1

a は定数とする。3つの数 x，y，z は関係式　$xyz=2(xy+yz+zx)$，$x+y+z=a$ を満たす。

(1)　$(x-2)(y-2)(z-2)$ を a の式で表せ。

(2)　x，y，z のうち少なくとも1つが2であるとする。このとき，a の値を求めよ。また，$x^3+y^3+z^3$ の値を求めよ。

2

a を定数とする関数 $f(x)=2x^2-6x+7$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ の最大値を M とする。

(1)　M を a を用いて表せ。

(2)　M の最小値を求めよ。

3

2次関数 $y=x^2-2mx-2m-3$ のグラフと x 軸との共有点について

(1)　2次関数のグラフの頂点Pの座標を求めよ。

(2)　m の値によらず，常に2つの共有点をもつことを示せ。

(3)　2つの共有点の x 座標は同時に正になることはない。このことを示せ。

4

△ABCは，AB＝6，AC＝4，∠A＝60° であり，辺BCの中点をMとする。

(1)　辺BCの長さを求めよ。

(2)　∠AMC＝θ，AM＝x とする。$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3)　線分AMの長さを求めよ。

5

球 S の球面上に4点A，B，C，Dがある。3点A，B，Cを通る円の中心をPとすると，線分DPはこの円に垂直である。AB＝6，BC＝$2\sqrt{5}$，CA＝$4\sqrt{2}$，AD＝$2\sqrt{15}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　三角形ABCの面積を求めよ。

(2)　線分APの長さを求めよ。

(3)　四面体ABCDの体積を求めよ。

(4)　球 S の半径と球 S の表面積を求めよ。

$\boxed{1}$

(解説)

(1)　$(x-2)(y-2)(z-2)=(xy-2x-2y+4)(z-2)$

$=xyz-2xy-2zx+4x-2yz+4y+4z-8$

$=xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8$

$xyz=2(xy+yz+zx)$，$x+y+z=a$ であるから

$(x-2)(y-2)(z-2)=4a-8$

(2)　x，y，z のうち少なくとも 1 つが 2 であるとき

$(x-2)(y-2)(z-2)=0$

よって，(1) より　$4a-8=0$

これを解くと　　$a=2$

また，このとき $x+y+z=a=2$ であるから

$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3\cdot 2(xy+yz+zx)$

$=2(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)=2(x+y+z)^2=2\cdot 2^2=8$

$\boxed{2}$

(解説)

$f(x)=2(x^2-3x)+7=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$

(1)　$f(a)=f(a+1)$ となる a の値は,

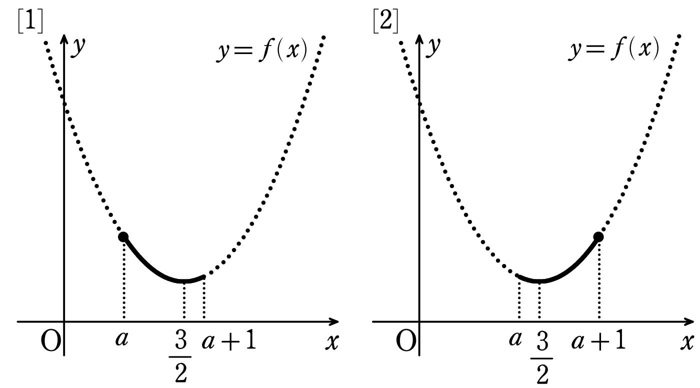
$2a^2-6a+7=2(a+1)^2-6(a+1)+7$ から　　$a=1$

[1]　$a \leqq 1$ のとき，$f(a) \geqq f(a+1)$ であるから

$$M=f(a)=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

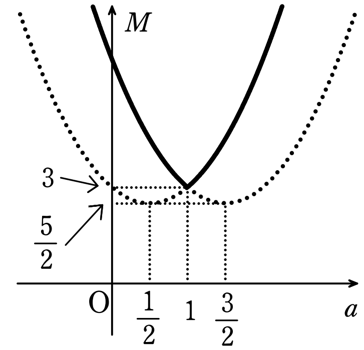
[2]　$a>1$ のとき，$f(a)<f(a+1)$ であるから

$$M=f(a+1)=2\left\{(a+1)-\frac{3}{2}\right\}^2+\frac{5}{2}=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$



(2)　M を a の関数と考えると，そのグラフは (1) から，右の図の実線部分のようになる。

よって，M は $a=1$ で最小値 3 をとる。



$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$y=x^2-2mx-2m-3=(x-m)^2-m^2-2m-3$

よって，頂点 P の座標は　　$(m,\ -m^2-2m-3)$

(2)　頂点の y 座標について

$-m^2-2m-3=-(m^2+2m)-3=-(m+1)^2+1-3$

$=-(m+1)^2-2<0$

よって，頂点の y 座標は負である。また，x^2 の項の係数が正であるから，グラフは下に凸である。

ゆえに，このグラフは x 軸と常に 2 つの共有点をもつ。

(3)　背理法で示す。

2 つの共有点の x 座標がともに正であるとすると，軸について　　$m>0$　……①

また，$f(x)=x^2-2mx-2m-3$ とおくと

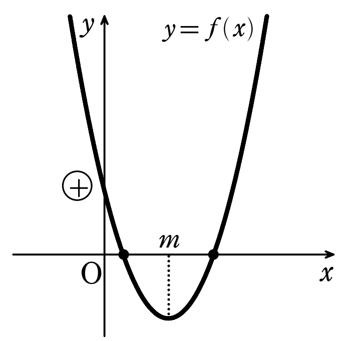
$f(0)>0$

$f(0)=-2m-3$ であるから　　$-2m-3>0$

すなわち　　$m<-\frac{3}{2}$　……②

しかし，①，② を同時に満たす m は存在しない。

したがって，2 つの共有点の x 座標は同時に正になることはない。



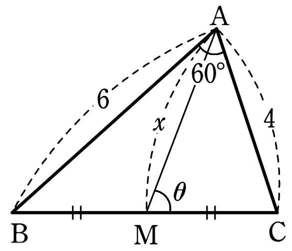
4

解説

(1)　△ABC において，余弦定理により

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 28$$



BC>0 であるから　　$BC = 2\sqrt{7}$

(2)　M は BC の中点であるから　　$MC = \sqrt{7}$

よって，△ACM において，余弦定理により

$$\cos\theta = \frac{AM^2 + CM^2 - AC^2}{2AM \cdot CM} = \frac{x^2 + (\sqrt{7})^2 - 4^2}{2 \cdot x \cdot \sqrt{7}} = \frac{x^2 - 9}{2\sqrt{7}\,x}$$

(3)　△ABM において，余弦定理により

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \cos\angle BMA$$

ここで　　$\cos\angle BMA = \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta = -\frac{x^2 - 9}{2\sqrt{7}\,x}$

よって　　$6^2 = x^2 + (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{7} \cdot \left(-\frac{x^2 - 9}{2\sqrt{7}\,x}\right)$

整理すると　　$2x^2 = 38$　　よって　　$x^2 = 19$

$x > 0$ であるから　　　　$x = \sqrt{19}$

すなわち　　　　$AM = \sqrt{19}$

5

解説

(1)　△ABC において，余弦定理により

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + CA^2 - BC^2}{2AB \cdot CA} = \frac{6^2 + (4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5})^2}{2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，∠BAC＝45° であり，求める面積は

$$\frac{1}{2}AB \cdot CA \sin\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 12$$

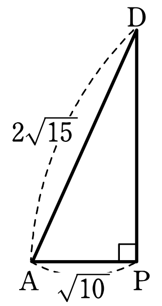
(2)　線分 AP の長さは △ABC の外接円の半径であるから，正弦定理により

$$AP = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{2\sqrt{5}}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{10}$$

(3)　△DPA は ∠DPA＝90° の直角三角形であるから

$$DP = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{(2\sqrt{15})^2 - (\sqrt{10})^2}$$

$$= 5\sqrt{2}$$



よって，四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle ABC \cdot DP = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 5\sqrt{2}$$

$$= 20\sqrt{2}$$

(4)　球 S の中心を O とする。

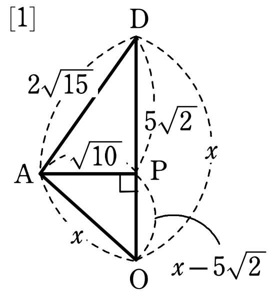
点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすと，点 H は △ABC の外接円の中心 P と一致する。よって，3 点 D，O，P はこの順で一直線上にある。

球 S の半径を x とおく。

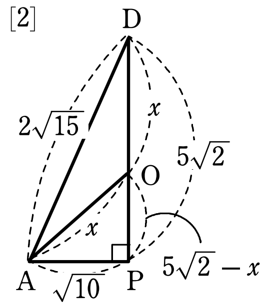
[1]　P が線分 DO 上にあるとき　$OP = x - 5\sqrt{2}$

[2]　P が線分 DO 上にないとき　$OP = 5\sqrt{2} - x$

[1]



[2]



[1]，[2] のいずれの場合も，直角三角形 OPA において，三平方の定理により

$$x^2 = (\sqrt{10})^2 + |x - 5\sqrt{2}|^2$$

展開して整理すると　　$10\sqrt{2}\,x = 60$

よって　　$x = 3\sqrt{2}$

さらに，球 S の表面積は

$$4\pi x^2 = 4\pi \cdot (3\sqrt{2})^2 = 72\pi$$