1

次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(2x^2-1)^6$　　$[x^6]$

(2)　$(2x^3-3x)^5$　　$[x^9]$

2

二項定理の等式を用いて，次の等式を導け。

(1)　${}_n\mathrm{C}_0+2{}_n\mathrm{C}_1+2^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^n{}_n\mathrm{C}_n=3^n$

(2)　${}_n\mathrm{C}_0-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3

二項定理を用いて，次のことを証明せよ。ただし，n は 2 以上の整数とする。

(1)　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>2$

(2)　$x>0$ のとき　$(1+x)^n\geqq 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

4

次の式の展開式における，[　] 内に指定された項の係数を求めよ。

(1)　$(x+y+z)^6$　　$[x^2yz^3]$

(2)　$(x+2y+3z)^6$　　$[x^3y^2z]$

(3)　$(2x+3y-z)^7$　　$[x^2y^2z^3]$

(4)　$(x+y-3z)^8$　　$[x^5z^3]$

5

(1)　x^2-2x-1 で割ると，商が $2x-3$，余りが $-2x$ である整式を求めよ。

(2)　x^2+x+1 で割ると，商が $x-3$，余りが $2x-1$ である整式を求めよ。

6

次の式を簡単にせよ。

(1)　$\dfrac{x-1+\dfrac{2}{x+2}}{x+1-\dfrac{2}{x+2}}$

(2)　$1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$

7

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$\dfrac{4}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-3}$

(2)　$\dfrac{x+1}{(x-1)(3x-1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{3x-1}$

(3)　$\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

8

$x+y=1$ を満たす x，y に対して，常に $ax^2+by^2+cx=1$ が成り立つとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

9

$\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}$ のとき，$x+y+z=0$ であることを証明せよ。

10

(1)　$x+y+z=-1$，$xy+yz+zx+xyz=0$ ならば，x，y，z のうち少なくとも 1 つは -1 であることを示せ。

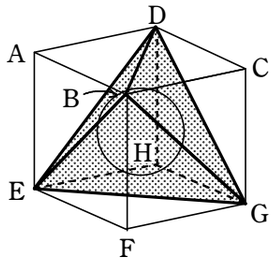
(2)　$(bc+ca+ab)(a+b+c)=abc$ ならば，a，b，c のうちどれか 2 つの和は 0 であることを示せ。

11

1 辺の長さが 5 の立方体 ABCD－EFGH を平面 BDE，平面 BEG，平面 BGD，平面 DEG で切ると，正四面体 BDEG ができる。このとき，次のものを求めよ。

(1)　正四面体 BDEG の体積 V

(2)　正四面体 BDEG に内接する球の半径 r



12

$3n+16$ と $4n+18$ の最大公約数が 5 となるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

13

(1)　等式 $2x+3y=21$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めよ。

(2)　等式 $x+3y+4z=18$ を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

14

次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \quad (x \leqq y \leqq z)$$

15

5 進法で表したとき，4 桁となるような数の個数を 10 進数で答えよ。

16

自然数 N を 5 進法と 7 進法で表すと，ともに 2 桁の数であり，各位の数の並びが逆になるという。N を 10 進法で表せ。

$\boxed{1}$

(解説)

(1)　$(2x^2-1)^6$ の展開式の一般項は　　${}_6\mathrm{C}_r(2x^2)^{6-r}(-1)^r={}_6\mathrm{C}_r\cdot 2^{6-r}(-1)^r x^{12-2r}$

x^6 の項は $r=3$ のときで，その係数は　　${}_6\mathrm{C}_3\cdot 2^3(-1)^3=20\cdot 8\cdot(-1)=-160$

(2)　$(2x^3-3x)^5$ の展開式の一般項は　　${}_5\mathrm{C}_r(2x^3)^{5-r}(-3x)^r={}_5\mathrm{C}_r\cdot 2^{5-r}(-3)^r x^{15-2r}$

x^9 の項は $r=3$ のときで，その係数は　　${}_5\mathrm{C}_3\cdot 2^2(-3)^3=10\cdot 4\cdot(-27)=-1080$

$\boxed{2}$

(解説)

二項定理により　　$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$　……①

(1)　① に $x=2$ を代入すると　　$(1+2)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\cdot 2+{}_n\mathrm{C}_2\cdot 2^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot 2^n$

よって　　${}_n\mathrm{C}_0+2{}_n\mathrm{C}_1+2^2{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+2^n{}_n\mathrm{C}_n=3^n$

(2)　① に $x=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\left(-\frac{1}{2}\right)+{}_n\mathrm{C}_2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

よって　　${}_n\mathrm{C}_0-\dfrac{{}_n\mathrm{C}_1}{2}+\dfrac{{}_n\mathrm{C}_2}{2^2}-\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{{}_n\mathrm{C}_n}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\boxed{3}$

(解説)

二項定理により　　$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$　……①

(1)　① で $a=1$，$b=\dfrac{1}{n}$ とすると

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{n}+{}_n\mathrm{C}_2\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\frac{1}{n^n}$$

${}_n\mathrm{C}_r>0$，$\dfrac{1}{n}>0$ であるから，$n\geqq 2$ のとき　　${}_n\mathrm{C}_2\dfrac{1}{n^2}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\dfrac{1}{n^n}>0$

よって　　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{n}=1+n\cdot\dfrac{1}{n}=2$

(2)　① で $a=1$，$b=x$ とすると

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+{}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n\quad\cdots\cdots②$$

[1]　$n\geqq 3$ のとき

${}_n\mathrm{C}_r>0$，$x>0$ であるから　　${}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n>0$

よって，② から　　$(1+x)^n>{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2$

したがって　　$(1+x)^n>1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

[2]　$n=2$ のとき

② から　　$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2$

よって　　$(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

[1]，[2] から，$n\geqq 2$ のとき　　$(1+x)^n\geqq 1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　x^2yz^3 の項の係数は　　$\dfrac{6!}{2!1!3!}=60$

(2)　x^3y^2z の項は　　$\dfrac{6!}{3!2!1!}x^3(2y)^2(3z)^1$

よって，その係数は　　$\dfrac{6!}{3!2!1!}\cdot 2^2\cdot 3^1=720$

(3)　$x^2y^2z^3$ の項は　　$\dfrac{7!}{2!2!3!}(2x)^2(3y)^2(-z)^3$

よって，その係数は　　$\dfrac{7!}{2!2!3!}\cdot 2^2\cdot 3^2(-1)^3=-7560$

(4)　x^5z^3 の項は　　$\dfrac{8!}{5!3!}x^5(-3z)^3$

よって，その係数は　　$\dfrac{8!}{5!3!}(-3)^3=-1512$

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　求める整式は　$(x^2-2x-1)(2x-3)-2x$　　よって　$2x^3-7x^2+2x+3$

(2)　求める整式は　　$(x^2+x+1)(x-3)+2x-1$　　よって　x^3-2x^2-4

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　分母・分子に $x+2$ を掛けると

$$与式=\frac{(x-1)(x+2)+2}{(x+1)(x+2)-2}=\frac{x^2+x}{x^2+3x}=\frac{x(x+1)}{x(x+3)}=\frac{x+1}{x+3}$$

別解　分母$=\dfrac{(x+1)(x+2)-2}{x+2}=\dfrac{x(x+3)}{x+2}$，分子$=\dfrac{(x-1)(x+2)+2}{x+2}=\dfrac{x(x+1)}{x+2}$

よって　　与式$=\dfrac{x(x+1)}{x+2}\div\dfrac{x(x+3)}{x+2}=\dfrac{x(x+1)}{x+2}\times\dfrac{x+2}{x(x+3)}=\dfrac{x+1}{x+3}$

(2)　与式$=1-\dfrac{1\times(1-x)}{\left(1-\dfrac{1}{1-x}\right)\times(1-x)}=1-\dfrac{1-x}{(1-x)-1}=1-\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x-(x-1)}{x}=\dfrac{1}{x}$

7

解説

(1)　与えられた等式が恒等式ならば，両辺に $(x-1)(x-3)$ を掛けて得られる等式

$$4=a(x-3)+b(x-1)$$

も x についての恒等式である。右辺を x について整理すると

$$4=(a+b)x-3a-b$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a+b=0,\ -3a-b=4$$

これを解いて　　$a=-2,\ b=2$

(2)　与えられた等式が恒等式ならば，両辺に $(x-1)(3x-1)$ を掛けて得られる等式

$$x+1=a(3x-1)+b(x-1)$$

も x についての恒等式である。右辺を x について整理すると

$$x+1=(3a+b)x-a-b$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$3a+b=1,\ -a-b=1$$

これを解いて　　$a=1,\ b=-2$

(3)　与えられた等式が恒等式ならば，両辺に $(x-1)(x^2+x+1)\ (=x^3-1)$ を掛けて得られる等式

$$3=a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)$$

も x についての恒等式である。右辺を x について整理すると

$$3=(a+b)x^2+(a-b+c)x+a-c$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a+b=0,\ a-b+c=0,\ a-c=3$$

これを解いて　　$a=1,\ b=-1,\ c=-2$

8

解説

$x+y=1$ から　　$y=1-x$

これを $ax^2+by^2+cx=1$ に代入して

$$ax^2+b(1-x)^2+cx=1$$

左辺を x について整理すると

$$(a+b)x^2+(-2b+c)x+b=1$$

これが x についての恒等式であるから

$$a+b=0,\ -2b+c=0,\ b=1$$

これを解いて　　$a=-1,\ b=1,\ c=2$

9

解説

$\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}=k$ とおくと

$$y+z=(b-c)k,\ z+x=(c-a)k,\ x+y=(a-b)k$$

これらの辺々を加えると

$$(y+z)+(z+x)+(x+y)=(b-c)k+(c-a)k+(a-b)k$$

整理すると　　$2(x+y+z)=0$

よって　　$x+y+z=0$

10

解説

(1)　$(x+1)(y+1)(z+1)=(xyz+xy+yz+zx)+(x+y+z)+1$

よって，$x+y+z=-1$，$xy+yz+zx+xyz=0$ が成り立つとき

$$(x+1)(y+1)(z+1)=0-1+1=0$$

したがって，

$$x+1=0 \text{ または } y+1=0 \text{ または } z+1=0$$

であるから，x，y，z のうち少なくとも 1 つは -1 である。

(2)　条件の式から

$$abc+ca^2+a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+c^2a+abc=abc$$

a について整理すると

$$(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)=0$$

よって　　$(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}=0$

ゆえに　　$(b+c)(a+b)(a+c)=0$

したがって，

$$b+c=0 \text{ または } a+b=0 \text{ または } a+c=0$$

であるから，a，b，c のうちどれか 2 つの和は 0 である。

11

解説

(1)　正四面体 BDEG は，立方体 ABCD－EFGH から合同な 4 つの四面体 ABDE，FBEG，CBGD，HDEG を除いたものである。

よって，求める体積 V は　　$V=5^3-\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot5^2\cdot5\right)\times4=\dfrac{125}{3}$

(2)　正四面体 BDEG に内接する球の中心を O とすると，正四面体は合同な 4 つの四面体 OBDE，OBEG，OBGD，ODEG に分割できる。

四面体 OBDE の体積を V_1 とすると

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BDE}\cdot r=\frac{1}{3}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot5\sqrt{2}\right)\right\}\cdot r=\frac{25\sqrt{3}}{6}r$$

$V=4V_1$ であるから　　$\dfrac{125}{3}=4\cdot\dfrac{25\sqrt{3}}{6}r$　　よって　　$r=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

12

解説

$4n+18=(3n+16)\cdot 1+n+2$

$3n+16=(n+2)\cdot 3+10$

よって，$3n+16$ と $4n+18$ の最大公約数は，$n+2$ と 10 の最大公約数に等しい。

$10=2\cdot 5$ であるから，$n+2$ と 10 の最大公約数が 5 になるとき，$n+2$ は奇数の 5 の倍数となる。

$1\leqq n\leqq 50$ より $3\leqq n+2\leqq 52$ であるから

$n+2=5,\ 15,\ 25,\ 35,\ 45$

したがって　$n=3,\ 13,\ 23,\ 33,\ 43$

13

解説

(1)　$2x+3y=21$ から　$2x=3(7-y)$　……①

$2x>0$ であるから　$3(7-y)>0$　よって　$y<7$

また，① において，2 と 3 は互いに素であるから，$7-y$ は 2 の倍数，すなわち偶数になる。

ゆえに，y は奇数となるから　$y=1,\ 3,\ 5$

① から　$y=1$ のとき $x=9$，$y=3$ のとき $x=6$，$y=5$ のとき $x=3$

したがって　$(x,\ y)=(3,\ 5),\ (6,\ 3),\ (9,\ 1)$

別解　$2x+3y=21$ から　$2x=3(7-y)$

2 と 3 は互いに素であるから

$x=3k,\ 7-y=2k$　(k は整数)　と表される。

よって　$x=3k,\ y=-2k+7$　……①

x は自然数であるから，k も自然数である。

また，$y\geqq 1$ であるから　$-2k+7\geqq 1$

ゆえに，$k\leqq 3$ であるから　$k=1,\ 2,\ 3$

① から　$k=1$ のとき　$x=3,\ y=5$　$k=2$ のとき　$x=6,\ y=3$

$k=3$ のとき　$x=9,\ y=1$

したがって　$(x,\ y)=(3,\ 5),\ (6,\ 3),\ (9,\ 1)$

(2)　$x+3y+4z=18$ から　$4z=18-x-3y$

$x\geqq 1,\ y\geqq 1$ から　$4z\leqq 18-1-3\cdot 1=14$

よって，$z\leqq \dfrac{7}{2}=3.5$ であるから　$z=1,\ 2,\ 3$

[1]　$z=1$ のとき　$x+3y=14$

これを満たす自然数 $(x,\ y)$ の組は　$(x,\ y)=(11,\ 1),\ (8,\ 2),\ (5,\ 3),\ (2,\ 4)$

[2]　$z=2$ のとき　$x+3y=10$

これを満たす自然数 $(x,\ y)$ の組は　$(x,\ y)=(7,\ 1),\ (4,\ 2),\ (1,\ 3)$

[3]　$z=3$ のとき　$x+3y=6$

これを満たす自然数 $(x,\ y)$ の組は　$(x,\ y)=(3,\ 1)$

以上から　$(x,\ y,\ z)=(11,\ 1,\ 1),\ (8,\ 2,\ 1),\ (5,\ 3,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1),\ (7,\ 1,\ 2),$

$(4,\ 2,\ 2),\ (1,\ 3,\ 2),\ (3,\ 1,\ 3)$

14

解説

$0<x\leqq y\leqq z$ であるから　$\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$　……①

よって　$1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$

すなわち　$1\leqq\dfrac{3}{x}$　ゆえに　$x\leqq 3$

x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

[1]　$x=1$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

これを満たす自然数 $y,\ z$ の組はない。

[2]　$x=2$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$　……②

ここで，① から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

よって　$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{2}{y}$　ゆえに　$y\leqq 4$

y は自然数で，$2=x\leqq y$ であるから　$y=2,\ 3,\ 4$

$y=2$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=0$　これを満たす自然数 z はない。

$y=3$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$　よって　$z=6$　(これは適する)

$y=4$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　よって　$z=4$　(これは適する)

[3]　$x=3$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$　……③

$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{2}{y}$ であるから　$\dfrac{2}{3}\leqq\dfrac{2}{y}$　ゆえに　$y\leqq 3$

y は自然数で，$3=x\leqq y$ であるから　$y=3$

このとき，③ から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$　よって　$z=3$　(これは適する)

以上から　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

15

解説

5 進法で表したとき，4 桁となる数は，$\bigcirc\square\square\square_{(5)}$ の ○ に 1，2，3，4 のどれかを入れ，3 個の □ のそれぞれに 0，1，2，3，4 のどれかを入れた数である。

このような数の個数は　$4\times 5^3=500$ (個)

16

(解説)

N が 5 進法で $ab_{(5)}$ と表されるとすると，7 進法では $ba_{(7)}$ となる。

5 進数 $ab_{(5)}$ において　　$1 \leqq a \leqq 4$，$0 \leqq b \leqq 4$

7 進数 $ba_{(7)}$ において　　$0 \leqq a \leqq 6$，$1 \leqq b \leqq 6$

よって　　$1 \leqq a \leqq 4$，$1 \leqq b \leqq 4$　……①

$ab_{(5)}$，$ba_{(7)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと

$$ab_{(5)} = a \cdot 5 + b = 5a + b$$

$$ba_{(7)} = b \cdot 7 + a = a + 7b$$

よって　　$N = 5a + b = a + 7b$　　ゆえに　　$2a = 3b$

これと ① を満たす整数 a，b は　　$a = 3$，$b = 2$

したがって　　$N = 5 \cdot 3 + 2 = 17$