\dfrac{7}{6}$

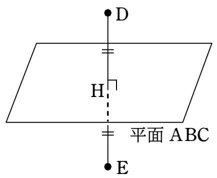
ゆえに　$V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{5\cdot10-1^2}\cdot\dfrac{7}{6}=\dfrac{49}{36}$

$\boxed{5}$

解答　(−5，3，1)

解説

点Dから平面ABCに下ろした垂線をDHとする。



Hは平面ABC上にあるから

$\overrightarrow{DH}=r\overrightarrow{DA}+s\overrightarrow{DB}+t\overrightarrow{DC}$

$r+s+t=1$ ……①

と表される。

$\overrightarrow{DA}=(1,\ -2,\ -7)$，$\overrightarrow{DB}=(0,\ -3,\ -6)$，

$\overrightarrow{DC}=(-1,\ -2,\ -5)$ であるから

$\overrightarrow{DH}=r(1,\ -2,\ -7)+s(0,\ -3,\ -6)+t(-1,\ -2,\ -5)$
$=(r-t,\ -2r-3s-2t,\ -7r-6s-5t)$

DHは平面ABCに垂直であるから　$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AC}$

ゆえに　$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ……②，$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ ……③

$\overrightarrow{AB}=(-1,\ -1,\ 1)$ であるから，②より

$(r-t)\cdot(-1)+(-2r-3s-2t)\cdot(-1)+(-7r-6s-5t)\cdot1=0$

よって　$6r+3s+2t=0$ ……④

$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 0,\ 2)$ であるから，③より

$(r-t)\cdot(-2)+(-2r-3s-2t)\cdot0+(-7r-6s-5t)\cdot2=0$

よって　$4r+3s+2t=0$ ……⑤

①，④，⑤から　$r=0$，$s=-2$，$t=3$

したがって　$\overrightarrow{DH}=(-3,\ 0,\ -3)$

原点をOとすると

$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{DH}=(1,\ 3,\ 7)+2(-3,\ 0,\ -3)=(-5,\ 3,\ 1)$

ゆえに，点Eの座標は　(−5，3，1)

$\boxed{6}$

解答　P(1，0，−2)のとき最小値7

解説

Oを原点とし，p，q，r を実数とすると

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+p\vec{u}=(2p+1,\ p,\ -p-2)$ ……①

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+q\vec{v}=(q+1,\ -q+2,\ q-3)$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OC}+r\vec{w}=(r+1,\ 2r-1,\ r)$

と表される。

よって　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(-2p+q,\ -p-q+2,\ p+q-1)$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(-2p+r,\ -p+2r-1,\ p+r+2)$

また　$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=(-2p+q)\cdot1+(-p-q+2)\cdot(-1)+(p+q-1)\cdot1$
$=3q-3$

$\overrightarrow{PR}\cdot\vec{w}=(-2p+r)\cdot1+(-p+2r-1)\cdot2+(p+r+2)\cdot1$
$=-3p+6r$

$PQ\perp m$ から　$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=0$　　ゆえに，$3q-3=0$ から　$q=1$

$PR\perp n$ から　$\overrightarrow{PR}\cdot\vec{w}=0$　　よって，$-3p+6r=0$ から　$r=\dfrac{1}{2}p$

このとき　$PQ^2+PR^2=|\overrightarrow{PQ}|^2+|\overrightarrow{PR}|^2$

$=(-2p+1)^2+(-p+1)^2+p^2+\left(-\dfrac{3}{2}p\right)^2+(-1)^2+\left(\dfrac{3}{2}p+2\right)^2=\dfrac{21}{2}p^2+7$

$p=0$ のとき，①から　$\overrightarrow{OP}=(1,\ 0,\ -2)$

したがって，PQ^2+PR^2 はP(1，0，−2)のとき最小値7をとる。

$\boxed{7}$

解答　(1) (−3，−1，7)　(2) $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{11}=\dfrac{z-7}{10}$

解説

(1) $x+5=\dfrac{3-y}{2}=\dfrac{z-3}{2}=t$（$t$ は実数）とすると

$x=t-5,\ y=-2t+3,\ z=2t+3$ ……①

これを m の方程式に代入すると　$\dfrac{t-5}{3}=\dfrac{-2t}{4}=\dfrac{-2t-1}{5}$

よって　$2(t-5)=-3t$ ……②，$-5t=2(-2t-1)$ ……③

② から　$t=2$　これは ③ を満たす。

ゆえに，求める共有点の座標は，① から　$(-3,\ -1,\ 7)$

(2)　ℓ，m の方向ベクトルはそれぞれ $\vec{d_1}=(1,\ -2,\ 2)$，$\vec{d_2}=(3,\ 4,\ -5)$ とおける。

直線 n の方向ベクトルを $\vec{d}=(a,\ b,\ c)$ $(\vec{d}\neq\vec{0})$ とすると　$\vec{d_1}\cdot\vec{d}=0$，$\vec{d_2}\cdot\vec{d}=0$

よって　$a-2b+2c=0$ ……④，$3a+4b-5c=0$ ……⑤

④，⑤ から　$b=\dfrac{11}{2}a$，$c=5a$　ゆえに，$\vec{d}=(2,\ 11,\ 10)$ とする。

直線 n は点 $(-3,\ -1,\ 7)$ を通るから，その方程式は

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{11}=\frac{z-7}{10}$$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$7x+4y-6z=0$　(2)　$2x-2y+z-23=0$，$2x-2y+z+13=0$

解説

平面 α の法線ベクトル $\vec{n}$ を $\vec{n}=(2,\ -2,\ 1)$ とする。

(1)　平面 β の法線ベクトルを $\vec{m}=(a,\ b,\ c)$ $(\vec{m}\neq\vec{0})$ とする。

$\vec{m}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから　$\vec{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

よって　$2a+b+3c=0$ ……①

$\vec{m}\perp\vec{n}$ であるから　$\vec{m}\cdot\vec{n}=0$

ゆえに　$2a-2b+c=0$ ……②

①，② から　$a=-\dfrac{7}{6}c$，$b=-\dfrac{2}{3}c$　よって　$\vec{m}=-\dfrac{c}{6}(7,\ 4,\ -6)$

平面 β は原点を通るから，その方程式は　$7x+4y-6z=0$

(2)　$\vec{n}$ は平面 γ の法線ベクトルでもあるから，γ の方程式を

$2x-2y+z+d=0$ ……③

とする。

点 A から平面 γ に下ろした垂線の足を $\mathrm{H}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\parallel\vec{n}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\vec{n}$ (k は実数) とおける。

ゆえに　$(x_1-2,\ y_1-1,\ z_1-3)=k(2,\ -2,\ 1)$ ……④

$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=6$ より，$|k\vec{n}|=6$ であるから　$|k|\cdot\sqrt{9}=6$

よって　$k=\pm2$

$k=2$ のとき，④ から　$x_1=6$，$y_1=-3$，$z_1=5$

③ から　$23+d=0$　ゆえに　$d=-23$

$k=-2$ のとき，④ から　$x_1=-2$，$y_1=5$，$z_1=1$

③ から　$-13+d=0$　よって　$d=13$

したがって，平面 γ の方程式は　$2x-2y+z-23=0$，$2x-2y+z+13=0$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$\theta=60^\circ$　(2)　$x+y+z-1=0$

解説

2 平面 α，β の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{m}=(1,\ -2,\ 1)$，$\vec{n}=(1,\ 1,\ -2)$ とする。

(1)　$\vec{m}$，$\vec{n}$ のなす角を θ_1 $(0^\circ\leqq\theta_1\leqq180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta_1=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1\cdot1+(-2)\cdot1+1\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta_1\leqq180^\circ$ であるから　$\theta_1=120^\circ$

よって，2 平面 α，β のなす角 θ は　$\theta=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

(2)　平面 γ の法線ベクトルを $\vec{l}=(a,\ b,\ c)$ $(\vec{l}\neq\vec{0})$ とする。

$\vec{l}\perp\vec{m}$ であるから　$\vec{l}\cdot\vec{m}=0$　ゆえに　$a-2b+c=0$ ……①

$\vec{l}\perp\vec{n}$ であるから　$\vec{l}\cdot\vec{n}=0$　よって　$a+b-2c=0$ ……②

①，② から　$b=a$，$c=a$

ゆえに　$\vec{l}=a(1,\ 1,\ 1)$

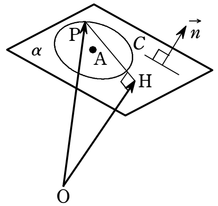
平面 γ は点 A を通るから，その方程式は　$(x-3)+(y+4)+(z-2)=0$

すなわち　$x+y+z-1=0$

$\boxed{10}$

解答　$39-4\sqrt{26}$

解説



平面 $x+2y+2z=9$ を α，点 O から平面 α に下ろした垂線の足を H とする。

また，平面 α の法線ベクトル $\vec{n}$ を $\vec{n}=(1,\ 2,\ 2)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\alpha$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\parallel\vec{n}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{n}$ (k は実数)

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(k,\ 2k,\ 2k)$

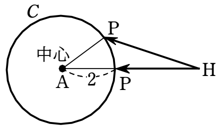
点 H は平面 α 上にあるから　$k+2\cdot2k+2\cdot2k=9$

ゆえに　$k=1$

よって　$\mathrm{H}(1,\ 2,\ 2)$

直角三角形 OHP において

$\mathrm{OP}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{HP}^2=9+\mathrm{HP}^2$



P が円 C 上を動くから　$\mathrm{HP}\geqq\mathrm{HA}-2$

ここで

$\mathrm{HA}=\sqrt{(5-1)^2+(-1-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{26}$

ゆえに，OP^2 の最小値は

$9+(\sqrt{26}-2)^2=39-4\sqrt{26}$

$\boxed{11}$

解答　(1)　$\left(\dfrac{a-2b-2c}{3},\ \dfrac{-2a+b-2c}{3},\ \dfrac{-2a-2b+c}{3}\right)$

(2)　$x^2+y^2+6x+6y+17=0$，$z=0$

解説

(1)　$\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$ とし，点 A と α に関して対称な点を $\mathrm{B}(x,\ y,\ z)$ とする。

線分 AB の中点が α 上にあるから　$\dfrac{a+x}{2}+\dfrac{b+y}{2}+\dfrac{c+z}{2}=0$ ……①

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\alpha$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，α の法線ベクトルに平行である。

よって　$(x-a,\ y-b,\ z-c)=k(1,\ 1,\ 1)$　ただし，k は実数。

すなわち　$x=k+a$，$y=k+b$，$z=k+c$ ……②

② を ① に代入すると　$\dfrac{3}{2}k+a+b+c=0$

ゆえに　$k=-\dfrac{2}{3}(a+b+c)$

よって，② から　$x=\dfrac{a-2b-2c}{3}$，$y=\dfrac{-2a+b-2c}{3}$，$c=\dfrac{-2a-2b+c}{3}$

ゆえに，求める点の座標は

$$\left(\frac{a-2b-2c}{3},\ \frac{-2a+b-2c}{3},\ \frac{-2a-2b+c}{3}\right)$$

(2)　与えられた円を表す方程式は

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=1$，$2x+2y-z=0$

$\mathrm{Q}(s,\ t,\ u)$ とすると　$(s-1)^2+(t-1)^2+(u-4)^2=1$，$2s+2t-u=0$ ……③

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，(1) から

$s=\dfrac{x-2y-2z}{3}$，$t=\dfrac{-2x+y-2z}{3}$，$u=\dfrac{-2x-2y+z}{3}$

③ に代入すると

$\left(\dfrac{x-2y-2z}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{-2x+y-2z}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{-2x-2y+z}{3}-4\right)^2=1$ ……④，

$2\cdot\dfrac{x-2y-2z}{3}+2\cdot\dfrac{-2x+y-2z}{3}-\dfrac{-2x-2y+z}{3}=0$ ……⑤

⑤ から　$-3z=0$　よって　$z=0$

これを ④ に代入して整理すると　$x^2+y^2+6x+6y+17=0$

ゆえに，求める図形の方程式は　$x^2+y^2+6x+6y+17=0$，$z=0$

$\boxed{12}$

解答　$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

解説

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおくと，条件より

$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2$，$|\vec{d}|=3$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot2\cdot\cos60^\circ=1$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=3$，$\vec{d}\cdot\vec{b}=3\cdot1\cdot\cos90^\circ=0$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=x\vec{b}+y\vec{c}+z\vec{d}$ とおくと

$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2=x^2+4y^2+9z^2+2xy+6yz$

$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=x^2+4y^2+9z^2+2xy+6yz-2x-2y+1$

$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2=x^2+4y^2+9z^2+2xy+6yz-2x-8y-6z+4$

$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=x^2+4y^2+9z^2+2xy+6yz-6y-18z+9$

また，条件より AE＝BE＝CE＝DE なので

$-2x-2y+1=0$，$-2x-8y-6z+4=0$，$-6y-18z+9=0$

これらより　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=0$，$z=\dfrac{1}{2}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{d}$

したがって　$\mathrm{AE}=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}|\vec{b}|^2+\dfrac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{d}+\dfrac{1}{4}|\vec{d}|^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

別解　AB＝1，AD＝3，∠DAB＝90° から，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 3,\ 0)$ となるように座標軸をとれる。$\mathrm{C}(x,\ y,\ z)$ (ただし $z\geqq0$) とおく。

$\angle BAC=60^\circ$, $AB=1$, $AC=2$ から $\angle ABC=90^\circ$

よって $x=1$

Cから y 軸に垂線CHを下ろすと, $\angle CAD=60^\circ$,

$AC=2$ から $\angle CHA=90^\circ$ よって $y=1$

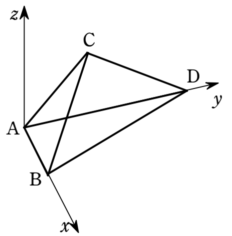
$AC=2$ から $x^2+y^2+z^2=4$

$x=y=1$, $z\geqq 0$ から $z=\sqrt{2}$

よって C$(1,\ 1,\ \sqrt{2})$

E$(p,\ q,\ r)$ とおく。

条件より AE=BE=CE=DE であるから



$$p^2+q^2+r^2=(p-1)^2+q^2+r^2=(p-1)^2+(q-1)^2+(r-\sqrt{2})^2=p^2+(q-3)^2+r^2$$

ゆえに $0=-2p+1=-2p-2q-2\sqrt{2}r+4=-6q+9$

これを解くと $p=\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{3}{2}$, $r=0$

よって E$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ 0\right)$

ゆえに $AE=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}+0}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

13

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+(y+z)\cdot\dfrac{y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}}{z+y}$

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}}{z+y}$ とすると, y, z は正の実数であるから, 点Dは線分BCを $z:y$ に内分する点である。

また, $y+z=1-x$ であるから

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+(y+z)\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OD}$$

$x>0$, $1-x=y+z>0$ であるから, 点Pは線分ADを $(1-x):x$ に内分する。

以上から, 直線APと直線BCは交わり, その交点をDとすれば, DはBCを $z:y$ に内分し, PはADを $(1-x):x$ に内分する。

(2) △ABCの面積を S とすると $AD:PD=1:x$ であるから

$S:S_2=\triangle ABC:\triangle PBC=1:x$

よって $S_2=xS$ ……①

$BD:BC=z:(y+z)$ であるから, △ABDの面積は

$\dfrac{z}{y+z}S$ すなわち $\dfrac{z}{1-x}S$

$AP:AD=(1-x):1$ であるから

$S_1=(1-x)\triangle ABD=(1-x)\cdot\dfrac{z}{1-x}S=zS$ ……②

①, ②から $\dfrac{S_1}{z}=\dfrac{S_2}{x}$

14

解答 (1) $S=\dfrac{1}{2lmn}$ (2) $l=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, $m=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{8}{3}$

解説

(1) 四面体OABCの体積について, $\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{OP}|S=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}ab\times c$ が成り立つ。

点Pは球面 Q 上にあるから $|\overrightarrow{OP}|=1$ よって $S=\dfrac{abc}{2}$ ……①

また, $\overrightarrow{OP}=(l,\ m,\ n)$, $\overrightarrow{AP}=(l-a,\ m,\ n)$ であるから

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=l(l-a)+m^2+n^2=1-la$

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AP}$ より, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ であるから $1-la=0$ ゆえに $a=\dfrac{1}{l}$

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{CP}$ から, 同様にして $b=\dfrac{1}{m}$, $c=\dfrac{1}{n}$

よって, ①から $S=\dfrac{1}{2lmn}$

別解 (①を導くまでは同じ。)

点P$(l,\ m,\ n)$ を通り, $\overrightarrow{OP}=(l,\ m,\ n)$ に垂直な平面の方程式は

$l(x-l)+m(y-m)+n(z-n)=0$ すなわち $lx+my+nz=l^2+m^2+n^2$

よって $lx+my+nz=1$

$y=z=0$ とすると $x=\dfrac{1}{l}$ ゆえに $a=\dfrac{1}{l}$

同様にして $b=\dfrac{1}{m}$, $c=\dfrac{1}{n}$ よって $S=\dfrac{1}{2lmn}$

(2) $n=\dfrac{1}{2}$ のとき $S=\dfrac{1}{lm}$

$l>0$, $m>0$ であるから, lm が最大のとき, すなわち l^2m^2 が最大のとき S は最小となる。

$l^2+m^2+n^2=1$ のとき $l^2=\dfrac{3}{4}-m^2$ ……②

ゆえに $l^2m^2=\left(\dfrac{3}{4}-m^2\right)m^2=-m^4+\dfrac{3}{4}m^2=-\left(m^2-\dfrac{3}{8}\right)^2+\dfrac{9}{64}$

よって, $m^2=\dfrac{3}{8}$ のとき l^2m^2 は最大値 $\dfrac{9}{64}$ をとる。

このとき, ②から $l^2=\dfrac{3}{8}$

$l>0$, $m>0$ であるから $l=m=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

したがって, S は $l=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, $m=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{64}{9}}=\dfrac{8}{3}$ をとる。

別解 $n=\dfrac{1}{2}$ のとき $S=\dfrac{1}{lm}$

$l>0$, $m>0$ であるから, lm が最大のとき S は最小となる。

(相加平均)≧(相乗平均) により $\dfrac{l^2+m^2}{2}\geqq\sqrt{l^2m^2}=lm$

$l^2+m^2=\dfrac{3}{4}$ であるから $lm\leqq\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}$

等号は $l^2=m^2$ すなわち $l=m=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき成り立つ。

よって, $l=m=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき S は最小値 $\dfrac{8}{3}$ をとる。

1

解答 (1) (ア) $\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$

(2) (イ) $1:(-1):(-2)$ (ウ) $-\dfrac{1}{\sqrt{6}}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AE})$

(3) (エ) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ (オ) $-\dfrac{1}{2}$ (カ) $\dfrac{\sqrt{11}}{8}$

解説

(1) $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$

$=^{ア}\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$

(2) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AE}|=1$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

よって $\vec{p}\cdot\overrightarrow{DC}=(a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}+c\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AB}$

$=a|\overrightarrow{AB}|^2+b\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+c\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=a+\dfrac{c}{2}$

$\vec{p}\cdot\overrightarrow{DE}=(a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}+c\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$

$=a\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+b\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+c|\overrightarrow{AE}|^2-a\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-b|\overrightarrow{AD}|^2-c\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$

$=\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2}$

$\vec{p}$ が△CDEを含む平面と垂直であるから $\vec{p}\cdot\overrightarrow{DC}=0$, $\vec{p}\cdot\overrightarrow{DE}=0$

よって $a+\dfrac{c}{2}=0$, $\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2}=0$ ゆえに $b=-a$, $c=-2a$

よって $a:b:c=^{イ}1:(-1):(-2)$

ゆえに, $\vec{p}=a(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AE})$ であるから

$|\vec{p}|^2=a^2(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+4|\overrightarrow{AE}|^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+4\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE})$

$=6a^2$

$\vec{p}\cdot\overrightarrow{AD}=a(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AD}$

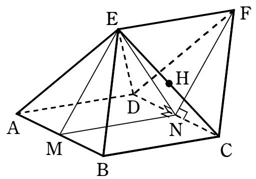
$=a(-|\overrightarrow{AD}|^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE})=-2a$

$|\vec{p}|=1$, $\vec{p}\cdot\overrightarrow{AD}>0$ より $6a^2=1$, $a<0$

ゆえに, $a=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ であるから $\vec{p}=^{ウ}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AE})$

(3) 線分AB, CDの中点をそれぞれM, Nとする。

四角形ABCDは正方形, △CDE, △CDFは正三角形であるから



$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EN}\perp\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FN}\perp\overrightarrow{CD}$

よって, $\overrightarrow{CD}$ は△EMN, △EFNに垂直であるから, 4点E, F, M, Nは同一平面上にある。

さらに, $|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{EF}|=1$, $|\overrightarrow{EM}|=|\overrightarrow{FN}|$ であるから, 四角形EFNMは平行四辺形である。

ゆえに $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{MN}=^{エ}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

また $\overrightarrow{HA}=-\overrightarrow{AH}=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE})=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$

$\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AH}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}})$

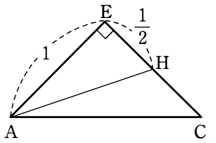
よって　$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\dfrac{1}{4}\{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})\}\cdot\{\overrightarrow{\mathrm{AB}}-(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})\}$

$=\dfrac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2)$

$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$ は正三角形ADEの高さの2倍であるから　$2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}}=\dfrac{1}{4}\{1^2-(\sqrt{3})^2\}={}^{オ}-\dfrac{1}{2}$

さらに，$\mathrm{AC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{EA}=\mathrm{EC}=1$ であるから，$\triangle\mathrm{ACE}$ は直角二等辺三角形である。



よって　$|\overrightarrow{\mathrm{HA}}|=\sqrt{1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{HF}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに，$\triangle\mathrm{AHF}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{HA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{HF}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HF}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}={}^{カ}\frac{\sqrt{11}}{8}$$

2

解答　略

解説

p，q，r，s は0と異なるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より

$$\frac{1}{p}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{r}\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\frac{1}{s}\overrightarrow{\mathrm{OS}}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{s}{p}\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{s}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\dfrac{s}{r}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$　……①

A，B，Cは一直線上にないから，条件よりP，Q，Rも一直線上にない。

よって，4点P，Q，R，Sが同じ平面上にあれば，①において $\dfrac{s}{p}+\left(-\dfrac{s}{q}\right)+\dfrac{s}{r}=1$ が成り立つ。

すなわち　$\dfrac{s}{p}+\dfrac{s}{r}=\dfrac{s}{q}+1$　　この両辺を s で割って　$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{s}$

3

解答　(1)　$s=\dfrac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$，$t=\dfrac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$，$u=\dfrac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

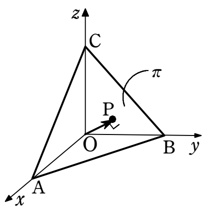
(2)　$r=\dfrac{4c^2}{a^2+b^2+4c^2}$ のとき最小値 $\dfrac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}$　　(3)　$\sqrt{S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2}$

解説

(1)　点Pは，平面 π 上にあるから　$s+t+u=1$　……①

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は平面 π と垂直であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ であるから



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=-s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$=-sa^2+tb^2$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=-s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+u|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

$=-sa^2+uc^2$

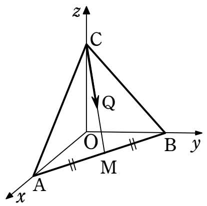
よって　$-sa^2+tb^2=0$　……②，　$-sa^2+uc^2=0$　……③

ゆえに，①，②，③から

$$s=\frac{b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\quad t=\frac{c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\quad u=\frac{a^2b^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{r}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$

$=\dfrac{r}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{r}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-r)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$



よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=\dfrac{r^2}{4}a^2+\dfrac{r^2}{4}b^2+(1-r)^2c^2$

$=\dfrac{a^2+b^2+4c^2}{4}r^2-2c^2r+c^2$

ゆえに，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ は r の2次関数で表されるから，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ が最小値をとる r の値は

$$r=c^2\div\frac{a^2+b^2+4c^2}{4}=\frac{4c^2}{a^2+b^2+4c^2}$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ の最小値は

$$\frac{a^2+b^2+4c^2}{4}\times\left(\frac{4c^2}{a^2+b^2+4c^2}\right)^2-2c^2\times\frac{4c^2}{a^2+b^2+4c^2}+c^2=\frac{(a^2+b^2)c^2}{a^2+b^2+4c^2}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ が最小となるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ も最小となる。

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|>0$，$c>0$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ は

$r=\dfrac{4c^2}{a^2+b^2+4c^2}$ のとき，最小値 $\dfrac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+4c^2}}$ をとる。

(3)　$S_1=\dfrac{1}{2}ab$，$S_2=\dfrac{1}{2}bc$，$S_3=\dfrac{1}{2}ca$ であるから

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-(a^2)^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(2S_1)^2+(2S_2)^2+(2S_3)^2}$

$=\sqrt{S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2}$

4

解答　(1)　$a_3=\cos\alpha$，$\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}=\sin\alpha$，$b_3=\cos\beta$，$\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}=\sin\beta$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\geqq\cos(\alpha+\beta)$　　(3)　$\theta\leqq\alpha+\beta$

解説

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(0,\ 0,\ 1)$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=a_1\cdot0+a_2\cdot0+a_3\cdot1=a_3$

一方，点A，Cは，原点Oを中心とする半径1の球面上にあるから

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{AOC}=\cos\alpha$

ゆえに　$a_3=\cos\alpha$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$ であるから

$a_1{}^2+a_2{}^2=1^2-a_3{}^2=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

$0<\alpha\leqq\pi$ より，$\sin\alpha\geqq0$ であるから　$\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}=\sin\alpha$

同様に　$b_3=\cos\beta$

また，$0<\beta\leqq\pi$ より，$\sin\beta\geqq0$ であるから　$\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}=\sin\beta$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\cos(\alpha+\beta)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3-(a_3b_3-\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2})$

$=a_1b_1+a_2b_2+\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)}$

$=a_1b_1+a_2b_2+\sqrt{a_1{}^2b_1{}^2+a_1{}^2b_2{}^2+a_2{}^2b_1{}^2+a_2{}^2b_2{}^2}$

$=a_1b_1+a_2b_2+\sqrt{(a_1b_1+a_2b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$

$\geqq a_1b_1+a_2b_2+\sqrt{(a_1b_1+a_2b_2)^2}$

$=a_1b_1+a_2b_2+|a_1b_1+a_2b_2|\geqq0$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\geqq\cos(\alpha+\beta)$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=\cos\theta$ であるから，(2)より

$\cos\theta\geqq\cos(\alpha+\beta)$　……①

また，$0<\alpha\leqq\pi$，$0<\beta\leqq\pi$ であるから　$0<\alpha+\beta\leqq2\pi$

[1]　$0<\alpha+\beta\leqq\pi$ のとき

関数 $y=\cos x$ は，$0<x\leqq\pi$ において単調に減少するから，①より　$\theta\leqq\alpha+\beta$

[2]　$\pi<\alpha+\beta\leqq2\pi$ のとき

$0<\theta\leqq\pi$ であるから　$\theta\leqq\alpha+\beta$

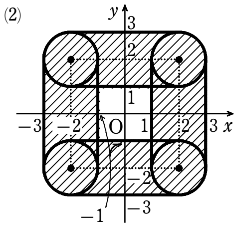
したがって，[1]，[2]のいずれの場合も　$\theta\leqq\alpha+\beta$

5

解答　(1)　$x^2+y^2=4$，$z=0$

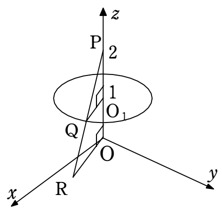
(2)　[図]　境界線を含む，面積は $\pi+28$

(2)



解説

(1)　点 $(0,\ 0,\ 1)$ を $\mathrm{O_1}$ とし，点Qの座標を $(X,\ Y,\ 1)$ とする。



点Qは平面 $z=1$ 上で中心 $\mathrm{O_1}$，半径1の円周上を動くから　$X^2+Y^2=1$　……①

また，$\mathrm{QO_1}/\!\!/\mathrm{RO}$ であるから

$\mathrm{PQ}:\mathrm{PR}=\mathrm{PO_1}:\mathrm{PO}=1:2$

よって，点Qは線分PRの中点である。

点Rの座標を $(x,\ y,\ 0)$ とすると　$\dfrac{x}{2}=X$，$\dfrac{y}{2}=Y$

①に代入すると　$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=1$　　よって　$x^2+y^2=4$

したがって，求める軌跡の方程式は　$x^2+y^2=4$，$z=0$

(2) 点Pから xy 平面に垂線 PH を下ろし，平面 $z=1$ との交点をSとする。

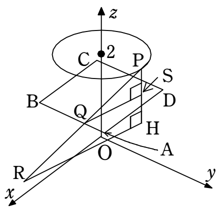
点Pの座標を $(X,\ Y,\ 2)$ とすると，条件から

$X^2+Y^2=1$ ……②

また，QS∥RH であるから

PQ：PR＝PS：PH＝1：2

よって，点Qは線分 PR の中点である。



点Qが線分 AB 上にあるとして，点Qを固定して考える。

点Qの座標を $(1,\ q,\ 1)$ $(-1\leqq q\leqq 1)$，点Rの座標を $(x,\ y,\ 0)$ とすると

$\dfrac{X+x}{2}=1,\ \dfrac{Y+y}{2}=q$ 　よって　$X=2-x,\ Y=2q-y$

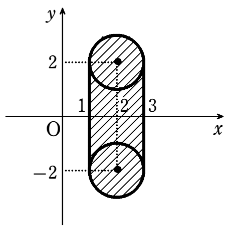
②に代入すると　$(2-x)^2+(2q-y)^2=1$

したがって　$(x-2)^2+(y-2q)^2=1$ $(-1\leqq q\leqq 1)$

よって，xy 平面における点Rの軌跡は，点 $(2,\ 2q,\ 0)$ を中心とする半径1の円である。

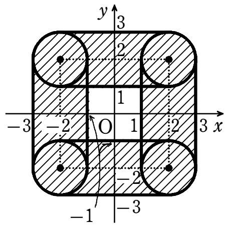
ここで，点Q $(1,\ q,\ 1)$ を $-1\leqq q\leqq 1$ の範囲で動かすと，点Rの動く領域は，右の図の斜線部分になる。

ただし，境界線を含む。



点Qが線分 BC，CD，DA 上にある場合も同様であるから，求める領域は右の図の斜線部分になる。

ただし，境界線を含む。

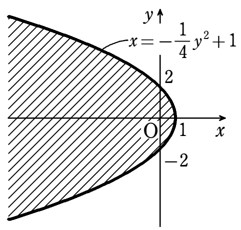


この領域の第1象限部分の面積は　$7+\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに，求める面積は　$\left(7+\dfrac{\pi}{4}\right)\times 4=\pi+28$

6

解答 ［図］



解説

A $(0,\ 0,\ 1)$，R $(x,\ y,\ 0)$ とする。

Qは直線 PR 上にあるから　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ （t は実数）

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1,\ 0,\ 2)+t(x-1,\ y,\ -2)$

$=((x-1)t+1,\ yt,\ -2t+2)$

点Qが $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき　$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=1$

ゆえに，$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2=1$ であるから　$\{(x-1)t+1\}^2+y^2t^2+(-2t+1)^2=1$

よって　$\{(x-1)^2+y^2+4\}t^2+2(x-3)t+1=0$ ……①

$(x-1)^2+y^2+4>0$ であるから，①は t の2次方程式である。

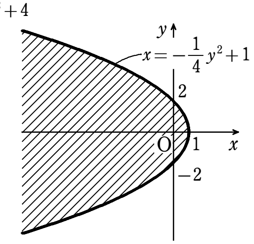
t は実数であるから，①の判別式を D とすると　$D\geqq 0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=(x-3)^2-\{(x-1)^2+y^2+4\}=-4x-y^2+4$

$D\geqq 0$ であるから　$-4x-y^2+4\geqq 0$

ゆえに　$x\leqq -\dfrac{1}{4}y^2+1$

よって，平面 $z=0$ 上で点Rの動く範囲は，不等式 $x\leqq -\dfrac{1}{4}y^2+1$ で表される領域であり，右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線を含む。

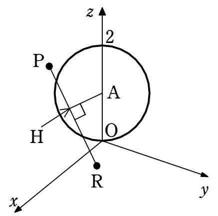


別解

A $(0,\ 0,\ 1)$，R $(x,\ y,\ 0)$ とする。

点Aから直線 PR に垂線を引き，その交点をHとする。

ただし，Aが直線 PR 上にあるとき，HはAとする。



Hは直線 PR 上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=k\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ （k は実数）

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(x-1,\ y,\ -2)$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=((x-1)k,\ yk,\ -2k)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PH}}=((x-1)k+1,\ yk,\ -2k+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{0}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$

ゆえに　$\{(x-1)k+1\}\times(x-1)+yk\times y+(-2k+1)\times(-2)=0$

よって　$\{(x-1)^2+y^2+4\}k+x-3=0$

$(x-1)^2+y^2+4>0$ であるから　$k=\dfrac{3-x}{(x-1)^2+y^2+4}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=(x-1)^2k^2+2(x-1)k+1+y^2k^2+4k^2-4k+1$

$=\{(x-1)^2+y^2+4\}k^2+(2x-6)k+2$

$=\dfrac{(3-x)^2}{(x-1)^2+y^2+4}+\dfrac{(3-x)(2x-6)}{(x-1)^2+y^2+4}+2$

$=\dfrac{-x^2+6x-9}{(x-1)^2+y^2+4}+2$

点Qが $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき　$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|\leqq 1$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2\leqq 1$ であるから　$\dfrac{-x^2+6x-9}{(x-1)^2+y^2+4}+2\leqq 1$

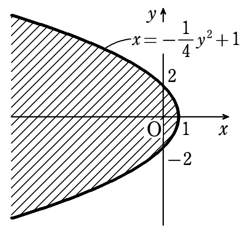
ゆえに　$\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2+y^2+4}\geqq 1$

$(x-1)^2+y^2+4>0$ であるから

$x^2-6x+9\geqq (x-1)^2+y^2+4$

よって　$x\leqq -\dfrac{1}{4}y^2+1$

ゆえに，平面 $z=0$ 上で点Rの動く範囲は，不等式 $x\leqq -\dfrac{1}{4}y^2+1$ で表される領域であり，右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線を含む。



7

解答 (1) (ア) $\dfrac{5}{12}$ (イ) $\dfrac{35}{4}$ (2) (ウ) 3 (エ) -5 (オ) -14

(カ) $\dfrac{28}{5}$ (キ) $\dfrac{7}{3}$ (3) (ク) $\dfrac{4}{15}$

解説

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1\cdot 2+3\cdot 1+2\cdot 1=7$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{21}}{6}$

ゆえに　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\dfrac{21}{36}={}^{\text{ア}}\dfrac{5}{12}$

したがって　$S^2=\left(\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta\right)^2=\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\sin^2\theta$

$=\dfrac{1}{4}\cdot 14\cdot 6\cdot\dfrac{5}{12}={}^{\text{イ}}\dfrac{35}{4}$

(2) $\vec{v}=(1,\ y,\ z)$ とおくと，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ であるから

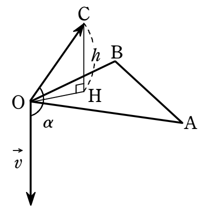
$1+3y+2z=0$，$2+y+z=0$

これを解くと　$y=3$，$z=-5$

よって，$\vec{v}=(1,\ {}^{\text{ウ}}3,\ {}^{\text{エ}}-5)$ となり

$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1\cdot(-1)+3\cdot(-1)+(-5)\cdot 2={}^{\text{オ}}-14$

Cから△OABを含む平面に下ろした垂線を CH とする。



$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}<0$ であるから，$\vec{v}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ のなす角を α とすると，

α は鈍角である。

よって，$\angle\mathrm{COH}=\alpha-90^\circ$ であり

$h=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\sin\angle\mathrm{COH}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\sin(\alpha-90^\circ)=-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\alpha$

$=-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\times\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\vec{v}|}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$=-\dfrac{-14}{\sqrt{1^2+3^2+(-5)^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{35}}$

ゆえに　$h^2=\dfrac{196}{35}={}^{\text{カ}}\dfrac{28}{5}$

したがって　$V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{35}{4}}\cdot\dfrac{14}{\sqrt{35}}={}^{\text{キ}}\dfrac{7}{3}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\alpha\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\dfrac{1}{4}\beta(4\overrightarrow{\mathrm{OB}})+5\gamma\left(\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=4\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\alpha'=3\alpha$，$\beta'=\dfrac{1}{4}\beta$，$\gamma'=5\gamma$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\beta'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\gamma'\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$，

$\alpha'+\beta'+\gamma'\leqq 1$，$\alpha'\geqq 0$，$\beta'\geqq 0$，$\gamma'\geqq 0$

ゆえに，点Pの全体が作る立体 E は，四面体 OA′B′C′ である。

したがって，E の体積は，V の $\dfrac{1}{3}\times 4\times\dfrac{1}{5}={}^{\text{ク}}\dfrac{4}{15}$ （倍）になる。

$\boxed{8}$

解答　(1)　$\left(\frac{11}{7},\ \frac{8}{7},\ -\frac{5}{7}\right)$, 4　　(2)　$a=0,\ 20$

解説

(1)　球の方程式を変形すると　$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$

よって，球の中心を K，半径を r とすると　$\mathrm{K}(-1,\ 2,\ -2)$，$r=5$

円 C の中心を $\mathrm{C}(x,\ y,\ z)$ とすると　$\mathrm{KC}\perp\alpha$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{KC}}$ は平面 α の法線ベクトル $\vec{n}=(6,\ -2,\ 3)$ に平行であるから

$\overrightarrow{\mathrm{KC}}=t\vec{n}$（$t$ は実数）

よって　$(x+1,\ y-2,\ z+2)=(6t,\ -2t,\ 3t)$

ゆえに　$x=6t-1$，$y=-2t+2$，$z=3t-2$

点 C は平面 α 上にあるから　$6(6t-1)-2(-2t+2)+3(3t-2)=5$

よって　$t=\frac{3}{7}$　　このとき　$\mathrm{C}\left(\frac{11}{7},\ \frac{8}{7},\ -\frac{5}{7}\right)$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{KC}}|=|t||\vec{n}|=3$ であるから，円 C の半径 R は

$R=\sqrt{r^2-|\overrightarrow{\mathrm{KC}}|^2}=4$

(2)　球面と平面が接する条件は，球面の中心と平面との距離が球面の半径に等しいこと

であるから　$\dfrac{|a\cdot 3+(9-a)\cdot 2-18\cdot 1+45|}{\sqrt{a^2+(9-a)^2+(-18)^2}}=\sqrt{5}$

ゆえに　$|a+45|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2a^2-18a+405}$

両辺を 2 乗すると　$a^2+90a+2025=10a^2-90a+2025$

よって　$9a(a-20)=0$　　ゆえに　$a=0,\ 20$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$3x+4y+12z=0$　　(2)　351π

解説

(1)　球面 B の中心 C は　$\mathrm{C}(3,\ 4,\ 12)$

平面 α の法線ベクトルの 1 つは　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3,\ 4,\ 12)$

また，平面 α は点 O を通るから，その方程式は　$3x+4y+12z=0$

(2)　中心が P，半径 1 の球面と球面 B が共有点をもつ

から　$13\leqq \mathrm{CP}\leqq 13+1$

よって　$13^2\leqq \mathrm{CP}^2\leqq 14^2$　……①

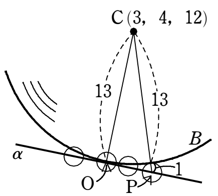
$\mathrm{CO}\perp\alpha$ であり，2 点 O，P は α 上にあるから

$\mathrm{CO}^2+\mathrm{OP}^2=\mathrm{CP}^2$

また，$\mathrm{CO}^2=13^2$ であるから，① より

$13^2\leqq 13^2+\mathrm{OP}^2\leqq 14^2$

ゆえに　$0\leqq \mathrm{OP}^2\leqq 27$



よって，平面 α 上で点 P は，中心が O，半径 $3\sqrt{3}$ の円の周および内部を動く。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから　$\mathrm{TO}\perp\alpha$

ゆえに，立体 E は，T を頂点とし，中心 O，半径 $3\sqrt{3}$ の円を底面とする円錐である。

よって，E の体積は　$\frac{1}{3}\cdot(3\sqrt{3})^2\pi\cdot 3\cdot 13=351\pi$

$\boxed{10}$

解答　証明略，$x^2+y^2+z^2-2x-4y-8z-4=0$

解説

球面 S_1 の中心 $(1,\ 2,\ 1)$ と平面 α_1 との距離は 1 で，半径 $\sqrt{10}$ より小さいから，C_1 は円であり，C_1 を含む球面の方程式は

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2-10+kz=0$（$k$ は定数）

整理して　$x^2+y^2+z^2-2x-4y+(k-2)z-4=0$　……①

球面 S_2 の中心 $(0,\ 0,\ 2)$ は平面 α_2 上にあるから，C_2 は円であり，C_2 を含む球面の方程式は　$x^2+y^2+(z-2)^2-16+h(x+2y+2z-4)=0$（$h$ は定数）

整理して　$x^2+y^2+z^2+hx+2hy+(2h-4)z-4h-12=0$　……②

$h=-2$，$2h=-4$，$2h-4=k-2$，$-4h-12=-4$ とすると　$h=-2$，$k=-6$

このとき，①，② は同一の球面を表し，C_1，C_2 はこの球面上にある。

よって，求める球面の方程式は

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-8z-4=0$

$\boxed{11}$

解答　(1)　$x^2+y^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y=0$　　(2)　$a=b=\frac{5}{6}$ かつ $\left(c\leqq\frac{1}{3}\right.$ または $\left.\frac{13}{3}\leqq c\right)$

解説

(1)　求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

この円が 3 点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 1)$，$(1,\ 2)$ を通るから

$n=0$，　$2l+m+n+5=0$，　$l+2m+n+5=0$

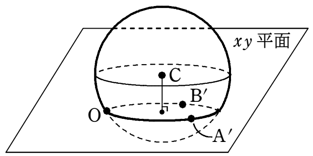
これを解くと　$l=-\frac{5}{3}$，$m=-\frac{5}{3}$，$n=0$

ゆえに，求める円の方程式は　$x^2+y^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y=0$

(2)　3 点 O，A′，B′ は xy 平面上にあるから，球面 S と xy 平面の共有点が作る図形は O，A′，B′ を通る円である。

この円を表す方程式は，(1) から

$x^2+y^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y=0$，$z=0$



すなわち　$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{18}$，$z=0$

よって，円の中心の座標は　$\left(\frac{5}{6},\ \frac{5}{6},\ 0\right)$

球の中心 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ から xy 平面に下ろした垂線は，この円の中心 $\left(\frac{5}{6},\ \frac{5}{6},\ 0\right)$ を通るから，点 C と円の中心の x 座標，y 座標はそれぞれ等しく　$a=\frac{5}{6}$，$b=\frac{5}{6}$

また，球面 S の半径は　$\mathrm{OC}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2+c^2}=\sqrt{c^2+\frac{25}{18}}$

よって，球面 S の方程式は　$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+(z-c)^2=c^2+\frac{25}{18}$

点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ が球面 S 上にあるとき

$\left(t+2-\frac{5}{6}\right)^2+\left(t+2-\frac{5}{6}\right)^2+(t-c)^2=c^2+\frac{25}{18}$

すなわち　$9t^2-2(3c-7)t+4=0$　……①

直線 ℓ が球面 S と共有点をもつための必要十分条件は，t の 2 次方程式 ① が実数解をもつことである。

① の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=\{-(3c-7)\}^2-9\cdot 4=9c^2-42c+13=(3c-1)(3c-13)\geqq 0$

よって　$c\leqq\frac{1}{3}$，$\frac{13}{3}\leqq c$

したがって，a，b，c の満たすべき条件は

$a=b=\frac{5}{6}$ かつ $\left(c\leqq\frac{1}{3}\right.$ または $\left.\frac{13}{3}\leqq c\right)$