中3数学総合S　春期第2講演習問題

1

与えられた2点A，Bを結ぶ線分ABについて，次の点の座標を求めよ。

(1)　A$(-2,\ 5)$，B$(4,\ 3)$　中点
(2)　A$(2,\ 3)$，B$(8,\ 0)$　3等分点
(3)　A$(1,\ 4)$，B$(5,\ -2)$　1：2に内分，外分する点
(4)　A$(4,\ 7)$，B$(2,\ 1)$　3：2に内分，外分する点

2

次の3点A，B，Cを頂点とする△ABCの重心の座標を求めよ。

(1)　A$(4,\ 7)$，B$(2,\ 1)$，C$(-3,\ -2)$
(2)　A$(-2,\ 1)$，B$(4,\ 3)$，C$(5,\ 2)$

3

3点A$(2,\ 8)$，B$(-3,\ -2)$，C$(7,\ 3)$について，線分AB，BC，CAを2：3に内分する点を，それぞれD，E，Fとする。次の点の座標を求めよ。

(1)　D，E，F
(2)　△ABCの重心
(3)　△DEFの重心

4

次の点の座標を求めよ。

(1)　2点A$(2,\ 1)$，B$(5,\ -2)$から等距離にあるx軸上の点
(2)　2点A$(1,\ 4)$，B$(3,\ 1)$から等距離にある直線$y=2x-1$上の点

5

次のような直線の方程式を求めよ。

(1)　点$(2,\ 7)$を通り，傾きが3の直線
(2)　点$(-2,\ 3)$を通り，x軸に平行な直線，垂直な直線
(3)　2点$(3,\ -5)$，$(8,\ 5)$を通る直線
(4)　2点$(-2,\ 5)$，$(4,\ -3)$を通る直線
(5)　2点$(6,\ 5)$，$(6,\ -2)$を通る直線
(6)　2点$(1,\ 5)$，$(-1,\ 5)$を通る直線
(7)　x切片が4，y切片が-3である直線

6

次のような直線の方程式を求めよ。

(1)　点$(-1,\ 3)$を通り，直線$2x+3y=0$に平行な直線，垂直な直線
(2)　点$(3,\ 2)$を通り，2点$(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$を結ぶ線分に平行な直線，垂直な直線

7

次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　$(0,\ 0)$，$4x+3y-12=0$
(2)　$(2,\ 1)$，$x+2y-3=0$
(3)　$(2,\ -3)$，$y=-3x+4$
(4)　$(-3,\ 2)$，$2x-3y+6=0$
(5)　$(4,\ 7)$，$y=-1$
(6)　$(-2,\ 5)$，$x=3$

8

2点$(-4,\ -5)$，$(8,\ 1)$を通る直線をℓとする。

(1)　直線ℓの方程式を求めよ。
(2)　点$(2,\ -3)$を通り，ℓに垂直な直線の方程式を求めよ。

9

2直線$(a+1)x-2y-2=0$，$x-ay+1=0$が次の条件を満たすとき，定数aの値をそれぞれ求めよ。

(1)　平行である。
(2)　垂直である。

10

平面上の2点をA$(2,\ 2)$，B$(4,\ 3)$とする。点Pが放物線$y=-x^2+2x-3$上を動くとき，△PABの面積の最小値を求めよ。

解説

$\boxed{1}$

(解説)

(1) $\left(\dfrac{-2+4}{2},\ \dfrac{5+3}{2}\right)$ すなわち $(1,\ 4)$

(2) 線分 AB を 1：2，2：1 にそれぞれ内分する点が求める点である。

$$\left(\frac{2\cdot2+1\cdot8}{1+2},\ \frac{2\cdot3+1\cdot0}{1+2}\right)\quad\text{すなわち}\quad(4,\ 2)$$

$$\left(\frac{1\cdot2+2\cdot8}{2+1},\ \frac{1\cdot3+2\cdot0}{2+1}\right)\quad\text{すなわち}\quad(6,\ 1)$$

よって，点 A に近い方から $(4,\ 2)$，$(6,\ 1)$

(3) 内分する点の座標は

$$\left(\frac{2\cdot1+1\cdot5}{1+2},\ \frac{2\cdot4+1\cdot(-2)}{1+2}\right)\quad\text{すなわち}\quad\left(\frac{7}{3},\ 2\right)$$

外分する点の座標は

$$\left(\frac{-2\cdot1+1\cdot5}{1-2},\ \frac{-2\cdot4+1\cdot(-2)}{1-2}\right)\quad\text{すなわち}\quad(-3,\ 10)$$

(4) 内分する点の座標は

$$\left(\frac{2\cdot4+3\cdot2}{3+2},\ \frac{2\cdot7+3\cdot1}{3+2}\right)\quad\text{すなわち}\quad\left(\frac{14}{5},\ \frac{17}{5}\right)$$

外分する点の座標は

$$\left(\frac{-2\cdot4+3\cdot2}{3-2},\ \frac{-2\cdot7+3\cdot1}{3-2}\right)\quad\text{すなわち}\quad(-2,\ -11)$$

$\boxed{2}$

(解説)

(1) $\left(\dfrac{4+2+(-3)}{3},\ \dfrac{7+1+(-2)}{3}\right)$ すなわち $(1,\ 2)$

(2) $\left(\dfrac{-2+4+5}{3},\ \dfrac{1+3+2}{3}\right)$ すなわち $\left(\dfrac{7}{3},\ 2\right)$

$\boxed{3}$

(解説)

(1) 点 D の座標は

$$\left(\frac{3\cdot2+2\cdot(-3)}{2+3},\ \frac{3\cdot8+2\cdot(-2)}{2+3}\right)\quad\text{すなわち}\quad(0,\ 4)$$

点 E の座標は

$$\left(\frac{3\cdot(-3)+2\cdot7}{2+3},\ \frac{3\cdot(-2)+2\cdot3}{2+3}\right)\quad\text{すなわち}\quad(1,\ 0)$$

点 F の座標は

$$\left(\frac{3\cdot7+2\cdot2}{2+3},\ \frac{3\cdot3+2\cdot8}{2+3}\right)\quad\text{すなわち}\quad(5,\ 5)$$

(2) $\left(\dfrac{2+(-3)+7}{3},\ \dfrac{8+(-2)+3}{3}\right)$ すなわち $(2,\ 3)$

(3) $\left(\dfrac{0+1+5}{3},\ \dfrac{4+0+5}{3}\right)$ すなわち $(2,\ 3)$

参考 $\triangle$ABC と $\triangle$DEF の重心は一致する。

$\boxed{4}$

(解説)

(1) 求める点を $\mathrm{P}(x,\ 0)$ とする。

AP＝BP から　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

したがって　$(x-2)^2+(0-1)^2=(x-5)^2+\{0-(-2)\}^2$

整理して　$6x-24=0$　これと解くと　$x=4$

よって，求める点の座標は　$(4,\ 0)$

(2) 求める点を P とすると，P は直線 $y=2x-1$ 上にあるから，その座標は $(x,\ 2x-1)$ とおける。

AP＝BP から　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

したがって　$(x-1)^2+(2x-1-4)^2=(x-3)^2+(2x-1-1)^2$

$(x-1)^2+(2x-5)^2=(x-3)^2+2^2(x-1)^2$

整理して　$8x-13=0$

これを解くと　$x=\dfrac{13}{8}$　このとき　$2x-1=2\cdot\dfrac{13}{8}-1=\dfrac{9}{4}$

よって，求める点の座標は　$\left(\dfrac{13}{8},\ \dfrac{9}{4}\right)$

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　$y-7=3(x-2)$　すなわち　$y=3x+1$

(2)　x 軸に平行な直線：$y=3$　　　x 軸に垂直な直線：$x=-2$

(3)　$y-(-5)=\dfrac{5-(-5)}{8-3}(x-3)$　すなわち　$y=2x-11$

(4)　$y-5=\dfrac{-3-5}{4-(-2)}\{x-(-2)\}$　すなわち　$y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{7}{3}$

(5)　2 点の x 座標がともに 6 であるから，求める方程式は　$x=6$

(6)　2 点の y 座標がともに 5 であるから，求める方程式は　$y=5$

(7)　2 点 $(4,\ 0)$，$(0,\ -3)$ を通るから

$$y-0=\frac{-3-0}{0-4}(x-4)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{3}{4}x-3$$

別解　x 切片が a，y 切片が b $(a\fallingdotseq 0,\ b\fallingdotseq 0)$ である直線の方程式は　$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

これを利用すると，求める直線の方程式は

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1\quad \text{すなわち}\quad 3x-4y-12=0$$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　直線 $2x+3y=0$ の傾きは　$-\dfrac{2}{3}$

[1]　平行な直線の方程式は

$$y-3=-\frac{2}{3}\{x-(-1)\}\quad \text{すなわち}\quad 2x+3y-7=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると　$-\dfrac{2}{3}m=-1$　　よって　$m=\dfrac{3}{2}$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-3=\frac{3}{2}\{x-(-1)\}\quad \text{すなわち}\quad 3x-2y+9=0$$

参考　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に

平行な直線の方程式は　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

垂直な直線の方程式は　$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

と表される。このことを用いると，次のように求められる。

平行な直線の方程式は

$$2\{x-(-1)\}+3(y-3)=0\quad \text{すなわち}\quad 2x+3y-7=0$$

垂直な直線の方程式は

$$3\{x-(-1)\}-2(y-3)=0\quad \text{すなわち}\quad 3x-2y+9=0$$

(2)　2 点 $(-3,\ -2)$，$(5,\ 7)$ を結ぶ線分の傾きは　$\dfrac{7-(-2)}{5-(-3)}=\dfrac{9}{8}$

[1]　平行な直線の方程式は

$$y-2=\frac{9}{8}(x-3)\quad \text{すなわち}\quad 9x-8y-11=0$$

[2]　垂直な直線の傾きを m とすると　$\dfrac{9}{8}m=-1$　　よって　$m=-\dfrac{8}{9}$

したがって，求める垂直な直線の方程式は

$$y-2=-\frac{8}{9}(x-3)\quad \text{すなわち}\quad 8x+9y-42=0$$

$\boxed{7}$

(解説)

(1)　$\dfrac{|4\cdot 0+3\cdot 0-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{12}{5}$

(2)　$\dfrac{|2+2\cdot 1-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(3)　$y=-3x+4$ から　$3x+y-4=0$　　よって　$\dfrac{|3\cdot 2-3-4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

(4)　$\dfrac{|2\cdot(-3)-3\cdot 2+6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{13}}=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

(5)　$|-1-7|=8$

(6)　$|3-(-2)|=5$

8

(解説)

(1)　$y-(-5)=\dfrac{1-(-5)}{8-(-4)}\{x-(-4)\}$ から　　$y+5=\dfrac{1}{2}(x+4)$

すなわち　　$x-2y-6=0$

(2)　直線 ℓ に垂直な直線の傾きを m とすると　　$\dfrac{1}{2}m=-1$

よって　　$m=-2$

したがって，求める直線の方程式は　　$y-(-3)=-2(x-2)$

すなわち　　$2x+y-1=0$

9

(解説)

$a=0$ のとき，2 直線は $y=\dfrac{1}{2}x-1$，$x=-1$ となり，平行でも垂直でもないから不適である。

以下，$a\neq0$ の場合を考える。

$(a+1)x-2y-2=0$ から　　$y=\dfrac{a+1}{2}x-1$

$x-ay+1=0$ から　　$y=\dfrac{1}{a}x+\dfrac{1}{a}$

(1)　2 直線が平行であるから　　$\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{1}{a}$

分母を払って　　$a(a+1)=2$

よって　　$a^2+a-2=0$　　　ゆえに　　$(a+2)(a-1)=0$

したがって　　$a=-2,\ 1$　　　これは $a\neq0$ を満たす。

別解　2 直線が平行であるから　　$(a+1)\cdot(-a)-(-2)\cdot1=0$

よって　　$a^2+a-2=0$　　　ゆえに　　$(a+2)(a-1)=0$

したがって　　$a=-2,\ 1$

(2)　2 直線が垂直であるから　　$\dfrac{a+1}{2}\cdot\dfrac{1}{a}=-1$

分母を払って　　$a+1=-2a$

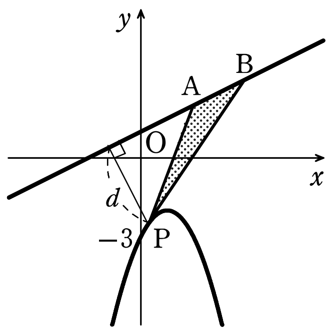
したがって　　$a=-\dfrac{1}{3}$　　　これは $a\neq0$ を満たす。

別解　2 直線が垂直であるから　　$(a+1)\cdot1+(-2)\cdot(-a)=0$

よって　　$3a+1=0$　　　したがって　　$a=-\dfrac{1}{3}$

10

(解説)



$\mathrm{P}(t,\ -t^2+2t-3)$ とおく。

直線 AB の方程式は

$y-2=\dfrac{3-2}{4-2}(x-2)$　すなわち　$x-2y+2=0$

また　　$\mathrm{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$

点 P と直線 AB の距離 d は

$$d=\frac{|t-2(-t^2+2t-3)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{|2t^2-3t+8|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{55}{8}\right|$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{55}{8\sqrt{5}}$$

よって，d は $t=\dfrac{3}{4}$ で最小値 $\dfrac{55}{8\sqrt{5}}$ をとる。

このとき，△PAB の面積 S は最小で　　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\dfrac{55}{8\sqrt{5}}=\dfrac{55}{16}$

参考　面積が最小になるときの P の座標は　　$\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{33}{16}\right)$