高 3 物理総合 S～前期第 12 回～　＜解答＞◆フェルマーの原理とレンズ◆

＜予習用問題＞

【１】（１）

（ア）直線 COBA から点 D までの距離を h とする。ここで，△OAD，△OBD の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると，

$$S_1=\frac{1}{2}\times \mathrm{DO}\times \mathrm{DA}\times \sin\theta=\frac{1}{2}\times \mathrm{OA}\times h\ \cdots④,\quad S_2=\frac{1}{2}\times \mathrm{DO}\times \mathrm{DB}\times \sin\theta'=\frac{1}{2}\times \mathrm{OB}\times h\ \cdots⑤$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\dfrac{\mathrm{DO}\times l\sin\theta}{2}}{\dfrac{\mathrm{DO}\times l'\sin\theta'}{2}}=\frac{\dfrac{(s-R)\times h}{2}}{\dfrac{(s'-R)\times h}{2}}\qquad \therefore \frac{l\sin\theta}{l'\sin\theta'}=\frac{s-R}{s'-R}\ \cdots⑥$$

（イ）屈折の法則より，$\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta'}=\dfrac{n'}{n}\ \cdots⑦$

（ウ）①に $l\fallingdotseq s$，$l'\fallingdotseq s'$ を代入し，l，l'を消去すると

$$\frac{n'}{n}=\frac{s-R}{s'-R}\times\frac{s'}{s}\qquad \therefore n(s-R)s'=n'(s'-R)s$$

さらに，上式の両辺を $ss'R$ で割ると，$n\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{s}\right)=n'\times\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{s'}\right)$　$\therefore\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{s'}\right)$

（エ）入射角θ

（２）（オ）右側の球面（および媒質）がない場合に，光線が直線 AC と交わる点を B’ とし，CB’$=s''$ とすると，②の導出と同様にして，

$$n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s}\right)=n'\times\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s''}\right)\ \cdots⑧$$

実際には，右側の球面（および媒質）があるために，点 B’ に向かっていた光が点 B に向かう。この状況について，②と同様にして，

$$n'\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{s''}\right)=n''\times\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{s'}\right)\ \cdots⑨$$

よって，⑧，⑨より $\dfrac{n'}{s''}=\dfrac{n'}{R}-\dfrac{n}{R}+\dfrac{n}{s}=\dfrac{n'}{R'}-\dfrac{n''}{R'}+\dfrac{n''}{s'}$

$$\therefore \frac{n''}{s'}-\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{R}+\frac{n''-n'}{R'}$$

（カ）平行光線の入射は，③において，$s\to\infty$（$n/s\to 0$）のときに相当する。

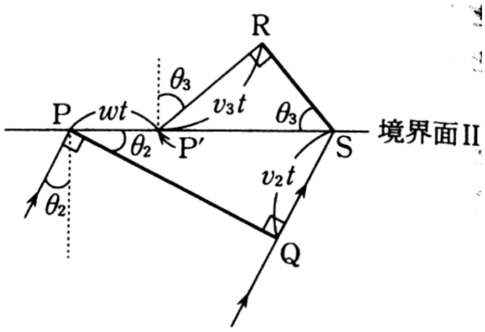
また，$n=n''=1$ より，

$$\frac{1}{s'}-0=\frac{n'-1}{R}+\frac{1-n'}{R'}=\frac{(n'-1)(R'-R)}{RR'}\qquad \therefore s'=\frac{RR'}{(n'-1)(R'-R)}$$

【２】（ア）$\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$　（イ）$\overline{\mathrm{PP'}}=wt$　（ウ）$\overline{\mathrm{P'R}}=v_3t$　（エ）$\overline{\mathrm{QS}}=v_2t$

（オ）$\angle\mathrm{QPS}=\theta_2$，$\angle\mathrm{RSP'}=\theta_3$ なので

$\overline{\mathrm{PS}}=\dfrac{v_2t}{\sin\theta_2}$，$\overline{\mathrm{P'S}}=\dfrac{v_3t}{\sin\theta_3}$



よって，$\overline{\mathrm{PP'}}+\overline{\mathrm{P'S}}=\overline{\mathrm{PS}}$ より

$wt+\dfrac{v_3t}{\sin\theta_3}=\dfrac{v_2t}{\sin\theta_2}$

$\therefore w=\dfrac{v_2}{\sin\theta_2}-\dfrac{v_3}{\sin\theta_3}$

（カ）（オ）より $\dfrac{v_3+w\sin\theta_3}{\sin\theta_3}=\dfrac{v_2}{\sin\theta_2}$　$\therefore\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}=\dfrac{v_2}{v_3+w\sin\theta_3}$

境界面IIでの入射角が θ_2，屈折角が θ_3 で，入射波の速さが v_2 なので，
屈折の法則より屈折波の速さは $v_3+w\sin\theta_3$

（キ）$\theta_2=\theta_4$

（ク）境界面 I での臨界角を θ_A とすると，屈折角 θ_2 を 90° として，

屈折の法則より $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{\sin\theta_A}{\sin 90^\circ}=\sin\theta_A$　$\therefore\sin\theta_A=\dfrac{v_1}{v_2}$

$\theta_A<\theta_1$ のとき全反射が起こるので，$\sin\theta_A<\sin\theta_1$ より $\dfrac{v_1}{v_2}<\sin\theta_1$

ここで，$\sin\theta_1<1$ より，$\dfrac{v_1}{v_2}<1$

（ケ）気温が高いほど音速は速いから，$v_1<v_2$ となるには境界面 I と境界面IIの間の
気温が境界面 I 以下より高くなければならない。よって①

（コ）境界面IIでの臨界角を θ_B とすると，屈折角 θ_3 を 90° とおいて，（カ）より

$\sin\theta_B=\dfrac{v_2}{v_3+w}$　また，$\theta_B<\theta_2$ のとき全反射が起こるので，$\sin\theta_B<\sin\theta_2<1$ より

$\dfrac{v_2}{v_3+w}<1$

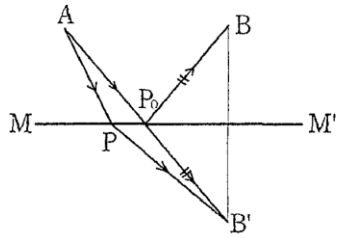
（サ）$\theta_3=90^\circ$，$\theta_2=\theta_B$ のとき $\theta_1=\theta_C$ とおいて $\dfrac{\sin\theta_C}{\sin\theta_B}=\dfrac{v_1}{v_2}$，$\sin\theta_B=\dfrac{v_2}{v_3+w}$

$\therefore\sin\theta_C=\dfrac{v_1}{v_3+w}$

（シ）θ_2 が θ_B より大きいとき全反射する。一方，θ_1 が増せば θ_2 も増す。
したがって，θ_1 が θ_C より大きければ，θ_2 は θ_B より大きくなり境界面IIで全反射する。
よって①

【３】〔Ｉ〕反射面 MM’ に関する点 B の対称点を B’ とし反射点を P とすると，APB と進む光が到達するまでの時間 t は $t=\dfrac{\mathrm{AP}+\mathrm{PB}}{c}=\dfrac{\mathrm{AP}+\mathrm{PB}'}{c}\geqq\dfrac{\mathrm{AB}'}{c}$

（等号成立は P が直線 AB’と反射面 MM’の交点 P_0 のとき）
よって，フェルマーの原理を満たす，到達時間が最小となる反射光の経路は AP_0B であり，このとき反射の法則が成立している。



〔Ⅱ〕（１） $t_0=\dfrac{\mathrm{AC}}{c}+\dfrac{\mathrm{CB}}{c/n}=\dfrac{1}{c}\left(\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}+n\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}\right)$

（２）経路 AC’B を進むのに要する時間 t は

$$t=\frac{\mathrm{AC}'}{c}+\frac{\mathrm{C'B}}{c/n}=\frac{1}{c}\left(\sqrt{(a_1-x)^2+{a_2}^2}+n\sqrt{(b_1-x)^2+{b_2}^2}\right)$$
$$=\frac{1}{c}\left(\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2-2a_1x+x^2}+n\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2-2b_1x+x^2}\right)$$
$$\fallingdotseq\frac{1}{c}\left\{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\left(1-\frac{a_1x}{{a_1}^2+{a_2}^2}\right)+n\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}\left(1-\frac{b_1x}{{b_1}^2+{b_2}^2}\right)\right\}$$
$$=t_0-\frac{x}{c}\left(\frac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}}+\frac{nb_1}{\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}\right)$$

ここで題意より $t\fallingdotseq t_0$ とすると， $\dfrac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}}+\dfrac{nb_1}{\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}=0$

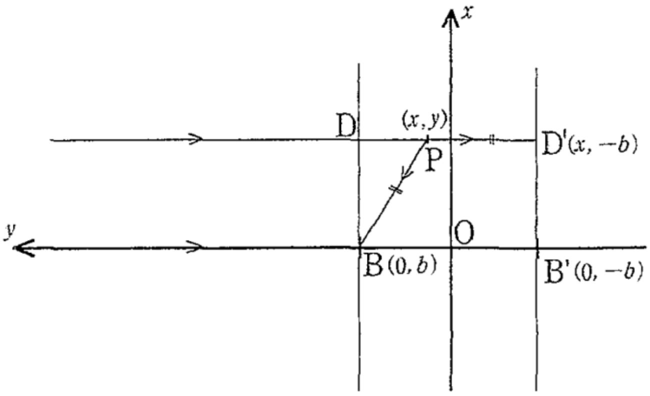
$-\sin\theta+n\sin\phi=0$　　$\therefore\sin\theta=n\sin\phi$　となりスネルの法則が導かれる。

〔Ⅲ〕図のように座標系を設定する。反射がなければ，経路 O’OB と到達時間が等しい波面は図中の直線 D’B’になる。凹面鏡上の反射点を $P(x,\ y)$とすると，点 B に焦点を結ぶ条件は，

PB = PD’

$\sqrt{x^2+(y-b)^2}=y+b$

$\therefore y=\dfrac{1}{4b}x^2$



＜演習問題＞

【１】（１）(a)　(エ)

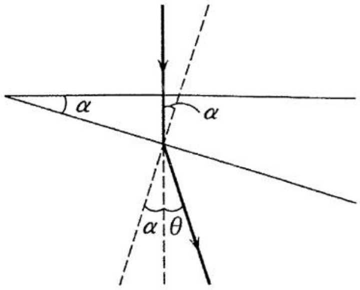
(b)　プリズム中では光速度は遅くなるので，波面と波面の間隔（波長）が狭くなる。
よって，(イ)か(エ)であるが，プリズムから空気中へ出るときの波面の向きが(イ)の

ように 180° 近く変化することはないので，(エ)となる。

（２）(a)　空気中での光速度を c とすると，屈折率 n_p の複プリズム中での光速度 c_p は

$c_p = \dfrac{c}{n_p}$　光の振動数は屈折によって変化しないから $\dfrac{\lambda_p}{c_p} = \dfrac{\lambda}{c}$

$\lambda_p = \dfrac{c_p}{c}\lambda = \dfrac{\lambda}{n_p}$



(b)　右図のように，複プリズムから空気中へ進む光の入射角が α のときの屈折角が $\alpha+\theta$ であるから，屈折の法則より $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)} = \dfrac{1}{n_p}$

α，θ が小さいとして，近似式 $\sin\alpha \fallingdotseq \alpha$，

$\sin(\alpha+\theta) \fallingdotseq \alpha+\theta$ を用いて，$n_p\,\alpha = \alpha+\theta$　　$\therefore \theta = (n_p-1)\,\alpha$

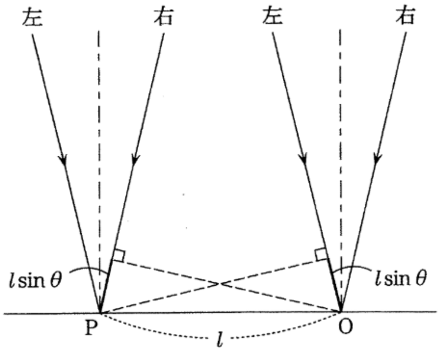
(c)　点 O で波が強めあっているとき，点 P では右プリズムからきた波は光路が $l\sin\theta$ 長くなり，左プリズムからきた波は光路が $l\sin\theta$ 短くなるから $2l\sin\theta$ の光路差が生じる。

よって，点 P においても波が強めあうとき

$2l\sin\theta = k\lambda$ が成り立つ。

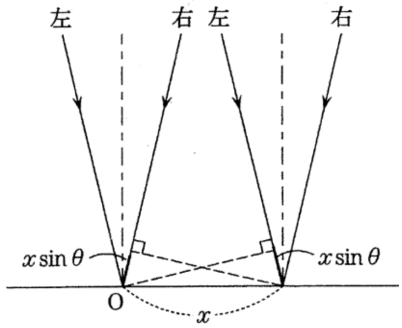
θ が小さいとき $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似して

$2\,l\theta = k\lambda$　　$\therefore l = \dfrac{k\lambda}{2\theta}$



(d)　レンズと右側のプリズムの間に屈折率 n，厚さ t の膜を置くと，右プリズムからの光の光路長が $nt-t=(n-1)t$ だけ長くなる。

このとき，強め合う位置が点 O から右へ x だけずれたとすると，この点では右プリズムからの光の光路が $x\sin\theta$ 短くなり，左プリズムからの光の光路が $x\sin\theta$ 長くなるので，右プリズムからの光の方が左プリズムからの光より $2x\sin\theta$ 光路が短くなる。



点 O と同じ条件で強め合うためには，光路差が同じでなければならないから，

$(n-1)t - 2x\sin\theta = 0$　ここで，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似して $x = \dfrac{(n-1)t}{2\theta}$

$x > 0$ であるから　ずれの向きは：右

ここで，干渉じまの間隔が d であるから，(c)より　$d = \dfrac{(k+1)\lambda}{2\theta} - \dfrac{k\lambda}{2\theta} = \dfrac{\lambda}{2\theta}$

$\therefore \theta = \dfrac{\lambda}{2d}$　よって，$x=\delta$ とおいて，$\delta = \dfrac{(n-1)td}{\lambda}$　　$\therefore n = 1 + \dfrac{\delta\lambda}{td}$