1

解答　P$(-17,\ 1)$，Q$(-5,\ -12)$，R$(22,\ 11)$，重心$(0,\ 0)$

解説

点Pは辺ABを$2:3$に外分するから，その座標は

$$\left(\frac{-3\cdot(-5)+2\cdot 1}{2-3},\ \frac{-3\cdot(-1)+2\cdot(-2)}{2-3}\right)\quad \text{すなわち}\quad (-17,\ 1)$$

点Qは辺BCを$2:3$に外分するから，その座標は

$$\left(\frac{-3\cdot 1+2\cdot 4}{2-3},\ \frac{-3\cdot(-2)+2\cdot 3}{2-3}\right)\quad \text{すなわち}\quad (-5,\ -12)$$

点Rは辺CAを$2:3$に外分するから，その座標は

$$\left(\frac{-3\cdot 4+2\cdot(-5)}{2-3},\ \frac{-3\cdot 3+2\cdot(-1)}{2-3}\right)\quad \text{すなわち}\quad (22,\ 11)$$

よって，△PQRの重心の座標は

$$\left(\frac{-17+(-5)+22}{3},\ \frac{1+(-12)+11}{3}\right)\quad \text{すなわち}\quad (0,\ 0)$$

2

解答　A$(1,\ 8)$，B$(-1,\ -2)$，C$(3,\ 4)$

解説

A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$とすると，x座標について

$$\frac{x_2+x_3}{2}=1,\ \frac{x_3+x_1}{2}=2,\ \frac{x_1+x_2}{2}=0$$

よって　$x_2+x_3=2,\ x_3+x_1=4,\ x_1+x_2=0$　……①

辺々加えると　$2(x_1+x_2+x_3)=6$　ゆえに　$x_1+x_2+x_3=3$

これと①から　$x_1=1,\ x_2=-1,\ x_3=3$

また，y座標について　$\frac{y_2+y_3}{2}=1,\ \frac{y_3+y_1}{2}=6,\ \frac{y_1+y_2}{2}=3$

よって　$y_2+y_3=2,\ y_3+y_1=12,\ y_1+y_2=6$　……②

辺々加えると　$2(y_1+y_2+y_3)=20$　ゆえに　$y_1+y_2+y_3=10$

これと②から　$y_1=8,\ y_2=-2,\ y_3=4$

したがって　A$(1,\ 8)$，B$(-1,\ -2)$，C$(3,\ 4)$

3

解答　(1)　平行な直線の方程式は $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$，垂直な直線の方程式は $y=2x-4$

(2)　$y=2x-\frac{5}{2}$

解説

(1)　2点$(-3,\ 4)$，$(7,\ -1)$を通る直線をℓとする。

直線ℓの傾きは　$\frac{-1-4}{7-(-3)}=-\frac{1}{2}$

点$(1,\ -2)$を通り，直線ℓに平行な直線の方程式は

$$y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

直線ℓに垂直な直線の傾きをmとすると

$$-\frac{1}{2}m=-1\qquad \text{これを解いて}\qquad m=2$$

したがって，点$(1,\ -2)$を通り，直線ℓに垂直な直線の方程式は

$$y-(-2)=2(x-1)\quad \text{すなわち}\quad y=2x-4$$

別解　2点$(-3,\ 4)$，$(7,\ -1)$を通る直線の方程式は

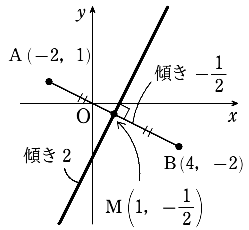
$$y-4=\frac{-1-4}{7-(-3)}\{x-(-3)\}\quad \text{すなわち}\quad x+2y-5=0$$

点$(1,\ -2)$を通り，直線$x+2y-5=0$に平行，垂直な直線の方程式は，それぞれ

$$1\cdot(x-1)+2\{y-(-2)\}=0,\ 2(x-1)-1\cdot\{y-(-2)\}=0$$

すなわち　$x+2y+3=0,\ 2x-y-4=0$

(2)　線分ABの中点Mの座標は　M$\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$



線分ABの傾きは　$\frac{-2-1}{4-(-2)}=-\frac{1}{2}$

線分ABの垂直二等分線の傾きをmとすると

$$-\frac{1}{2}m=-1\qquad \text{これを解いて}\qquad m=2$$

よって，求める直線の方程式は，点Mを通るから

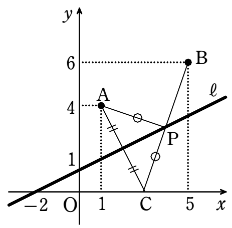
$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=2(x-1)\qquad \text{すなわち}\qquad y=2x-\frac{5}{2}$$

4

解答　(1)　C$(3,\ 0)$　(2)　P$(4,\ 3)$

解説

(1)　Cの座標を$(p,\ q)$とする。



対称の条件から

[1]　線分ACの中点がℓ上にある

[2]　AC⊥ℓ

よって　$\frac{q+4}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}+1,\ \frac{q-4}{p-1}\cdot\frac{1}{2}=-1$

ゆえに　$p-2q=3,\ 2p+q=6$

これを解いて　$p=3,\ q=0$

よって　C$(3,\ 0)$

(2)　AP＝CPから　AP＋PB＝CP＋PB≧BC

よって，AP＋PBは，Pが直線BCと直線ℓとの交点のとき最小となる。

直線BCの方程式は　$y-0=\frac{6-0}{5-3}(x-3)$

すなわち　$y=3x-9$　……①

①とℓ：$y=\frac{1}{2}x+1$から　$x=4,\ y=3$

よって，AP＋PBを最小にするものは　P$(4,\ 3)$

5

解答　(1)　$\left(26,\ \frac{20}{3}\right)$　(2)　$\left(\frac{63}{2},\ -8\right)$　(3)　$(18,\ 9)$　(4)　$(15,\ 36)$

解説

(1)　$\left(\frac{0+63+15}{3},\ \frac{0+0+20}{3}\right)$　すなわち　$\left(26,\ \frac{20}{3}\right)$

(2)　線分OAの垂直二等分線$x=\frac{63}{2}$と線分OBの垂直二等分線$y=-\frac{3}{4}x+\frac{125}{8}$との交点であるから　$\left(\frac{63}{2},\ -8\right)$

(3)　内心の座標を$(a,\ b)$とすると，この点は，3直線

$$\text{OA}:y=0,\quad \text{OB}:4x-3y=0,\quad \text{AB}:5x+12y-315=0$$

から等距離にある。

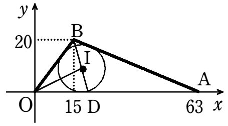
ゆえに　$|b|=\frac{|4a-3b|}{5}=\frac{|5a+12b-315|}{13}$

内心は△OABの内部にあるから　$b>0,\ 4a-3b>0,\ 5a+12b-315<0$

よって　$b=\frac{4a-3b}{5}=-\frac{5a+12b-315}{13}$

したがって　$(a,\ b)=(18,\ 9)$

別解　BO＝25，AB＝52



また，内心をI，BIの延長がOAと交わる点をDとすると　OD：DA＝BO：AB＝25：52

よって　D$\left(\frac{52\cdot 0+25\cdot 63}{25+52},\ \frac{52\cdot 0+25\cdot 0}{25+52}\right)$

すなわち　D$\left(\frac{225}{11},\ 0\right)$

また　DI：IB＝OD：OB＝$\frac{225}{11}$：25＝9：11

ゆえに　I$\left(\frac{11\cdot\frac{225}{11}+9\cdot 15}{9+11},\ \frac{11\cdot 0+9\cdot 20}{9+11}\right)$

すなわち　I$(18,\ 9)$

(4)　OからABに下ろした垂線の方程式は，ABの傾きが$-\frac{5}{12}$であるから　$y=\frac{12}{5}x$

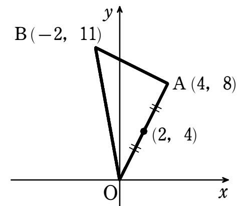
これと，直線$x=15$との交点が垂心であるから，その座標は　$(15,\ 36)$

6

解答　(1)　$y=-\frac{7}{4}x+\frac{15}{2}$　(2)　$y=-8x+10$

解説

(1)　点B$(-2,\ 11)$を通り，△OABの面積を2等分する直線は，線分OAの中点$(2,\ 4)$を通る。



よって，その方程式は

$$y-4=\frac{11-4}{-2-2}(x-2)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{7}{4}x+\frac{15}{2}$$

(2)　点P$(1,\ 2)$は，線分OAを$1:3$に内分する点である。

よって　AP＝$\frac{3}{4}$OA　……①

求める直線と線分ABとの交点をQ，∠OAB＝θとすると，条件より△OAB：△PAQ＝2：1であるから

$$\frac{1}{2}\text{OA}\cdot\text{AB}\sin\theta=2\times\frac{1}{2}\text{AP}\cdot\text{AQ}\sin\theta\quad \cdots\cdots②$$

①，②から　$\frac{\text{AQ}}{\text{AB}}=\frac{\text{OA}}{2\text{AP}}=\frac{2}{3}$

したがって，点Qは線分ABを$2:1$に内分する。その座標は

$$\left(\frac{1\cdot 4+2\cdot(-2)}{2+1},\ \frac{1\cdot 8+2\cdot 11}{2+1}\right)\quad \text{すなわち}\quad (0,\ 10)$$

よって，求める直線の方程式は

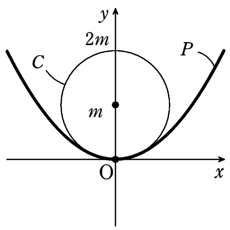
$$y-10=\frac{2-10}{1-0}(x-0)\quad \text{すなわち}\quad y=-8x+10$$

7

解答　$0<m\leqq 2a$

解説

$a>0$ であるから，P は下に凸の放物線である。また，$m>0$ であるから，円 C の中心の y 座標は正である。



よって，円 C と放物線 P が1点のみを共有するときの共有点は，点 $(0,\ 0)$ である。

したがって，円 C の方程式は，次のように表される。

$$x^2+(y-m)^2=m^2 \quad \cdots\cdots ①$$

円 C と放物線 P の共有点の y 座標は，① と $y=\dfrac{1}{4a}x^2$

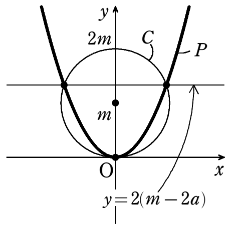
すなわち $x^2=4ay$ から x^2 を消去して

$$4ay+(y-m)^2=m^2$$

ゆえに　$y^2-2(m-2a)y=0$

よって　$y\{y-2(m-2a)\}=0$

ゆえに　$y=0,\ 2(m-2a)$



円 C と放物線 P が1点のみを共有するのは，

$$2(m-2a)\leqq 0 \quad \text{または} \quad 2(m-2a)\geqq 2m$$

のときである。

$2(m-2a)\leqq 0$ から　$m\leqq 2a$

$2(m-2a)\geqq 2m$ から　$a\leqq 0$　これは $a>0$ に反する。

したがって　$0<m\leqq 2a$

8

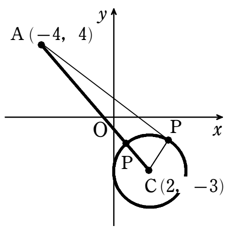
解答　(1) $\sqrt{85}-2$　(2) $\dfrac{1}{4}$

解説

(1) 円の中心を C とする。

点 A は円の外側にあるから　$\mathrm{AP}+\mathrm{CP}\geqq \mathrm{AC}$

等号が成り立つのは，線分 AC 上に点 P があるときである。



$\mathrm{CP}=2$ (円の半径),

$\mathrm{AC}=\sqrt{(2+4)^2+(-3-4)^2}=\sqrt{85}$

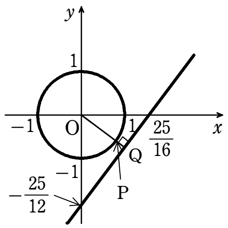
であるから

$\mathrm{AP}\geqq \mathrm{AC}-\mathrm{CP}=\sqrt{85}-2$

よって，求める最短距離は　$\sqrt{85}-2$

(2) 円の中心を O とする。

与えられた円と直線は共有点をもたないから，点 Q は円の外側にあり　$\mathrm{OP}+\mathrm{PQ}\geqq \mathrm{OQ}$



$\mathrm{OP}=1$ であるから　$\mathrm{PQ}\geqq \mathrm{OQ}-1$

よって，線分 PQ の長さが最小となるのは，線分 OQ の長さが最小となるときである。

点 O と直線 $16x-12y=25$ の距離を d とすると

$$d=\frac{|-25|}{\sqrt{16^2+(-12)^2}}=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$$

よって，求める距離 PQ の最小値は

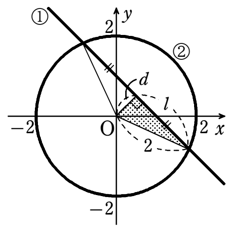
$$d-1=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$$

9

解答　弦の長さ $\sqrt{14}$，弦の中点の座標 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

解説

円 ② の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ① の距離を d とすると



$$d=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

円 ② の半径は2であるから，弦の長さを $2l$ とすると

$$l^2=2^2-d^2=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

$l>0$ であるから　$l=\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

よって，弦の長さは　$2l=\sqrt{14}$

また，弦の中点は，円 ② の中心 $(0,\ 0)$ から直線 ① に下ろした垂線と，直線 ① との交点である。

この垂線の方程式は　$y=x$ ……③　　①，③ を解くと　$x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$

よって，弦の中点の座標は　$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

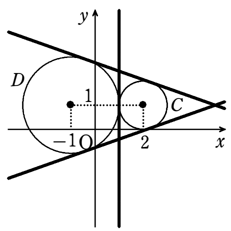
10

解答　(1) $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

(2) $x=1,\ x+2\sqrt{2}\,y-5-2\sqrt{2}=0,\ x-2\sqrt{2}\,y-5+2\sqrt{2}=0$

解説

(1) 円 C の方程式を変形すると　$(x-2)^2+(y-1)^2=1$



よって，円 C の中心は $(2,\ 1)$，半径は1

2円 C，D の中心間の距離 d は

$$d=|2-(-1)|=3$$

円 D の半径を r とすると，円 C と円 D が外接するための条件は　$d=1+r$

よって　$r=d-1=3-1=2$

したがって，円 D の方程式は　$(x+1)^2+(y-1)^2=4$

(2) 円 C 上の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると　$(x_1-2)^2+(y_1-1)^2=1$ ……①

接線の方程式は　$(x_1-2)(x-2)+(y_1-1)(y-1)=1$ ……②

ゆえに　$(x_1-2)x+(y_1-1)y-2x_1-y_1+4=0$ ……②′

直線 ② が円 D に接するための条件は，円 D の中心 $(-1,\ 1)$ と直線 ②′ の距離が，円 D の半径2に等しいことである。

よって　$\dfrac{|-(x_1-2)+(y_1-1)-2x_1-y_1+4|}{\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-1)^2}}=2$

① を代入して整理すると　$|-3x_1+5|=2$

すなわち　$-3x_1+5=2$　または　$-3x_1+5=-2$

これを解くと　$x_1=1$　または　$x_1=\dfrac{7}{3}$

$x_1=1$ のとき，① から　$(y_1-1)^2=0$　　したがって　$y_1=1$

$x_1=1,\ y_1=1$ を ② に代入して　$x=1$

$x_1=\dfrac{7}{3}$ のとき，① から　$\dfrac{1}{9}+(y_1-1)^2=1$

ゆえに　$(y_1-1)^2=\dfrac{8}{9}$　　よって　$y_1-1=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$x_1=\dfrac{7}{3},\ y_1-1=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ を ② に代入して

$$\frac{1}{3}(x-2)\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}(y-1)=1$$

すなわち　$x-2\pm 2\sqrt{2}(y-1)=3$ (複号同順)

以上から，求める共通接線の方程式は

$$x=1,\ x+2\sqrt{2}\,y-5-2\sqrt{2}=0,\ x-2\sqrt{2}\,y-5+2\sqrt{2}=0$$

11

解答　(1) $x^2+y^2-15x-5y+50=0$

(2) $(2,\ 4),\ (-3,\ -1)$

解説

(1) $k(3x+y-20)+x^2+y^2-50=0$ (k は定数) ……①

とすると，① は，与えられた円と直線の交点を通る図形を表す。① が点 $(10,\ 0)$ を通るとして，① に $x=10,\ y=0$ を代入すると

$$10k+50=0 \qquad \text{ゆえに} \qquad k=-5$$

① に代入して　$-5(3x+y-20)+x^2+y^2-50=0$

整理すると　$x^2+y^2-15x-5y+50=0$

これは円を表すから，求める方程式である。

(2) 円の方程式を k について整理すると

$$(x-y+2)k+x^2+y^2-2x-16=0$$

この等式が k の恒等式となるための条件は

$$x-y+2=0 \ \cdots\cdots ①,\quad x^2+y^2-2x-16=0 \ \cdots\cdots ②$$

①，② から y を消去して　$x^2+x-6=0$

よって　$(x-2)(x+3)=0$　　ゆえに　$x=2,\ -3$

① から　$x=2$ のとき　$y=4$,

$x=-3$ のとき　$y=-1$

よって，求める2点の座標は　$(2,\ 4),\ (-3,\ -1)$

12

解答　$\begin{cases} 4x+5y-8\leqq 0 \\ x+3\geqq 0 \\ x-5y-2\leqq 0 \end{cases}$

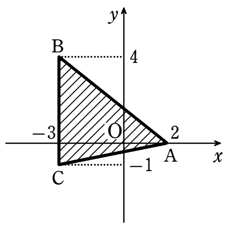
解説

直線 AB の方程式は　$y=\dfrac{4-0}{-3-2}(x-2)$　　すなわち　$y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{8}{5}$

直線 BC の方程式は　$x=-3$

直線 CA の方程式は　$y=\dfrac{-1-0}{-3-2}(x-2)$　　すなわち　$y=\dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{5}$

A，B，Cを頂点とする三角形の内部および周上は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。
この斜線部分は，
　　直線 AB の下側，　直線 BC の右側，
　　直線 CA の上側，
の共通部分である。



よって，求める連立不等式は

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{4}{5}x+\dfrac{8}{5} \\ x \geqq -3 \\ y \geqq \dfrac{1}{5}x-\dfrac{2}{5} \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 4x+5y-8 \leqq 0 \\ x+3 \geqq 0 \\ x-5y-2 \leqq 0 \end{cases}$$

$\boxed{13}$

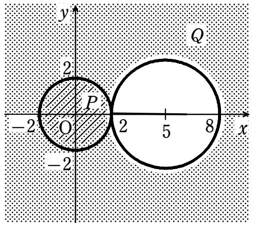
解答　略

解説

$x^2+y^2<4$　の表す領域を P，
$x^2+y^2>10x-16$ の表す領域を Q とする。
$x^2+y^2>10x-16$ から　$(x-5)^2+y^2>9$
P は円 $x^2+y^2=4$ の内部であり，Q は円 $(x-5)^2+y^2=9$ の外部である。
よって，P，Q は右の図のようになり，

$P \subset Q$

が成り立つ。



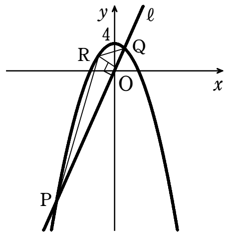
したがって，$x^2+y^2<4$ ならば $x^2+y^2>10x-16$ である。

$\boxed{1}$

解答　P，Q の座標は　$(-2-2\sqrt{2},\ -8-8\sqrt{2})$，$(-2+2\sqrt{2},\ -8+8\sqrt{2})$
　R の座標は　$(-2,\ 0)$

解説

$y=-x^2+4$，$y=4x$ から y を消去して
　$-x^2+4=4x$　すなわち　$x^2+4x-4=0$
これを解くと　$x=-2\pm 2\sqrt{2}$
$x=-2-2\sqrt{2}$ のとき　$y=-8-8\sqrt{2}$
$x=-2+2\sqrt{2}$ のとき　$y=-8+8\sqrt{2}$
したがって，2 点 P，Q の座標は
　$(-2-2\sqrt{2},\ -8-8\sqrt{2})$，$(-2+2\sqrt{2},\ -8+8\sqrt{2})$



△PQR の面積が最大になるのは，点 R から直線 PQ までの距離 d が最大になるときである。
直線 PQ の方程式は　$y=4x$　すなわち　$4x-y=0$
R $(t,\ -t^2+4)$ $(-2-2\sqrt{2}<t<-2+2\sqrt{2})$ とすると

$$d=\frac{|4t-(-t^2+4)|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|t^2+4t-4|}{\sqrt{17}}=\frac{|(t+2)^2-8|}{\sqrt{17}}$$

よって，d は $t=-2$ のとき最大になる。
このときの点 R の座標は　$(-2,\ 0)$

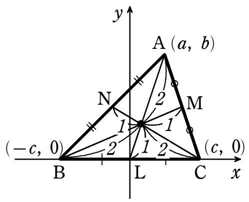
$\boxed{2}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　3 つの中線を AL，BM，CN とする。
　また，L を原点に，直線 BC を x 軸にとると，各頂点の座標は
　　A $(a,\ b)$，B $(-c,\ 0)$，C $(c,\ 0)$
　と表すことができる。このとき

$$\mathrm{L}(0,\ 0),\ \mathrm{M}\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b}{2}\right),\ \mathrm{N}\left(\frac{a-c}{2},\ \frac{b}{2}\right)$$

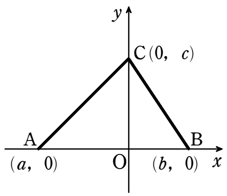


　よって，中線 AL，BM，CN を 2：1 に内分する点の座標はそれぞれ

$$\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3}\right),\ \left(\frac{-c+(a+c)}{2+1},\ \frac{0+b}{2+1}\right),$$
$$\left(\frac{c+(a-c)}{2+1},\ \frac{0+b}{2+1}\right)$$　となり，一致する。

　すなわち，△ABC の 3 つの中線は 1 点で交わる。

(2)　直線 AB を x 軸にとり，C を y 軸上にとると，各頂点の座標は，A $(a,\ 0)$，B $(b,\ 0)$，C $(0,\ c)$ と表すことができる。
　ただし，a，b は同時に 0 になることはなく，$c \neq 0$ とする。



　このとき　$(2+\mathrm{AC}^2)(2+\mathrm{BC}^2)-2\mathrm{AB}^2$

$$\begin{aligned}
&=(2+a^2+c^2)(2+b^2+c^2)-2(a-b)^2 \\
&=c^4+(a^2+b^2+4)c^2+(a^2+2)(b^2+2)-2(a-b)^2 \\
&=c^4+(a^2+b^2+4)c^2+a^2b^2+2a^2+2b^2+4-2(a^2-2ab+b^2) \\
&=c^4+(a^2+b^2+4)c^2+a^2b^2+4ab+4 \\
&=c^4+(a^2+b^2+4)c^2+(ab+2)^2
\end{aligned}$$

$c^4>0$，$(a^2+b^2+4)c^2>0$，$(ab+2)^2 \geqq 0$ であるから

$$(2+\mathrm{AC}^2)(2+\mathrm{BC}^2)-2\mathrm{AB}^2>0$$

すなわち　$2\mathrm{AB}^2<(2+\mathrm{AC}^2)(2+\mathrm{BC}^2)$

$\boxed{3}$

解答　(1)　順に $p \neq \dfrac{9}{2}$，$p=\dfrac{9}{2}$ かつ $q \neq -\dfrac{3}{2}$，$p=\dfrac{9}{2}$ かつ $q=-\dfrac{3}{2}$

　(2)　(ア)　$a \neq 1$　　(イ)　$a=1$ かつ $b \neq 1$　　(ウ)　$a=1$ かつ $b=1$

解説

(1)　連立方程式がただ 1 組の解をもつ条件は，方程式が表す 2 直線が平行でないことである。
　よって　　$2 \cdot p-3 \cdot 3 \neq 0$
　したがって　　$p \neq \dfrac{9}{2}$
　また，連立方程式が解をもたない条件は，方程式が表す 2 直線が平行であり，かつ一致しないことである。
　$p=\dfrac{9}{2}$ のとき，2 直線は　$2x+3y=-1$，$2x+3y=\dfrac{2q}{3}$
　よって　$-1 \neq \dfrac{2q}{3}$　すなわち　$q \neq -\dfrac{3}{2}$
　したがって，求める条件は　$p=\dfrac{9}{2}$　かつ　$q \neq -\dfrac{3}{2}$
　更に，連立方程式が無数の解をもつ条件は，方程式が表す 2 直線が一致することである。
　ゆえに，$p=\dfrac{9}{2}$ のとき　$-1=\dfrac{2q}{3}$　すなわち　$q=-\dfrac{3}{2}$
　したがって，求める条件は　$p=\dfrac{9}{2}$　かつ　$q=-\dfrac{3}{2}$

(2)　2 直線がただ 1 つの共有点をもつための必要十分条件は，2 直線が平行でないことである。
　したがって　　$a(a-2)-1 \cdot (-1) \neq 0$
　よって　　$a^2-2a+1 \neq 0$　　　すなわち　　$(a-1)^2 \neq 0$
　したがって　　$^{ア}a \neq 1$
　また，2 直線が共有点をもたないための必要十分条件は，2 直線が平行であり，かつ一致しないことである。
　$a=1$ のとき，2 直線は　$x-y=2b$，$x-y=b+1$
　よって　$2b \neq b+1$　すなわち　$b \neq 1$
　したがって　　$^{イ}a=1$　かつ　$b \neq 1$
　更に，2 直線が 2 つ以上の共有点をもつための必要十分条件は，2 直線が一致することである。
　したがって　　$^{ウ}a=1$　かつ　$b=1$

$\boxed{4}$

解答　略

解説

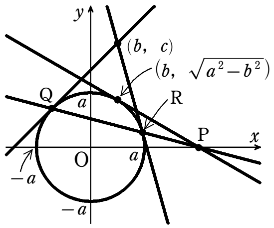
点$\left(b,\ \sqrt{a^2-b^2}\right)$における接線の方程式は

$$bx+\sqrt{a^2-b^2}\,y=a^2$$

この式で $y=0$ とすると，$b\neq0$ であるから

$$x=\frac{a^2}{b}$$

よって　P$\left(\frac{a^2}{b},\ 0\right)$



また，Q$(x_1,\ y_1)$，R$(x_2,\ y_2)$，$x_1\neq x_2$ とすると，
点Q，Rにおける接線の方程式は，それぞれ

$$x_1x+y_1y=a^2,\quad x_2x+y_2y=a^2$$

点$(b,\ c)$を通るから，それぞれ　$bx_1+cy_1=a^2$，$bx_2+cy_2=a^2$
を満たし，これは2点Q，Rが直線 $bx+cy=a^2$ 上にあることを示している。

$bx+cy=a^2$ で $y=0$ とすると　$x=\frac{a^2}{b}$

したがって，2点Q，Rを通る直線は点Pを通る。

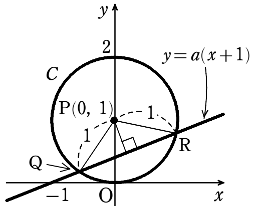
5

解答　(1)　$S(a)=\frac{\sqrt{2a}\,(1-a)}{a^2+1}$　　(2)　$a=2-\sqrt{3}$

解説

(1)　点P(0, 1)と直線 $y=a(x+1)$ すなわち
$-ax+y-a=0$ の距離を d とすると，$0<a<1$ であるから

$$d=\frac{|-a\cdot0+1-a|}{\sqrt{(-a)^2+1^2}}=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$



よって　QR$=2\sqrt{1^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{(1-a)^2}{a^2+1}}$

$$=\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}}$$

したがって　$S(a)=\frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\sqrt{2a}\,(1-a)}{a^2+1}$

(2)　∠QPR$=\theta$ とすると，$0°<\theta<180°$ であり

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$$

よって，$\theta=90°$ のとき $S(a)$ は最大になる。

このとき，△PQRは直角二等辺三角形になるから　$d=\frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$　　よって　$\sqrt{2}(1-a)=\sqrt{a^2+1}$

$0<a<1$ より，両辺を2乗しても同値である。

$$2(1-2a+a^2)=a^2+1$$

ゆえに　$a^2-4a+1=0$

$0<a<1$ であるから　$a=2-\sqrt{3}$

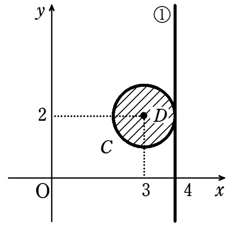
6

解答　(1)　7　　(2)　$14+2\sqrt{13}$　　(3)　$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$　　(4)　64

解説

不等式 $(x-3)^2+(y-2)^2\leqq1$ の表す領域 D は，中心が(3, 2)で半径が1の円 C およびその内部である。

(1)　$2x-1=k$ とおくと　　$x=\frac{k+1}{2}$　……①

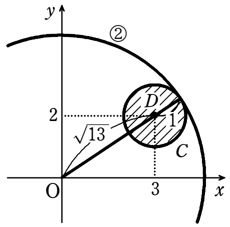


x 軸に垂直な直線①が領域 D と共有点をもつとき，
x 軸との交点の x 座標 $\frac{k+1}{2}$ が最大となるのは，直線①が円 C に図のように接するときである。
このとき，k も最大となるから

$$\frac{k+1}{2}=4\quad\text{すなわち}\quad k=7$$

よって，求める最大値は　　7

(2)　$x^2+y^2=R$ $(R>0)$ ……②とおく。



原点を中心とする円②が領域 D と共有点をもつとき，円②の半径 $\sqrt{R}$ が最大となるのは，円 C が円②に図のように内接するときである。このとき
(円②の半径)=(中心間の距離)+(円 C の半径)

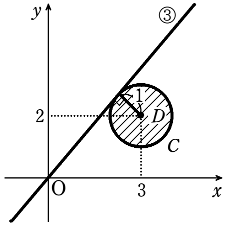
よって　　$\sqrt{R}=\sqrt{3^2+2^2}+1=\sqrt{13}+1$

ゆえに　　$R=(\sqrt{13}+1)^2=14+2\sqrt{13}$

このとき R も最大であるから，求める最大値は

$$14+2\sqrt{13}$$

(3)　$\frac{y}{x}=m$ とおくと　　$y=mx$　……③



原点を通る直線③が領域 D と共有点をもつとき，
傾き m が最大となるのは，直線③が円 C に図のように接するときである。
このとき，円 C の中心(3, 2)と直線③の距離が円 C の半径1と一致するから

$$\frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

すなわち　　　$|3m-2|=\sqrt{m^2+1}$

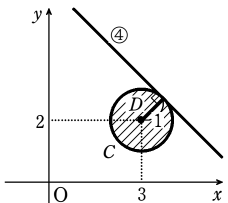
両辺を2乗して　　$(3m-2)^2=m^2+1$

整理して　　　$8m^2-12m+3=0$

これを解いて　　$m=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-8\cdot3}}{8}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$

よって，求める最大値は　　$\frac{3+\sqrt{3}}{4}$

(4)　$10x+10y=n$ とおくと　　$y=-x+\frac{n}{10}$　……④



傾き -1 の直線④が領域 D と共有点をもつとき，
円 C の中心(3, 2)と直線④の距離は円 C の半径1以下であるから

$$\frac{|10\cdot3+10\cdot2-n|}{\sqrt{10^2+10^2}}\leqq1$$

よって　　$|50-n|\leqq10\sqrt{2}$

ゆえに　　$-10\sqrt{2}\leqq50-n\leqq10\sqrt{2}$

すなわち　$50-10\sqrt{2}\leqq n\leqq50+10\sqrt{2}$

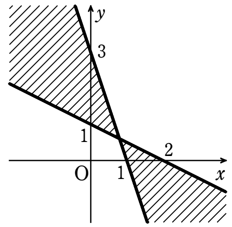
$1.4<\sqrt{2}<1.5$ であるから，これを満たす最大の整数値は

$$n=50+10\cdot1.4=64$$

7

解答　(1)　[図] 境界線を含む

(2)　$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{4}{5}$ のとき最小値 $\frac{4}{5}$



解説

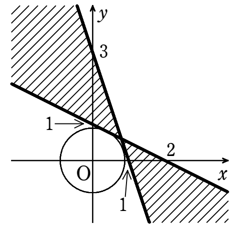
(1)　$3x^2+7xy+2y^2-9x-8y+6$

$=2y^2+(7x-8)y+3(x-1)(x-2)$

$=\{y+3(x-1)\}(2y+x-2)$

ゆえに，不等式は　　$(y+3x-3)(2y+x-2)\leqq0$

よって　$\begin{cases} y\leqq-3x+3 \\ y\geqq-\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y\geqq-3x+3 \\ y\leqq-\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$



したがって，領域 D は右の図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。

注意　図の円は，(2)のためのもので，(1)の答えには関係ない。

(2)　$x^2+y^2=k$ ……①とおくと，$k>0$ のとき，①は，原点を中心とする半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

x^2+y^2 の値の範囲は，円①が領域 D と共有点をもつような k の値の範囲である。
図から，k の値が最小となるのは，円①が直線 $3x+y-3=0$ ……②，
$x+2y-2=0$ ……③のいずれかと接するときである。

原点と直線②の距離は　　$\frac{|-3|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

原点と直線③の距離は　　$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2>\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$ であるから　　$\frac{3}{\sqrt{10}}>\frac{2}{\sqrt{5}}$

ゆえに，円①と直線③が接するとき，k の値は最小となる。

直線③に垂直で原点を通る直線の方程式は　　$y=2x$　……④

③，④を連立して解くと　　$(x,\ y)=\left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right)$

よって　　$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{4}{5}$ のとき最小値 $\frac{4}{5}$

8

解答　$0<c\leqq\frac{3}{2}$

解説

$x^2+y^2-cy<0$ から　　$x^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2<\frac{c^2}{4}$

$P=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,x^2+\left(y-\frac{c}{2}\right)^2<\frac{c^2}{4}\right\}$，$Q=\{(x,\ y)\mid(x-1)^2+y^2<4\}$ とする。

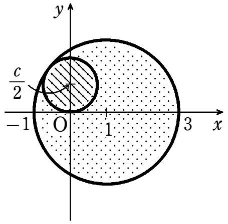
$x^2+y^2-cy<0 \Longrightarrow (x-1)^2+y^2<4$ が成り立つための条件は，$P\subset Q$ である。

$c>0$ であるから，$x^2+\left(y-\dfrac{c}{2}\right)^2=\dfrac{c^2}{4}$ は円を表す。

求める条件は，円 $x^2+\left(y-\dfrac{c}{2}\right)^2=\dfrac{c^2}{4}$ が，円 $(x-1)^2+y^2=4$ の内部にあるか，または内接することである。

ゆえに，(中心間の距離)≦(半径の差) により

$$\sqrt{(1-0)^2+\left(0-\frac{c}{2}\right)^2}\leqq\left|2-\frac{c}{2}\right|$$



両辺は負でないから平方して　$1+\dfrac{c^2}{4}\leqq\left(2-\dfrac{c}{2}\right)^2$

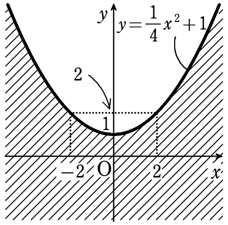
これを解いて　$c\leqq\dfrac{3}{2}$

$c>0$ であるから　$0<c\leqq\dfrac{3}{2}$

$\boxed{9}$

解答　(1)　$2tx-4y-t^2+4=0$

(2)　〔図〕　境界線を含む



解説

(1)　$t=0$ のとき，線分 PQ の垂直二等分線の方程式は　$y=1$

$t\neq0$ のとき，直線 PQ の傾きは　$-\dfrac{2}{t}$

また，線分 PQ の中点の座標は　$\left(\dfrac{t}{2},\ 1\right)$

よって，線分 PQ の垂直二等分線の方程式は　$y-1=\dfrac{t}{2}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$

すなわち　$2tx-4y-t^2+4=0$　……①

① に $t=0$ を代入すると，$y=1$ が得られる。

よって，求める線分 PQ の垂直二等分線の方程式は　$2tx-4y-t^2+4=0$

別解　線分 PQ の垂直二等分線上の点を R$(x,\ y)$ とする。

線分 PQ の垂直二等分線は，$\mathrm{PR}^2=\mathrm{QR}^2$ を満たす点 R の軌跡である。

よって，線分 PQ の垂直二等分線の方程式は　$(x-t)^2+y^2=x^2+(y-2)^2$

整理すると　$2tx-4y-t^2+4=0$

(2)　t について整理すると　$t^2-2xt+4y-4=0$　……②

よって，線分 PQ の垂直二等分線が通過する領域は，② を満たす実数 t が存在するような点 $(x,\ y)$ 全体である。

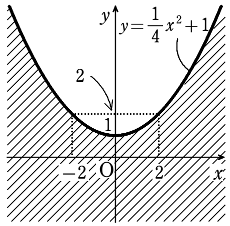
② の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-x)^2-(4y-4)=x^2-4y+4\geqq0$$

から　$y\leqq\dfrac{1}{4}x^2+1$

よって，求める領域は，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。



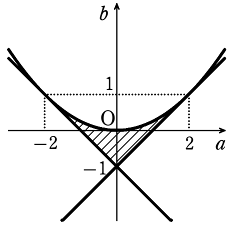
$\boxed{10}$

解答　(1)　〔図〕 境界線を含む

(2)　$a=2，b=1$ のとき最大値 4，

$a=0，b=-1$ のとき最小値 -2

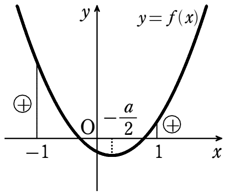
(1)



解説

(1)　$f(x)=x^2+ax+b$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸で，軸は直線 $x=-\dfrac{a}{2}$ である。

よって，方程式 $f(x)=0$ が実数解をもち，すべての解の絶対値が 1 以下となるための条件は，その判別式を D とすると，次の 4 つが同時に成り立つことである。



$D=a^2-4b\geqq0$　……①

$f(-1)=1-a+b\geqq0$　……②

$f(1)=1+a+b\geqq0$　……③

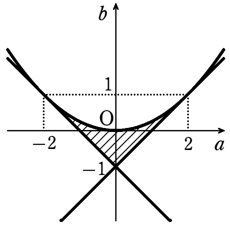
軸について　$-1\leqq-\dfrac{a}{2}\leqq1$　……④

① から　$b\leqq\dfrac{a^2}{4}$　　② から　$b\geqq a-1$

③ から　$b\geqq-a-1$　　④ から　$-2\leqq a\leqq2$

これらを同時に満たす点 $(a,\ b)$ 全体を図示すると，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。



(2)　$a+2b=k$ とおくと　$b=-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{k}{2}$　……⑤

これは傾きが $-\dfrac{1}{2}$，b 切片が $\dfrac{k}{2}$ の直線を表す。

この直線 ⑤ が (1) で求めた領域と共有点をもつような k の最大値と最小値を求めればよい。

図から，直線 ⑤ が点 (2，1) を通るとき，k は最大で

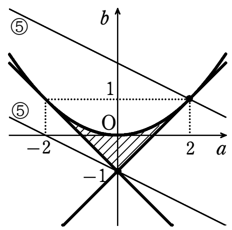
$k=2+2\cdot1=4$

また，点 $(0,\ -1)$ を通るとき，k は最小で

$k=0+2\cdot(-1)=-2$

したがって　$a=2，b=1$ のとき最大値 4

$a=0，b=-1$ のとき最小値 -2



$\boxed{11}$

解答　(1)　Q$\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$，R$\left(-\dfrac{9}{7},\ -\dfrac{10}{7}\right)$　　(2)　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}<2$

解説

(1)　$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$　……①，

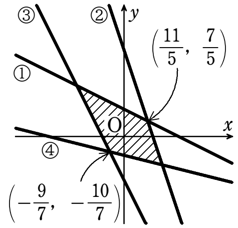
$y=-3x+8$　……②，$y=-2x-4$　……③，

$y=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{7}{4}$　……④　とする。

領域 D を図示すると，右図の斜線部分になる。

ただし，境界線を含む。

$x+y=k$ とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k の直線を表す。



$-3<-1<-\dfrac{1}{2}$ から，$x=\dfrac{11}{5}$，$y=\dfrac{7}{5}$ のとき，k は最大値 $\dfrac{18}{5}$ をとる。

$-2<-1<-\dfrac{1}{4}$ から，$x=-\dfrac{9}{7}$，$y=-\dfrac{10}{7}$ のとき，k は最小値 $-\dfrac{19}{7}$ をとる。

よって　Q$\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$，R$\left(-\dfrac{9}{7},\ -\dfrac{10}{7}\right)$

(2)　$ax+by=k$ とおくと，これは傾きが $-\dfrac{a}{b}\ (<0)$，y 切片が $\dfrac{k}{b}$ の直線を表す。

また，$b>0$ であるから，k が最大のとき $\dfrac{k}{b}$ も最大であり，k が最小のとき $\dfrac{k}{b}$ も最小である。

点 Q でのみ最大値をとるから，$-3<-\dfrac{a}{b}<-\dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}<3$　……⑤

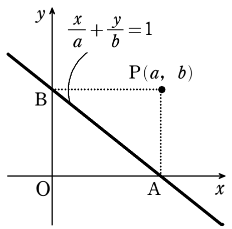
点 R でのみ最小値をとるから，$-2<-\dfrac{a}{b}<-\dfrac{1}{4}$ より　$\dfrac{1}{4}<\dfrac{a}{b}<2$　……⑥

⑤，⑥ から　$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}<2$

1

解答　$\frac{\sqrt{2}}{4}k$

解説



直線ABの方程式は　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

点P$(a,\ b)$と直線ABの距離を d とすると

$$d=\frac{\left|\frac{1}{a}\cdot a+\frac{1}{b}\cdot b-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$$

ここで，$\frac{1}{a^2}>0$，$\frac{1}{b^2}>0$ であるから，

(相加平均)≧(相乗平均) により

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{a^2b^2}}=\frac{2}{ab}\quad\cdots\cdots①$$

また，$a>0$，$b>0$ であるから，(相加平均)≧(相乗平均) により

$$k=a+b\geqq 2\sqrt{ab}$$

よって　$k^2\geqq 4ab$　　ゆえに　$\frac{1}{ab}\geqq\frac{4}{k^2}$　……②

したがって，①，②から　$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqq 2\cdot\frac{4}{k^2}=\frac{8}{k^2}$　……③

①の等号が成立するのは $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}$ すなわち $a=b$ のときであり，②の等号が成立するのは $a=b=\frac{k}{2}$ のときである。

よって，③の等号が成立するのも $a=b=\frac{k}{2}$ のときである。

したがって，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ は $a=b=\frac{k}{2}$ のとき最小値 $\frac{8}{k^2}$ をとる。

このとき，d は最大となり，その最大値は　$d=\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{k^2}}}=\frac{k}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}k$

別解　直線ABの方程式は　$y-0=-\frac{b}{a}(x-a)$

すなわち　$bx+ay-ab=0$

点P$(a,\ b)$と直線ABの距離を d とすると

$$d=\frac{|b\cdot a+a\cdot b-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{\sqrt{(a+b)^2-2ab}}=\frac{ab}{\sqrt{k^2-2ab}}$$

k は定数であるから，ab が最大となるとき d は最大となる。

ここで　$ab=a(k-a)=-a^2+ak=-\left(a-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{4}$

$0<a<k$ であるから，ab は $a=b=\frac{k}{2}$ のとき最大値 $\frac{k^2}{4}$ をとる。

このとき，d は最大となり，その最大値は　$d=\frac{\frac{k^2}{4}}{\sqrt{k^2-2\cdot\frac{k^2}{4}}}=\frac{k^2}{4\sqrt{\frac{k^2}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}k$

2

解答　(前半)　略　　(後半)　略

解説

(前半)　直線BCの傾きは　$\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{c-b}=-\frac{1}{bc}$

よって，Aを通り直線BCに垂直な直線 ℓ の方程式は　$y-\frac{1}{a}=bc(x-a)$

すなわち　$y=bcx-abc+\frac{1}{a}$　……①

同様に，Bを通り直線CAに垂直な直線 m の方程式は

$y=cax-abc+\frac{1}{b}$　……②

①，②から y を消去すると　$bcx-abc+\frac{1}{a}=cax-abc+\frac{1}{b}$

よって　$(a-b)cx=-\frac{a-b}{ab}$　　$a\neq b$ であるから　$x=-\frac{1}{abc}$

①に代入すると　$y=bc\left(-\frac{1}{abc}\right)-abc+\frac{1}{a}$　　よって　$y=-abc$

ゆえに，垂心Hの座標は　$\left(-\frac{1}{abc},\ -abc\right)$

$-abc=\frac{1}{-\frac{1}{abc}}$ であるから，垂心Hは曲線 K 上にある。

(後半)　$-\frac{1}{abc}=h$ とおくと　H$\left(h,\ \frac{1}{h}\right)$

(1)から，△ABHの垂心の座標は　$\left(-\frac{1}{abh},\ -abh\right)$

h に $-\frac{1}{abc}$ を代入すると　$\left(-\frac{1}{ab\left(-\frac{1}{abc}\right)},\ -ab\left(-\frac{1}{abc}\right)\right)$

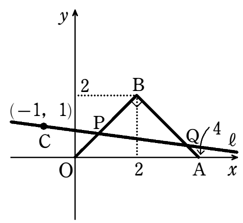
すなわち　$\left(c,\ \frac{1}{c}\right)$

したがって，△ABHの垂心は点Cに一致する。

3

解答　$m=\frac{3-2\sqrt{5}}{11}$

解説



△OAB$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$

また，直線OBの方程式は $y=x$，直線ABの方程式は $y=-x+4$ であるから，直線OBと直線ABは垂直に交わる。

よって　∠OBA$=90°$

ℓ の方程式を変形すると　$y=m(x+1)+1$

ゆえに，ℓ は点$(-1,\ 1)$を通り，傾きが m の直線である。

ここで，点$(-1,\ 1)$をCとすると

△OAC$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2=\frac{1}{2}$△OAB

このことから，ℓ が△OABの面積を2等分するとき，ℓ は辺ABと交わることがわかる。

ℓ が点Aを通るとき　$0=4m+m+1$　　よって　$m=-\frac{1}{5}$

ℓ が点Bを通るとき　$2=2m+m+1$　　よって　$m=\frac{1}{3}$

ゆえに　$-\frac{1}{5}<m<\frac{1}{3}$　……①

①のとき，ℓ と辺OBの交点をPとし，ℓ と辺ABの交点をQとする。

点Pの x 座標は，$x=mx+m+1$ を解いて　$x=\frac{m+1}{1-m}$

点Qの x 座標は，$-x+4=mx+m+1$ を解いて　$x=\frac{3-m}{m+1}$

直線OBの傾きは1であるから　BP$=\sqrt{2}\left(2-\frac{m+1}{1-m}\right)=\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{1-m}$

直線ABの傾きは -1 であるから　BQ$=\sqrt{2}\left(\frac{3-m}{m+1}-2\right)=\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{m+1}$

したがって　△BPQ$=\frac{1}{2}$BP·BQ$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{1-m}\cdot\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{m+1}=\frac{(1-3m)^2}{1-m^2}$

ℓ が△OABの面積を2等分するとき，△BPQ$=2$ となるから　$\frac{(1-3m)^2}{1-m^2}=2$

分母を払って　$(1-3m)^2=2(1-m^2)$

整理すると　$11m^2-6m-1=0$　　これを解いて　$m=\frac{3\pm 2\sqrt{5}}{11}$

①を満たすのは　$m=\frac{3-2\sqrt{5}}{11}$

別解　[P，Qの x 座標を求めるところまでは同じ]

点P，Qの x 座標を，それぞれ p，q とすると

BP：BO$=(2-p)：2$，BQ：BA$=(q-2)：2$

直線 ℓ が△OABの面積を2等分するとき

$\frac{\triangle\mathrm{BPQ}}{\triangle\mathrm{BOA}}=\frac{\mathrm{BP}\cdot\mathrm{BQ}}{\mathrm{BO}\cdot\mathrm{BA}}=\frac{1}{2}$　すなわち　$\frac{(2-p)(q-2)}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}$

ゆえに　$(2-p)(q-2)=2$

$p=\frac{m+1}{1-m}$，$q=\frac{3-m}{m+1}$ であるから，これを代入して

$\left(2-\frac{m+1}{1-m}\right)\left(\frac{3-m}{m+1}-2\right)=2$　すなわち　$\frac{(1-3m)^2}{(1-m)(1+m)}=2$

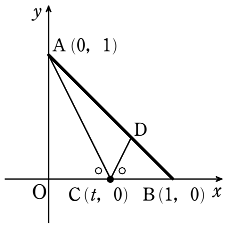
したがって，$\frac{(1-3m)^2}{1-m^2}=2$ が得られる。　(以後同じ)

4

解答　$3-2\sqrt{2}$

解説

直線 AC の傾きは　$-\frac{1}{t}$



∠ACO＝∠BCD より，直線 AC の傾きと直線 CD の傾きは絶対値が等しく，符号が異なるから，直線 CD の傾きは $\frac{1}{t}$ である。

直線 CD の方程式は　$y=\frac{1}{t}(x-t)$　……①

直線 AB の方程式は　$y=-x+1$　……②

点 D の y 座標は①と②の連立方程式の解である。

①の両辺を t 倍して　$ty=x-t$　……③

②＋③から　$(t+1)y=1-t$

$t+1\neq 0$ であるから　$y=\frac{1-t}{t+1}$

三角形 ACD の面積を S とすると

$$S=\triangle ABO-\triangle ACO-\triangle BCD$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1-\frac{1}{2}\cdot t\cdot1-\frac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot\frac{1-t}{t+1}=\frac{1}{2}\left\{1-t-\frac{(1-t)^2}{t+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t^2-(1-2t+t^2)}{t+1}=\frac{t-t^2}{t+1}=-t+2-\frac{2}{t+1}$$
$$=3-\left(t+1+\frac{2}{t+1}\right)$$

$t+1>0$，$\frac{2}{t+1}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$S\leqq 3-2\sqrt{(t+1)\cdot\frac{2}{t+1}}=3-2\sqrt{2}$$

等号は，$0<t<1$ かつ $t+1=\frac{2}{t+1}$ すなわち $t=\sqrt{2}-1$ のとき成り立つ。

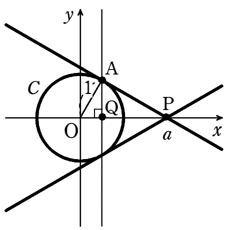
したがって，三角形 ACD の面積は $t=\sqrt{2}-1$ のとき最大値 $3-2\sqrt{2}$ をとる。

5

解答　(1)　$\frac{1}{a}$　(2)　$\frac{PR}{QR}=a$　(3)　順に $\left(\frac{2a}{a^2+1},\ \pm\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$，$\frac{a^2-1}{\sqrt{a^2+1}}$

解説

(1)　P から C へ引いた 2 本の接線の接点のうち，1 つを A とする。



△OAP∽△OQA より　OP：OA＝OA：OQ

よって　$a:1=1:\mathrm{OQ}$　　ゆえに　$\mathrm{OQ}=\frac{1}{a}$

したがって，点 Q の x 座標は　$\frac{1}{a}$

(2)　点 R の座標を $(s,\ t)$ とする。

点 R は円 C 上の点であるから　$s^2+t^2=1$　……①

ここで　$\mathrm{PR}^2=(s-a)^2+t^2=s^2+t^2-2as+a^2$

①を代入して　$\mathrm{PR}^2=a^2-2as+1$　……②

また　$\mathrm{QR}^2=\left(s-\frac{1}{a}\right)^2+t^2=s^2+t^2-\frac{2s}{a}+\frac{1}{a^2}$

①を代入して　$\mathrm{QR}^2=\frac{1}{a^2}-\frac{2s}{a}+1=\frac{1}{a^2}(a^2-2as+1)$

よって　$\frac{\mathrm{PR}^2}{\mathrm{QR}^2}=a^2$　　$a>1$ より　$\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}=a$

したがって，$\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}$ は R によらず一定である。

(3)　∠PRQ＝90° より，△PQR について三平方の定理を用いると

$\mathrm{PR}^2+\mathrm{QR}^2=\mathrm{PQ}^2$　　よって　$\mathrm{QR}^2\left\{\left(\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}\right)^2+1\right\}=\mathrm{PQ}^2$

(2) より　$\frac{1}{a^2}(a^2-2as+1)(a^2+1)=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

展開して整理すると　$as+\frac{s}{a}-2=0$　　ゆえに　$s=\frac{2a}{a^2+1}$

これを①に代入して　$\left(\frac{2a}{a^2+1}\right)^2+t^2=1$

よって　$t^2=\frac{(a^2-1)^2}{(a^2+1)^2}$　　ゆえに　$t=\pm\frac{a^2-1}{a^2+1}$

したがって，点 R の座標は　$\left(\frac{2a}{a^2+1},\ \pm\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$

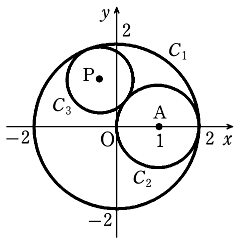
また，線分 PR の長さは②から　$\mathrm{PR}=\sqrt{a^2-2a\cdot\frac{2a}{a^2+1}+1}=\frac{a^2-1}{\sqrt{a^2+1}}$

6

解答　(1)　$a=-3t+2$，$b=\sqrt{-8t^2+8t}$，$0<t<1$　(2)　$t=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$

解説

(1)　O (0, 0)，A (1, 0)，P $(a,\ b)$ とする。



円 C_3 が円 C_1 に内接するから　$0<t<2$　……①

OP＝$2-t$ であるから

$\sqrt{a^2+b^2}=2-t$　……②

円 C_3 が円 C_2 に外接するから　AP＝$1+t$

よって　$\sqrt{(a-1)^2+b^2}=1+t$　……③

①のとき，②，③の右辺は正であるから，それぞれの両辺を 2 乗しても同値である。

②から　$a^2+b^2=(2-t)^2$　……④

③から　$(a-1)^2+b^2=(1+t)^2$　……⑤

④，⑤から，b を消去すると　$2a-1=-6t+3$　　したがって　$a=-3t+2$

④に代入すると　$(-3t+2)^2+b^2=(2-t)^2$　　ゆえに　$b^2=-8t^2+8t$

b は正の実数であるから　$-8t^2+8t>0$　すなわち　$-8t(t-1)>0$

これを解いて　$0<t<1$　……⑥

t がとりうる値の範囲は，①と⑥の共通範囲を求めて　$0<t<1$

このとき　$b=\sqrt{-8t^2+8t}$

(2)　$b=\sqrt{-8t^2+8t}=\sqrt{-8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2}$

(1) の結果から，t は $0<t<1$ の範囲を動く。

よって，b は $t=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

7

解答　(1)　$8tx+(t^2-16)y-8=0$　(2)　証明略，$x^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

解説

(1)　円 C_2 の方程式は　$x^2+y^2=1$

$P_1(a,\ b)$，$P_2(c,\ d)$，$Q\left(t,\ \frac{t^2}{8}-2\right)$ とする。

点 P_1 における円 C_2 の接線の方程式は　$ax+by=1$

これが点 Q を通るから　$at+b\left(\frac{t^2}{8}-2\right)=1$　……①

点 P_2 における円 C_2 の接線の方程式は　$cx+dy=1$

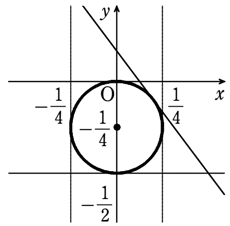
これが点 Q を通るから　$ct+d\left(\frac{t^2}{8}-2\right)=1$　……②

①，②より，直線 $tx+\left(\frac{t^2}{8}-2\right)y=1$ は 2 点 P_1，P_2 を通る。

したがって，直線 ℓ の方程式は　$tx+\left(\frac{t^2}{8}-2\right)y=1$

すなわち　$8tx+(t^2-16)y-8=0$　……③

(2)　直線 ℓ が t の値にかかわらず，ある円に接するならば，その円は③で $t=0,\ 4,\ -4,\ 8$ として得られる 4 直線に接する。



③より

$t=0$ のとき　$y=-\frac{1}{2}$　　$t=4$ のとき　$x=\frac{1}{4}$

$t=-4$ のとき　$x=-\frac{1}{4}$

$t=8$ のとき　$y=-\frac{4}{3}x+\frac{1}{6}$

この 4 直線に接する円は $x^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$ だけである。

③より，この円の中心 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$ と直線 ℓ の距離は

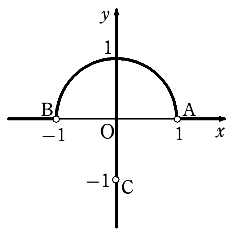
$$\frac{\left|-\frac{1}{4}(t^2-16)-8\right|}{\sqrt{64t^2+(t^2-16)^2}}=\frac{\left|-\frac{1}{4}(t^2+16)\right|}{\sqrt{(t^2+16)^2}}=\frac{1}{4}$$

したがって，t の値によらず点 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$ と直線 ℓ の距離は $\frac{1}{4}$ である。

ゆえに，直線 ℓ は t の値によらず中心 $\left(0,\ -\frac{1}{4}\right)$，半径 $\frac{1}{4}$ の円に接し，その円の方程式は　$x^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$

8

解答　〔図〕



解説

点Pが直線AC上または直線BC上（ただし，点PはCと異なる）にあるとすると

$$\angle\mathrm{APC} \neq \angle\mathrm{BPC}$$

よって，△APCと△BPCが存在する。

$\mathrm{AP}=a$，$\mathrm{BP}=b$，$\mathrm{CP}=c$ とおき，△APCと△BPCに余弦定理を用いると

$$\frac{a^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2ac}=\frac{b^2+c^2-(\sqrt{2})^2}{2bc}$$

ゆえに　$b(a^2+c^2-2)=a(b^2+c^2-2)$

$ab(a-b)-c^2(a-b)+2(a-b)=0$

$(a-b)(ab-c^2+2)=0$

よって　$a=b$　または　$ab=c^2-2$

[1]　$a=b$ のとき

点Pは線分ABの垂直二等分線上，すなわち y 軸上を動く。ただし，点PはCと異なるから，点 $(0,\ -1)$ を除く。

[2]　$ab=c^2-2$ のとき　$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}=x^2+(y+1)^2-2$$

よって　$x^2+(y+1)^2 \geqq 2$　……①　かつ

$(x^2+1+y^2-2x)(x^2+1+y^2+2x)=\{(x^2+1+y^2)+2(y-1)\}^2$　……②

②から　$(x^2+1+y^2)^2-4x^2=(x^2+1+y^2)^2+4(y-1)(x^2+1+y^2)+4(y-1)^2$

ゆえに　$(y-1)(x^2+y^2+1)+(y-1)^2+x^2=0$

$(y-1)(x^2+y^2+1)+x^2+y^2+1-2y=0$

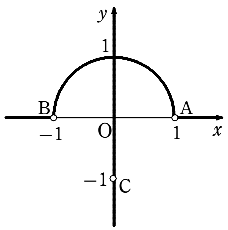
$y(x^2+y^2+1)-2y=0$

$y(x^2+y^2-1)=0$

これと①から

$(y=0$ または $x^2+y^2=1)$　かつ　$x^2+(y+1)^2 \geqq 2$

[1]，[2]と，点PがA，Bと異なることから，点Pの軌跡は右の図のようになる。



9

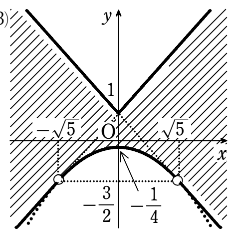
解答　(1)　$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$

(2)　$2ax+4y-a^2+1=0$

(3)　[図]　境界線は放物線 $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$

$(-\sqrt{5}<x<\sqrt{5})$ を含み，他は含まない。

(3)



解説

(1)　円 C の半径は2，C と D の中心間の距離は $\sqrt{a^2+4}$ であるから，C と D が異なる2点で交わるための条件は　$2-1<\sqrt{a^2+4}<2+1$

各辺を2乗して　$1<a^2+4<9$

したがって　$-3<a^2<5$　　$-3<a^2$ は常に成り立つ。

$a^2<5$ を満たす a の値の範囲を求めて　$-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$

(2)　円 C の方程式は　$x^2+(y+2)^2=4$　……①

円 D の方程式は　$(x-a)^2+y^2=1$　……②

①−②から　$2ax-a^2+4y+4=3$

すなわち　$2ax+4y-a^2+1=0$　……③

C と D の2つの交点の座標は，①，②を満たすから，③も満たす。

したがって，③が求める直線の方程式である。

(3)　③から　$a^2-2xa-4y-1=0$　……④

この2次方程式が $-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$ の範囲に解をもつための条件を求める。

$f(a)=a^2-2xa-4y-1$ とすると　$f(a)=(a-x)^2-x^2-4y-1$

[1]　$x \leqq -\sqrt{5}$ のとき

$f(-\sqrt{5})<0$　かつ　$f(\sqrt{5})>0$　から

$4+2\sqrt{5}x-4y<0$　かつ　$4-2\sqrt{5}x-4y>0$

すなわち　$y>\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$　かつ　$y<-\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$

[2]　$-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ のとき

方程式④の判別式を D とすると，$D \geqq 0$　かつ

$(f(-\sqrt{5})>0$　または　$f(\sqrt{5})>0)$ から

$\frac{D}{4}=x^2+4y+1 \geqq 0$　かつ

$(4+2\sqrt{5}x-4y>0$　または　$4-2\sqrt{5}x-4y>0)$

すなわち　$y \geqq -\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$　かつ

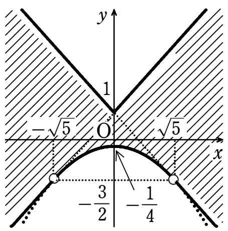
$\left(y<\frac{\sqrt{5}}{2}x+1\right.$　または　$\left.y<-\frac{\sqrt{5}}{2}x+1\right)$

[3]　$x \geqq \sqrt{5}$ のとき　　$f(-\sqrt{5})>0$　かつ　$f(\sqrt{5})<0$ から

$4+2\sqrt{5}x-4y>0$　かつ　$4-2\sqrt{5}x-4y<0$

すなわち　$y<\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$　かつ　$y>-\frac{\sqrt{5}}{2}x+1$

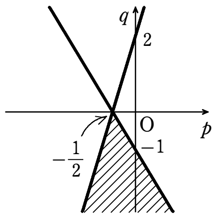
[1]～[3]から，求める領域は右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線は放物線 $y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}$ $(-\sqrt{5}<x<\sqrt{5})$ を含み，他は含まない。



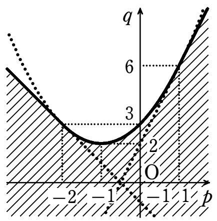
10

解答　(1)　[図]　境界線を含む　　(2)　[図]　境界線を含む

(1)



(2)



解説

(1)　点 $(p,\ q)$ が $D(a)$ の点であるとき

$q \leqq 2ap-a^2+2a+2$

よって　$a^2-2(p+1)a+q-2 \leqq 0$

$f(a)=a^2-2(p+1)a+q-2$ とする。

$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対して，不等式 $f(a) \leqq 0$ が成り立つような p，q の条件を求める。

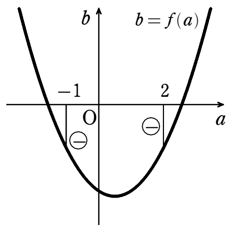
$b=f(a)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，満たすべき条件は　$f(-1) \leqq 0$　かつ　$f(2) \leqq 0$

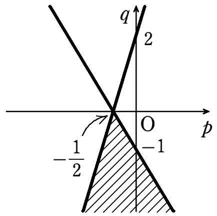
すなわち　$(-1)^2-2(p+1)\cdot(-1)+q-2 \leqq 0$

かつ　$2^2-2(p+1)\cdot 2+q-2 \leqq 0$

整理すると　$q \leqq -2p-1$　かつ　$q \leqq 4p+2$

したがって，求める点 $(p,\ q)$ の範囲は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。





(2)　(1)と同様に，$f(a)=a^2-2(p+1)a+q-2$ とする。

$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対して，不等式 $f(a) \leqq 0$ が成り立つような p，q の条件を求める。

ここで，「$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対して，不等式 $f(a) \leqq 0$ が成り立つ」ことと，「$-1 \leqq a \leqq 2$ における $f(a)$ の最小値が0以下である」ことは同値である。

よって，$-1 \leqq a \leqq 2$ における $f(a)$ の最小値が0以下となる p，q の条件を求めればよい。

$$f(a)=a^2-2(p+1)a+q-2=\{a-(p+1)\}^2-(p+1)^2+q-2$$

[1]　$p+1<-1$　すなわち　$p<-2$ のとき

$f(a)$ の最小値は　$f(-1)$

よって，満たすべき条件は　$f(-1) \leqq 0$　　ゆえに　$q \leqq -2p-1$

[2]　$-1 \leqq p+1 \leqq 2$　すなわち　$-2 \leqq p \leqq 1$ のとき

$f(a)$ の最小値は　$f(p+1)$

よって，満たすべき条件は　$f(p+1) \leqq 0$

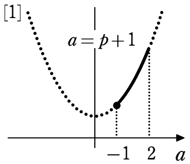
すなわち　$-(p+1)^2+q-2 \leqq 0$　　ゆえに　$q \leqq (p+1)^2+2$

[3]　$2<p+1$　すなわち　$1<p$ のとき

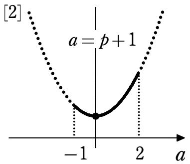
$f(a)$ の最小値は　$f(2)$

よって，満たすべき条件は　$f(2) \leqq 0$　　ゆえに　$q \leqq 4p+2$

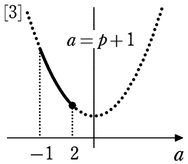
[1]



[2]



[3]



以上から，求める点 $(p,\ q)$ の範囲は，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。