高３共通テスト数学　４月度課題

1

不等式 $3x-3 \leqq 2(2x-1)$ の解は $x \geqq \boxed{\text{アイ}}$，$|2x-1|>1$ の解は $x<\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}<x$ である。また，$\begin{cases} 5(x+1)<-(x+7) \\ 2x+5>3x-5 \end{cases}$ の解は $x<\boxed{\text{オカ}}$，

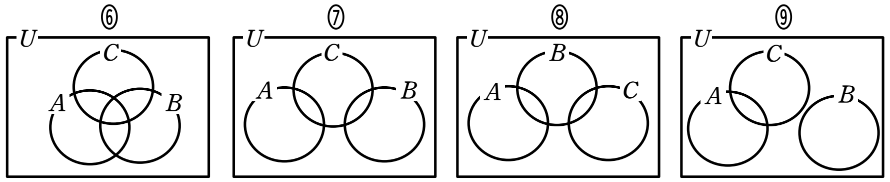
$2x-1<5x-3<1$ の解は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}<x<\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

2

30 以下のすべての自然数の集合を全体集合 U とし，その部分集合 A，B，C を
$A=\{x \mid x \text{は素数}\}$，$B=\{x \mid x \text{は4の倍数}\}$，$C=\{x \mid x \text{は5で割って2余る数}\}$ とする。
このとき，命題「$A \ \boxed{\text{ア}} \ B=\varnothing$」は真である。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $\in$　　① $\ni$　　② $\subset$　　③ $\supset$　　④ $\cap$　　⑤ $\cup$

また，A，B，C の関係を表す図は，次の⑥～⑨のうち $\boxed{\text{イ}}$ である。



3

次の命題が真ならば ⓪ を，偽ならば ① をそれぞれマークせよ。

(1)　n を自然数とする。「$n=2$ ならば n^2 が 24 の約数である」の逆　は $\boxed{\text{ア}}$。

(2)　実数 x について「$1 \leqq x \leqq 6$ ならば $|x-3|<3$」　は $\boxed{\text{イ}}$。

(3)　実数 x，y，z について「$x+y+z>0$ または $xyz>0$ ならば，x，y，z のうち少なくとも 1 つは正」　は $\boxed{\text{ウ}}$。

4

次の問いに答えよ。必要ならば，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1)　A を有理数全体の集合，B を無理数全体の集合とする。空集合を $\varnothing$ と表す。
次の (i)～(iv) が真の命題になるように，$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～⑤ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(i)　$A \ \boxed{\text{ア}} \ \{0\}$　　(ii)　$\sqrt{28} \ \boxed{\text{イ}} \ B$

(iii)　$A=\{0\} \ \boxed{\text{ウ}} \ A$　　(iv)　$\varnothing=A \ \boxed{\text{エ}} \ B$

⓪ $\in$　　① $\ni$　　② $\subset$　　③ $\supset$　　④ $\cap$　　⑤ $\cup$

(2)　実数 x に対する条件 p，q，r を次のように定める。

p：x は無理数

q：$x+\sqrt{28}$ は有理数

r：$\sqrt{28}\,x$ は有理数

次の $\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ③ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための $\boxed{\text{オ}}$。

p は r であるための $\boxed{\text{カ}}$。

⓪　必要十分条件である

①　必要条件であるが，十分条件でない

②　十分条件であるが，必要条件でない

③　必要条件でも十分条件でもない

5

無理数全体の集合を A とする。
命題「$x \in A$，$y \in A$ ならば，$x+y \in A$ である」が偽であることを示すための反例となる x，y の組を，次の ⓪～⑤ のうちから二つ選べ。必要ならば，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてもよい。ただし，解答の順序は問わない。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$

⓪　$x=\sqrt{2}$，$y=0$

①　$x=3-\sqrt{3}$，$y=\sqrt{3}-1$

②　$x=\sqrt{3}+1$，$y=\sqrt{2}-1$

③　$x=\sqrt{4}$，$y=-\sqrt{4}$

④　$x=\sqrt{8}$，$y=1-2\sqrt{2}$

⑤　$x=\sqrt{2}-2$，$y=\sqrt{2}+2$

6

数学の授業で，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ についてコンピュータのグラフ表示ソフトを用いて考察している。
このソフトでは，図 1 の画面上の $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ にそれぞれ 係数 a，b，c の値を入力すると，その値に応じたグラフが表示される。さらに，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ それぞれの下にある・を左に動かすと係数の値が減少し，右に動かすと係数の値が増加するようになっており，値の変化に応じて 2 次関数のグラフが座標平面上を動く仕組みになっている。

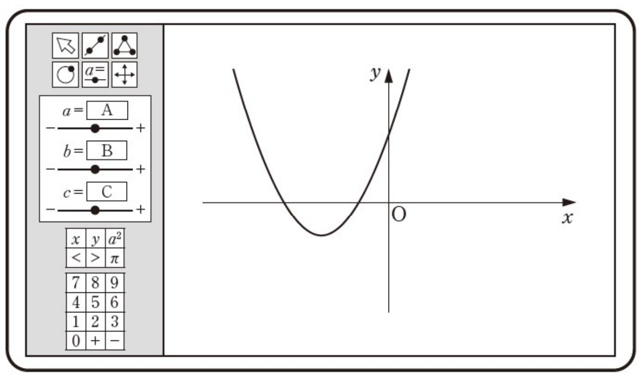
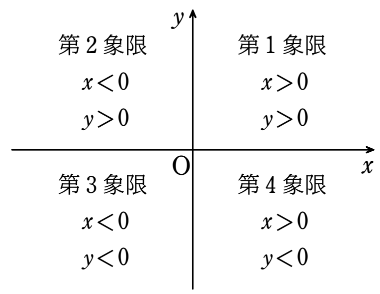


図 1

また，座標平面は x 軸，y 軸によって四つの部分に分けられる。これらの各部分を「象限」といい，右の図のように，それぞれを「第 1 象限」「第 2 象限」「第 3 象限」「第 4 象限」という。ただし，座標軸上の点は，どの象限にも属さないものとする。
このとき，次の問いに答えよ。



(1)　はじめに，図 1 の画面のように，頂点が第 3 象限にあるグラフが表示された。このときの a，b，c の値の組合せとして最も適当なものを，右の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。$\boxed{\text{ア}}$

	a	b	c
⓪	2	1	3
①	2	-1	3
②	-2	3	-3
③	$\frac{1}{2}$	3	3
④	$\frac{1}{2}$	-3	3
⑤	$-\frac{1}{2}$	3	-3

(2)　次に，a，b の値を (1) の値のまま変えずに，c の値だけを変化させた。このときの頂点の移動について正しく述べたものを，次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。$\boxed{\text{イ}}$

⓪　最初の位置から移動しない。　　①　x 軸方向に移動する。

②　y 軸方向に移動する。　　③　原点を中心として回転移動する。

(3)　また，b，c の値を (1) の値のまま変えずに，a の値だけをグラフが下に凸の状態を維持するように変化させた。このとき，頂点は，$a=\dfrac{b^2}{4c}$ のときは $\boxed{\text{ウ}}$ にあり，それ以外のときは $\boxed{\text{エ}}$ を移動した。$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑧ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　原点　　①　x 軸上　　②　y 軸上

③　第 3 象限のみ　　④　第 1 象限と第 3 象限

⑤　第 2 象限と第 3 象限　　⑥　第 3 象限と第 4 象限

⑦　第 2 象限と第 3 象限と第 4 象限　　⑧　すべての象限

$\boxed{7}$

太郎さんと花子さんは次の問題について話し合っている。

> 問題　実数を係数とする x についての 3 つの 2 次方程式①，②，③がある。
> $x^2-ax-2a^2=0$ ……①，$x^2-2ax-a+2=0$ ……②，$x^2+4x-2a=0$ ……③
> [1]　2 つの 2 次方程式①，②が共通な実数解をもつように a の値を定め，そのときの共通解を求めよ。
> [2]　2 つの 2 次方程式②，③が共通な実数解をもつように a の値を定め，そのときの共通解を求めよ。

二人の会話を読み，次の問いに答えよ。

太郎：[1] と [2] はともに，2 つの 2 次方程式に共通な解を考える問題だね。共通解は，両方の方程式をともに満たす解のことだよね。だから，どちらかの解が具体的に求められれば，それを他方に代入して成り立てばよいことから，簡単に求まりそうだよ。

花子：そうね。その考え方で [1] を解いてみて。

太郎：①の左辺を因数分解することによって，①の解は

$x=\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$

だとわかるよ。これをそれぞれ②に代入して，条件を満たすような a の値を求めると $a=\boxed{\text{ウ}}$ で，そのときの共通な実数解は $x=\boxed{\text{エ}}$ だね。

花子：[1] と同じ方針で，[2] も解けるかな。

太郎：②と③の方程式はどちらも因数分解で解くのは難しそうだから，2 次方程式の解の公式を使うしかなさそうだね。③の解は，解の公式から

$x=\boxed{\text{オカ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{キ}}a+\boxed{\text{ク}}}$ と求まるから，これを②に代入して成り立てばよいことになるね。でも，代入してみると，とても煩雑な a についての方程式になってしまい，解けそうもないから，[1] と同じ方針では無理だね。他にいい方法はないかな。

花子：そういえば，この間の授業で先生が「共通解の問題は，共通解を x 以外の文字でおいて連立方程式を解く方針で」と話していたわ。

太郎：じゃあ，共通解を k とおくと，②，③に代入して

$k^2-2ak-a+2=0$ ……②$'$，$k^2+4k-2a=0$ ……③$'$

としようか。この②$'$，③$'$ の連立方程式はどうやって解けばいいかな。

花子：③$'$ から a を k で表して②$'$ に代入すれば a が消去できて k だけの方程式にできそうだけど，次数が高くなってしまいそうだから，②$'$，③$'$ から最高次の k^2 の項を消去してみたらどうかしら。

太郎：なるほど，③$'$−②$'$ を考えて計算すると，

$a=\boxed{\text{ケ}}$　または　$k=\boxed{\text{コ}}$

と求められたよ。後は，場合分けして考えればいいね。

$a=\boxed{\text{ケ}}$ のとき，②，③は同じ方程式になって，共通解は $k=\boxed{\text{サ}}$

$k=\boxed{\text{コ}}$ のとき，③$'$ から $a=\boxed{\text{シ}}$ となり，このとき

②の解は $x=\boxed{\text{コ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$　　③の解は $x=\boxed{\text{コ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}}$

となるから適することがわかるね。

以上から，求める a の値と共通な解 k との組 $(a,\ k)$ は

$(a,\ k)=\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{サ}}\right)$，$\left(\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{コ}}\right)$

と求めることができたよ。

花子：なるほどね。同じ共通解の問題でもいろいろな解き方があることがわかったわ。

(1)　$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

⓪ -2　① 2　② $-a$　③ a　④ $-2a$
⑤ $2a$　⑥ $-\sqrt{2}\,a$　⑦ $\sqrt{2}\,a$　⑧ $-a^2$　⑨ a^2

(2)　$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4
⑤ 5　⑥ -4　⑦ -3　⑧ -2　⑨ -1

(3)　$\boxed{\text{オカ}}$，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまる数をそれぞれ答えよ。

(4)　$\boxed{\text{ケ}}$～$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① 1　② 2　③ $\dfrac{5}{8}$　④ $\dfrac{9}{8}$
⑤ $-\dfrac{1}{2}$　⑥ -1　⑦ -2　⑧ $-\dfrac{5}{8}$　⑨ $-\dfrac{9}{8}$

(5)　$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソタ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまる数をそれぞれ答えよ。

$\boxed{8}$

a，b を定数として 2 次関数 $y=-x^2+(2a+4)x+b$ ……① について考える。関数①のグラフ G の頂点の座標は $\left(a+\boxed{\text{ア}},\ a^2+\boxed{\text{イ}}a+b+\boxed{\text{ウ}}\right)$ である。

以下，この頂点が直線 $y=-4x-1$ 上にあるとする。このとき，

$b=-a^2-\boxed{\text{エ}}a-\boxed{\text{オカ}}$ である。

(1)　グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は $a<\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

また，G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わるような a の値の範囲は

$-\boxed{\text{コ}}-\sqrt{\boxed{\text{サ}}}<a<-\boxed{\text{コ}}+\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ である。

(2)　関数①の $0\leqq x\leqq 4$ における最小値が -22 となるのは $a=\boxed{\text{シス}}$ または $a=\boxed{\text{セ}}$ のときである。また，$a=\boxed{\text{セ}}$ のとき，関数①の $0\leqq x\leqq 4$ における最大値は $\boxed{\text{ソタチ}}$ である。一方，$a=\boxed{\text{シス}}$ のときの①のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ツ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{テトナ}}$ だけ平行移動すると，$a=\boxed{\text{セ}}$ のときのグラフと一致する。

$\boxed{9}$

座標平面上にある点 P は，点 A $(-8,\ 8)$ から出発して，直線 $y=-x$ 上を x 座標が 1 秒あたり 2 増加するように一定の速さで動く。また，同じ座標平面上にある点 Q は，点 P が A を出発すると同時に原点 O から出発して，直線 $y=10x$ 上を x 座標が 1 秒あたり 1 増加するように一定の速さで動く。出発してから t 秒後の 2 点 P，Q を考える。

点 P が O に到達するのは $t=\boxed{\text{ア}}$ のときである。以下，$0<t<\boxed{\text{ア}}$ で考える。

点 P と x 座標が等しい x 軸上の点を P$'$，点 Q と x 座標が等しい x 軸上の点を Q$'$ とおく。

△OPP$'$ と △OQQ$'$ の面積の和 S を t で表せば，$S=\boxed{\text{イ}}t^2-\boxed{\text{ウエ}}t+\boxed{\text{オカ}}$ となる。

これより $0<t<\boxed{\text{ア}}$ においては，$t=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で S は最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ をとる。次に，

a を $0<a<\boxed{\text{ア}}-1$ を満たす定数とする。以下，$a\leqq t\leqq a+1$ における S の最小・最大について考える。

(1)　S が $t=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で最小となるような a の値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\leqq a\leqq\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(2)　S が $t=a$ で最大となるような a の値の範囲は $0<a\leqq\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

$\boxed{10}$

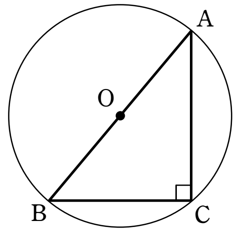
x の 2 次関数 $y=x^2+2px+3p^2-4p-6$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるときの実数 p の値の範囲は $\boxed{\text{アイ}}<p<\boxed{\text{ウ}}$ である。また，このグラフが x 軸から切り取る線分の長さが 4 となるとき，$p=\boxed{\text{エ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

$\boxed{11}$

三角形 ABC の外接円を O とし，円 O の半径を R とする。辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，∠CAB，∠ABC，∠BCA の大きさをそれぞれ A，B，C とする。太郎さんと花子さんは三角形 ABC について

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \qquad \cdots\cdots (*)$$

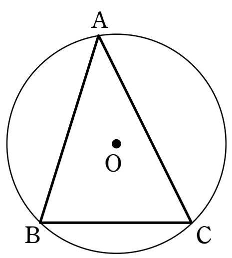
の関係が成り立つことを知り，その理由について，まず直角三角形の場合を次のように考察した。

> $C=90^\circ$ のとき，円周角の定理より，線分 AB は円 O の直径である。
> よって，
> $$\sin A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{a}{2R}$$
> であるから，
> $$\frac{a}{\sin A}=2R$$
> となる。
> 同様にして，
> $$\frac{b}{\sin B}=2R$$
> である。
> また，$\sin C=1$ なので，
> $$\frac{c}{\sin C}=\mathrm{AB}=2R$$
> である。
> よって，$C=90^\circ$ のとき $(*)$ の関係が成り立つ。
>
> 
>

次に，太郎さんと花子さんは，三角形 ABC が鋭角三角形や鈍角三角形のときにも $(*)$ の関係が成り立つことを証明しようとしている。

(1) 三角形 ABC が鋭角三角形の場合についても $(*)$ の関係が成り立つことは，直角三角形の場合に $(*)$ の関係が成り立つことをもとにして，次のような太郎さんの構想により証明できる。

太郎さんの証明の構想

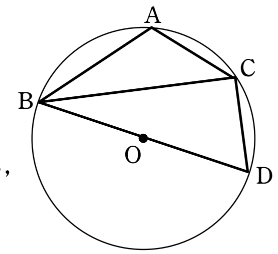
> 点 A を含む弧 BC 上に点 A′ をとると，
> 円周角の定理より
> ∠CAB＝∠CA′B
> が成り立つ。
> 特に，$\boxed{\text{ア}}$ を点 A′ とし，三角形 A′BC に対して $C=90^\circ$ の場合の考察の結果を利用すれば，
> $$\frac{a}{\sin A}=2R$$
> が成り立つことを証明できる。
> $\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$ についても同様に証明できる。
>
> 
>

$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる最も適当なものを，次の ⓪～④ のうちから一つ選べ。

⓪ 点 B から辺 AC に下ろした垂線と，円 O との交点のうち点 B と異なる点
① 直線 BO と円 O との交点のうち点 B と異なる点
② 点 B を中心とし点 C を通る円と，円 O との交点のうち点 C と異なる点
③ 点 O を通り辺 BC に平行な直線と，円 O との交点のうちの一つ
④ 辺 BC と直交する円 O の直径と，円 O との交点のうちの一つ

(2) 三角形 ABC が $A>90^\circ$ である鈍角三角形の場合についても $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立つことは，次のような花子さんの構想により証明できる。

花子さんの証明の構想

> 右図のように，線分 BD が円 O の直径となるように点 D をとると，三角形 BCD において
> $$\sin \boxed{\text{イ}}=\frac{a}{2R}$$
> である。
> このとき，四角形 ABDC は円 O に内接するから，
> ∠CAB＝$\boxed{\text{ウ}}$
> であり，
> $\sin$∠CAB＝$\sin\left(\boxed{\text{ウ}}\right)=\sin\boxed{\text{イ}}$
> となることを用いる。
>
> 
>

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の各解答群のうちから一つずつ選べ。

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ ∠ABC　① ∠ABD　② ∠ACB　③ ∠ACD
④ ∠BCD　⑤ ∠BDC　⑥ ∠CBD

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ 90°＋∠ABC　① 180°－∠ABC
② 90°＋∠ACB　③ 180°－∠ACB
④ 90°＋∠BDC　⑤ 180°－∠BDC
⑥ 90°＋∠ABD　⑦ 180°－∠CBD

$\boxed{12}$

∠ACB＝90° である直角三角形 ABC と，その辺上を移動する 3 点 P，Q，R がある。点 P，Q，R は，次の規則に従って移動する。

> ・最初，点 P，Q，R はそれぞれ点 A，B，C の位置にあり，点 P，Q，R は同時刻に移動を開始する。
> ・点 P は辺 AC 上を，点 Q は辺 BA 上を，点 R は辺 CB 上を，それぞれ向きを変えることなく，一定の速さで移動する。ただし，点 P は毎秒 1 の速さで移動する。
> ・点 P，Q，R は，それぞれ点 C，A，B の位置に同時刻に到達し，移動を終了する。

次の問いに答えよ。

(1) 図 1 の直角三角形 ABC を考える。

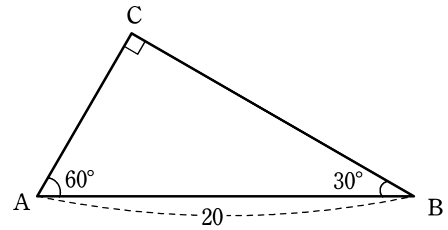


図 1

(i) 各点が移動を開始してから 2 秒後の線分 PQ の長さと三角形 APQ の面積 S を求めよ。

PQ＝$\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$，$S=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$

(ii) 各点が移動する間の線分 PR の長さとして，次の 5 つの値はどのような値であるか。$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ② から一つずつ選べ。ただし，移動には出発点と到達点も含まれるものとし，同じものを繰り返し選んでもよい。

$5\sqrt{2}$ は $\boxed{\text{カ}}$ 値である。
$5\sqrt{3}$ は $\boxed{\text{キ}}$ 値である。
$4\sqrt{5}$ は $\boxed{\text{ク}}$ 値である。
10　は $\boxed{\text{ケ}}$ 値である。
$10\sqrt{3}$ は $\boxed{\text{コ}}$ 値である。

⓪ とり得ない　① 一回だけとり得る　② 二回だけとり得る

(iii) 各点が移動する間における三角形 APQ，三角形 BQR，三角形 CRP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする。各時刻における S_1，S_2，S_3 の間の大小関係について，時刻によらず $\boxed{\text{サ}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪～⑥ から一つ選べ。

⓪ $S_1>S_2>S_3$　① $S_2>S_3>S_1$　② $S_3>S_1>S_2$
③ $S_1>S_2$ かつ $S_2=S_3$　④ $S_2>S_3$ かつ $S_3=S_1$
⑤ $S_3>S_1$ かつ $S_1=S_2$　⑥ $S_1=S_2=S_3$

(2) 直角三角形 ABC の辺の長さを右の図 2 のように変えたとき，三角形 PQR の面積が 12 となるのは，各点が移動を開始してから何秒後かを求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{シス}}\pm\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}\ \text{秒後}$$

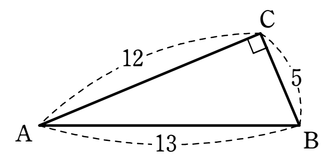
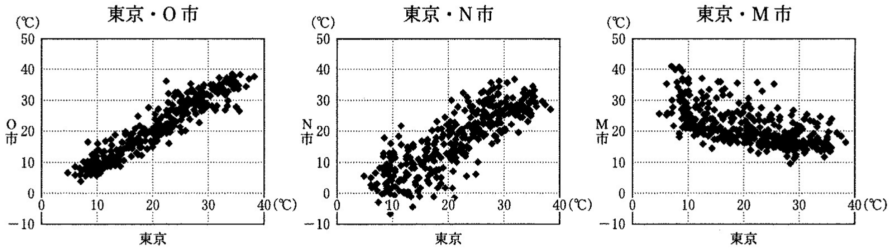


図 2

13

世界4都市(東京，O市，N市，M市)の2013年の365日の各日の最高気温のデータについて考える。

(1) 次の3つの散布図は，東京，O市，N市，M市の2013年の365日の各日の最高気温のデータをまとめたものである。それぞれ，O市，N市，M市の最高気温を縦軸にとり，東京の最高気温を横軸にとってある。



出典：『過去の気象データ』(気象庁 Web ページ)などにより作成

次の ア ， イ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ④ のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

これらの散布図から読み取れることとして正しいものは， ア と イ である。

⓪ 東京とN市，東京とM市の最高気温の間にはそれぞれ正の相関がある。

① 東京とN市の最高気温の間には正の相関，東京とM市の最高気温の間には負の相関がある。

② 東京とN市の最高気温の間には負の相関，東京とM市の最高気温の間には正の相関がある。

③ 東京とO市の最高気温の間の相関の方が，東京とN市の最高気温の間の相関より強い。

④ 東京とO市の最高気温の間の相関の方が，東京とN市の最高気温の間の相関より弱い。

(2) 次の ウ ， エ ， オ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ⑨ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

N市では温度の単位として摂氏(℃)のほかに華氏(°F)も使われている。華氏(°F)での温度は，摂氏(℃)での温度を $\frac{9}{5}$ 倍し，32を加えると得られる。例えば，摂氏10℃は，$\frac{9}{5}$ 倍し，32を加えることで華氏50°Fとなる。

したがって，N市の最高気温について，摂氏での分散を X，華氏での分散を Y とすると，$\frac{Y}{X}$ は ウ になる。

東京(摂氏)とN市(摂氏)の共分散を Z，東京(摂氏)とN市(華氏)の共分散を W とすると，$\frac{W}{Z}$ は エ になる(ただし，共分散は2つの変量のそれぞれの偏差の積の平均値)。

東京(摂氏)とN市(摂氏)の相関係数を U，東京(摂氏)とN市(華氏)の相関係数を V とすると，$\frac{V}{U}$ は オ になる。

⓪ $-\frac{81}{25}$　① $-\frac{9}{5}$　② -1　③ $-\frac{5}{9}$　④ $-\frac{25}{81}$

⑤ $\frac{25}{81}$　⑥ $\frac{5}{9}$　⑦ 1　⑧ $\frac{9}{5}$　⑨ $\frac{81}{25}$

14

地方の経済活性化のため，太郎さんと花子さんは観光客の消費に着目し，その拡大に向けて基礎的な情報を整理することにした。以下は，都道府県別の統計データを集め，分析しているときの二人の会話である。会話を読んで次の問いに答えよ。ただし，東京都，大阪府，福井県の3都府県のデータは含まれていない。また，以後の問題文では「道府県」を単に「県」として表記する。

太郎：各県を訪れた観光客数を x 軸，消費総額を y 軸にとり，散布図をつくると図1のようになったよ。

花子：消費総額を観光客数で割った消費額単価が最も高いのはどこかな。

太郎：元のデータを使って県ごとに割り算をすれば分かるよ。

　　　北海道は……。44回も計算するのは大変だし，間違えそうだな。

花子：図1を使えばすぐ分かるよ。

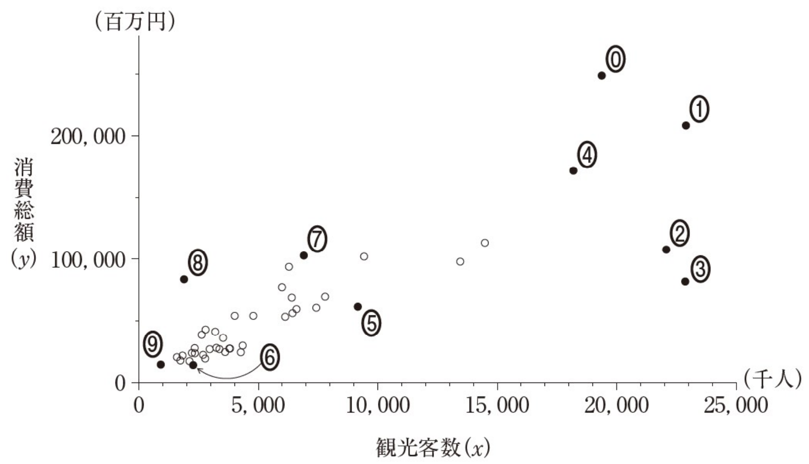


図1

(1) 図1の観光客数と消費総額の間の相関係数に最も近い値を，次の⓪～④のうちから一つ選べ。 ア

⓪ −0.85　① −0.52　② 0.02　③ 0.34　④ 0.83

(2) 44県それぞれの消費額単価を計算しなくても，図1の散布図から消費額単価が最も高い県を表す点を特定することができる。その方法を述べたものとして正しいものを，次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。 イ

⓪ 各県の表す点のうち，その点と原点を通る直線の傾きが最も大きい点を選ぶ。

① 各県の表す点のうち，その点と原点を通る直線の傾きが最も小さい点を選ぶ。

② 各県の表す点のうち，その点と原点を結ぶ線分の長さが最も大きい点を選ぶ。

③ 各県の表す点のうち，その点と原点を結ぶ線分の長さが最も小さい点を選ぶ。

(3) 消費額単価が最も高い県を表す点を，図1の⓪～⑨のうちから一つ選べ。 ウ

花子：元のデータを見ると消費額単価が最も高いのは沖縄県だね。沖縄県の消費額単価が高いのは，県外からの観光客数の影響かな。

太郎：県内からの観光客と県外からの観光客とに分けて44県の観光客数と消費総額を箱ひげ図で表すと図2のようになったよ。

花子：私は県内と県外からの観光客の消費額単価をそれぞれ横軸と縦軸 にとって図3の散布図をつくってみたよ。沖縄県は県内，県外ともに観光客の消費額単価は高いね。それに，北海道，鹿児島県，沖縄県は全体の傾向から外れているみたい。

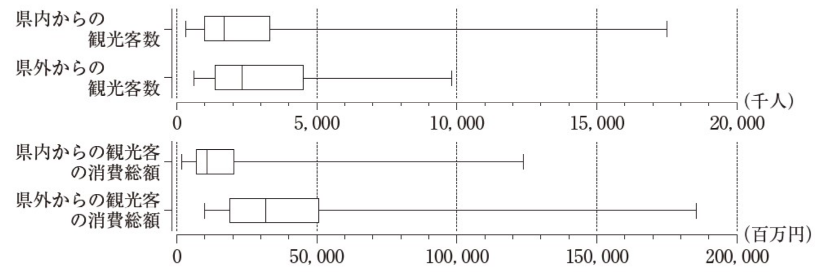


図2

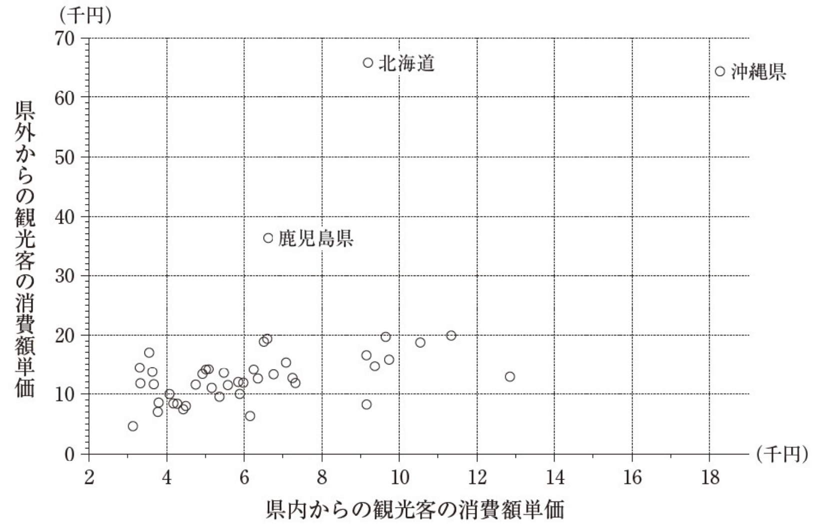


図3

(4) 図2，図3から読み取れる事柄として正しいものを，次の⓪～④のうちから二つ選べ。ただし，解答の順序は問わない。 エ ， オ

⓪ 44県の半分の県では，県内からの観光客数よりも県外からの観光客数の方が多い。

① 44県の半分の県では，県内からの観光客の消費総額よりも県外からの観光客の消費総額の方が高い。

② 44県の4分の3以上の県では，県外からの観光客の消費額単価の方が県内からの観光客の消費額単価より高い。

③ 県外からの観光客の消費額単価の平均値は，北海道，鹿児島県，沖縄県を除いた41県の平均値の方が44県の平均値より小さい。

④ 北海道，鹿児島県，沖縄県を除いて考えると，県内からの観光客の消費額単価の分散よりも県外からの観光客の消費額単価の分散の方が小さい。

15

2つの変量 x，y のデータの組を $(x,\ y)$，それぞれの標準偏差を s_x，s_y，共分散を s_{xy}，相関係数を r とするとき，次の各問に答えよ。

(1)　r を s_x，s_y，s_{xy} で表すと $r=\boxed{\text{ア}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ $s_x s_y s_{xy}$　① $\dfrac{1}{s_x s_y s_{xy}}$　② $\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$　③ $\dfrac{s_x s_y}{s_{xy}}$

④ $\dfrac{s_x}{s_y s_{xy}}$　⑤ $\dfrac{s_y s_{xy}}{s_x}$　⑥ $\dfrac{s_y}{s_x s_{xy}}$　⑦ $\dfrac{s_x s_{xy}}{s_y}$

(2)　データの組を散布図に表したとき，相関係数の値は散布図の点が $\boxed{\text{イ}}$ 程度を表している。$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ x 軸に関して対称に分布する

① 変量 x，y のそれぞれの中央値を表す点の近くに分布する

② 変量 x，y のそれぞれの平均値を表す点の近くに分布する

③ 円周に沿って分布する

④ 直線に沿って分布する

(3)　データの組の個数が2で，$(x,\ y)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ のとき，$r=\boxed{\text{ウ}}$ である。

$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つ選べ。

⓪ -1.50　① -1.00　② -0.50　③ -0.25　④ 0.00

⑤ 0.25　⑥ 0.50　⑦ 1.00　⑧ 1.50　⑨ 2.00

(4)　データの組の個数が2で，$(x,\ y)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ のとき，相関係数 r は計算できない。その理由として最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。$\boxed{\text{エ}}$

⓪ データの組の個数が2個しかないから。

① 変量 x の平均値と変量 y の平均値が異なるから。

② 変量 x の標準偏差の値と変量 y の標準偏差の値が異なるから。

③ 変量 y の標準偏差の値が0であるから。

(5)　データの組の個数が2のときは，相関係数の値は $\boxed{\text{オ}}$ か $\boxed{\text{カ}}$，または計算できない場合の3通りしかない。$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑨のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

⓪ -1.50　① -1.00　② -0.50　③ -0.25　④ 0.00

⑤ 0.25　⑥ 0.50　⑦ 1.00　⑧ 1.50　⑨ 2.00

(6)　データの組の個数が2のとき，相関係数の値が3通りに限られる理由として最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。$\boxed{\text{キ}}$

⓪ 変量 x の中央値と平均値が一致する。

① 変量 x の四分位数を考えることができない。

② 変量 x，y のそれぞれの平均値を表す点からの距離が等しい。

③ 平面上の異なる2点は必ずある直線上にある。

④ 平面上の異なる2点を通る円はただ1つに決まらない。

(7)　データの組の個数が3のとき，相関係数の値が1.00になるものを次の⓪～⑦のうちから三つ選べ。ただし，解答の順序は問わない。$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$

⓪ $(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 3)$　① $(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$

② $(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(2,\ 2)$　③ $(1,\ 1)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 1)$

④ $(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$　⑤ $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 5)$

⑥ $(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(2,\ 3)$　⑦ $(1,\ 2)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 2)$

(8)　相関係数の値についての記述として誤っているものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。$\boxed{\text{サ}}$

⓪ データの組の個数が2のときには相関係数の値が0.00になることはない。

① データの組の個数が3のときには相関係数の値が -1.00 になることがある。

② データの組の個数が4のときには相関係数の値が1.00となることはない。

③ データの組の個数が50であり，1個の組が $(x,\ y)=(1,\ 1)$，残りの49個の組が $(x,\ y)=(2,\ 0)$ のときは相関係数の値は -1.00 である。

④ データの組の個数が100であり，50個の組が $(x,\ y)=(1,\ 1)$，残りの50個の組が $(x,\ y)=(2,\ 2)$ のときは相関係数の値は1.00である。

16

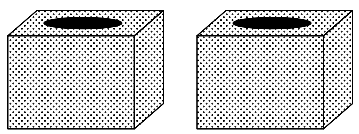
白いボールが3個，黒いボールが1個入っている箱がある。この箱の中から1個のボールを取り出し，ボールの色を確認した後，ボールを箱に戻すという試行を4回行う。白いボールが取り出された回数を m とし，整数 n を次のように定義する。

- 白いボールが全く取り出されなかった場合は，$n=0$ とする。
- 白いボールは取り出されたが，2回以上連続して白いボールが取り出されなかった場合は，$n=1$ とする。
- 白いボールが2回以上連続して取り出された場合は，白いボールが連続して取り出された回数の最大値を n とする。

(1)　$m=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$　　(2)　$n=1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キクケ}}}$

17

くじが100本ずつ入った2つの箱A，Bがある。箱Aに入っている当たりくじの本数は10本である。これらの箱からS，Tの2人が順にどちらかの箱を選んで1本ずつくじを引く。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。また，S，Tの2人は，最初にそれぞれの箱に入っている当たりくじの本数は知っているが，箱A，Bの区別はつかないものとする。



今，Sが一方の箱からくじを1本引いたところ，当たりくじであったとする。

Tが当たりくじを引く確率を大きくするためには，Sが引いた箱と同じ箱，異なる箱のどちらを選ぶべきかを考察しよう。

Sがくじを引いた箱がAである事象を A，Bである事象を B とし，Sが箱A，Bを選ぶ確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とする。また，Sが当たりくじを引く事象を W とする。

太郎さんは，箱A，箱Bに入っている当たりくじの本数によって，Tが当たりくじを引く確率がどのようになるかを調べている。

(1)　箱Bに当たりくじが5本入っている場合を考える。

太郎さんは，Sが当たりくじを引いたから，その箱が箱Aである可能性が高いのでは，と考えた。その場合，箱Aには当たりくじが9本残っているから，Tは，Sと同じ箱からくじを引いた方がよいだろうと判断し，次のように計算して確かめた。Sが引いた箱が箱Aで，かつ当たりくじを引く確率は，$P(A\cap W)=P(A)\cdot P_A(W)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。一方で，Sが当たりくじを引く事象 W は，箱Aから当たりくじを引くか箱Bから当たりくじを引くかのいずれかであるので，その確率は，$P(W)=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。よって，Sが当たりくじを引いたという条件のもとで，その箱が箱Aであるという条件付き確率 $P_W(A)$ は，$P_W(A)=\dfrac{P(A\cap W)}{P(W)}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ と求められる。

また，Sが当たりくじを引いた後，同じ箱からTがくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は，$P_W(A)\times\dfrac{9}{99}+P_W(B)\times\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{99}=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

それに対して，Sが当たりくじを引いた後，異なる箱からTがくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は，$\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

この考察により，TはSと同じ箱から引く方がよいことを確かめることができたが，思っていたよりも確率に差がないことに疑問をもった。そこで，箱Bに入っている当たりくじの本数がもう少し多い場合にどうなるか，次のように考察した。

(2)　箱Bに当たりくじが7本入っている場合を考える。

Sが当たりくじを引いた後，同じ箱からTがくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。それに対して，異なる箱からTがくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は $\dfrac{7}{85}$ である。

この考察により，箱Bに入っている当たりくじの本数が，箱Aに入っている当たりくじの本数より少ないときでも，異なる箱から引く方が当たりくじを引く確率が大きくなる場合があることがわかった。太郎さんは，10本の当たりくじが入っている箱Aに対し，箱Bに入っている当たりくじが何本であれば同じ箱から引く方がよいか，さらに調べることにした。

(3)　Sが当たりくじを引いたとき，Tが当たりくじを引く確率を大きくするためには，Sが引いた箱と同じ箱，異なる箱のどちらを選ぶべきか。箱Bに入っている当たりくじの本数が4本，5本，6本，7本のそれぞれの場合において選ぶべき箱の組み合わせとして正しいものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。$\boxed{\text{テ}}$

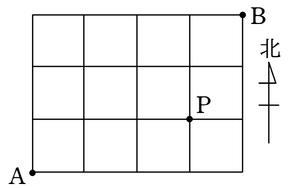
	箱Bに入っている当たりくじの本数			
	4本	5本	6本	7本
⓪	同じ箱	同じ箱	同じ箱	同じ箱
①	同じ箱	同じ箱	同じ箱	異なる箱
②	同じ箱	同じ箱	異なる箱	異なる箱
③	同じ箱	異なる箱	異なる箱	異なる箱
④	異なる箱	異なる箱	異なる箱	異なる箱

18

次の三人の会話を読み，問いに答えよ。

先生：今日は，経路の数と確率の次の問題について考えてみましょう。

問題　右の図のように，東西に4本，南北に5本の道路がある。A地点から出発した人が最短の道順を通ってB地点に向かう。ただし，各交差点で，東に行くか，北へ行くかは等確率であるとし，一方しか行けないときは確率1でその方向に行くものとする。



[1]　A地点からB地点に行く経路の総数は何通りあるか。
[2]　A地点からP地点を経由してB地点に行く経路は何通りあるか。
[3]　A地点からP地点を経由してB地点に行く確率を求めよ。

花子：[1]は，北へ1区画進むことを↑，東へ1区画進むことを→で表すことにして，その並び方の総数を考えればよいと授業で習ったよ。

太郎：そうだね。その考えで求めると経路の総数は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りだね。

花子：続いて[2]は，A地点からP地点に行く経路が $\boxed{\text{ウ}}$ 通りあって，P地点からB地点に行く経路が $\boxed{\text{エ}}$ 通りあるから，A地点からP地点を経由してB地点に行く経路は $\boxed{\text{オカ}}$ 通りとなるよ。

太郎：[3]の確率は，$\dfrac{\text{(その事象の起こる場合の数)}}{\text{(すべての場合の数)}}$ から $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{アイ}}}$ で簡単に求まるよ。

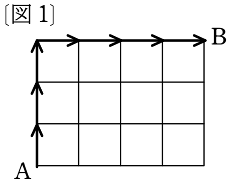
先生：[3]は本当にそれでよいですか。

花子：ちょっと待って。確率を求めるときに，分母の(すべての場合の数)が同様に確からしいことを確認する必要があったよね。
[1]で求めた経路の総数の1つ1つは同様に確からしいのかな。例えば，

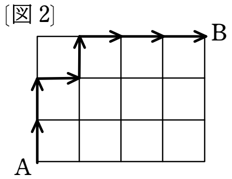
図1の経路をとる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\boxed{\text{キ}}}$ だけど，

図2の経路をとる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\boxed{\text{ク}}}$ となるよ。

[図1]



[図2]



太郎：なるほど。確かにそうだね。ということは，A地点からP地点に行く確率は $\boxed{\text{ケ}}$，P地点からB地点に行く確率は $\boxed{\text{コ}}$ だから求める[3]の確率は $\boxed{\text{サ}}$ となるね。

先生：よく考えましたね。確率を求めるときには，「1つ1つの事象が同様に確からしい」ことをつねに確認することが大切です。

(1)　$\boxed{\text{アイ}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまる数値を記入せよ。

(2)　$\boxed{\text{ケ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，下の ⓪ ～ ⑨ のうちから一つずつ選べ。
ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $\dfrac{12}{35}$　① $\dfrac{4}{35}$　② $\dfrac{1}{32}$　③ $\dfrac{1}{16}$　④ $\dfrac{3}{8}$

⑤ $\dfrac{1}{8}$　⑥ $\dfrac{3}{4}$　⑦ $\dfrac{1}{4}$　⑧ $\dfrac{1}{2}$　⑨ 1

19

長さ6の線分BCを1：5に内分する点Dをとり，Dを通りBCに直交する直線上に点AをAD＝$2\sqrt{6}$ となるようにとる。

このとき，AB＝$\boxed{\text{ア}}$，AC＝$\boxed{\text{イ}}$ であるから，△ABCの内接円の半径は

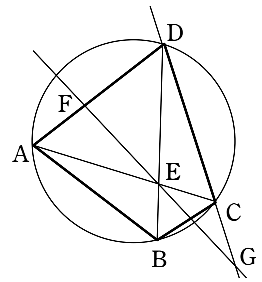
$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

内接円が辺BC，ACに接する点をE，Fとすると，CE＝CF＝$\boxed{\text{カ}}$ であるから，内心Oと頂点Cとの距離は CO＝$\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

△CEFの内心と△ABCの内心の間の距離は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

20

四角形ABCDにおいて，AB＝4，BC＝2，DA＝DCであり，4つの頂点A，B，C，Dは同一円周上にある。対角線ACと対角線BDの交点をE，線分ADを2：3の比に内分する点をF，直線FEと直線DCの交点をGとする。



参考図

次の $\boxed{\text{ア}}$ には，下の ⓪ ～ ④ のうちから当てはまるものを一つ選べ。

∠ABCの大きさが変化するとき四角形ABCDの外接円の大きさも変化することに注意すると，∠ABCの大きさがいくらであっても，∠DACと大きさが等しい角は，∠DCAと∠DBCと $\boxed{\text{ア}}$ である。

⓪　∠ABD　　①　∠ACB　　②　∠ADB
③　∠BCG　　④　∠BEG

このことより $\dfrac{\text{EC}}{\text{AE}}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

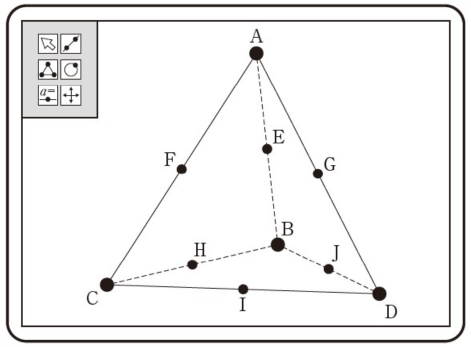
次に，△ACDと直線FEに着目すると，$\dfrac{\text{GC}}{\text{DG}}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(1)　直線ABが点Gを通る場合について考える。
このとき，△AGDの辺AG上に点Bがあるので，BG＝$\boxed{\text{カ}}$ である。
また，直線ABと直線DCが点Gで交わり，4点A，B，C，Dは同一円周上にあるので，DC＝$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(2)　四角形ABCDの外接円の直径が最小となる場合について考える。
このとき，四角形ABCDの外接円の直径は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，∠BAC＝$\boxed{\text{コサ}}$° である。
また，直線FEと直線ABの交点をHとするとき，$\dfrac{\text{GC}}{\text{DG}}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ の関係に着目してAHを求めると，AH＝$\boxed{\text{シ}}$ である。

21

花子さんと太郎さんは，正四面体 ABCD の各辺の中点を次の図のように E，F，G，H，I，J としたときに成り立つ性質について，コンピュータソフトを使いながら，下のように話している。二人の会話を読んで，下の問いに答えよ。



花子：四角形 FHJG は平行四辺形に見えるけれど，正方形ではないかな。
太郎：4 辺の長さが等しいことは，簡単に証明できそうだよ。

(1) 太郎さんは四角形 FHJG の 4 辺の長さが等しいことを，次のように証明した。

太郎さんの証明

$\boxed{\text{ア}}$ により，四角形 FHJG の各辺の長さはいずれも正四面体 ABCD の 1 辺の長さの $\boxed{\text{イ}}$ 倍であるから，4 辺の長さが等しくなる。

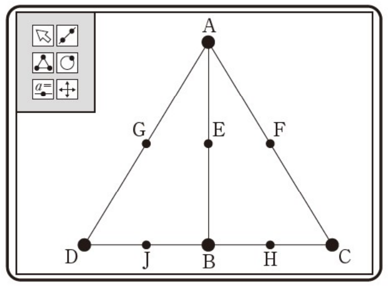
(i) $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

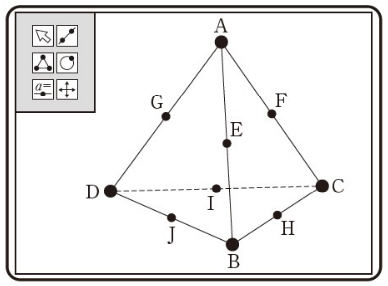
⓪ 中線定理　① 方べきの定理　② 三平方の定理
③ 中点連結定理　④ 円周角の定理

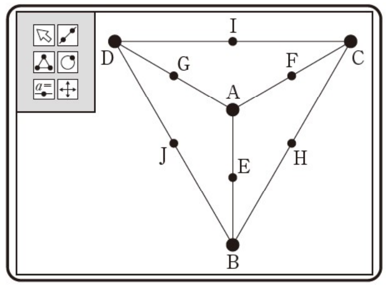
(ii) $\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ 2　① $\frac{3}{4}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{3}$

(2) 花子さんは，太郎さんの考えをもとに，正四面体をいろいろな方向から見て，四角形 FHJG が正方形であることの証明について，下のような構想をもとに，実際に証明した。







花子さんの構想

四角形において，4 辺の長さが等しいことは正方形であるための $\boxed{\text{ウ}}$ 。さらに，対角線 FJ と GH の長さが等しいことがいえれば，四角形 FHJG が正方形であることの証明となるので，△FJC と △GHD が合同であることを示したい。

しかし，この二つの三角形が合同であることの証明は難しいので，別の三角形の組に着目する。

花子さんの証明

点 F，点 G はそれぞれ AC，AD の中点なので，二つの三角形 $\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ に着目する。$\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ は 3 辺の長さがそれぞれ等しいので合同である。このとき，$\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ は $\boxed{\text{カ}}$ で，F と G はそれぞれ AC，AD の中点なので，FJ＝GH である。

よって，四角形 FHJG は，4 辺の長さが等しく対角線の長さが等しいので正方形である。

(i) $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 必要条件であるが十分条件でない
① 十分条件であるが必要条件でない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

(ii) $\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものが，次の⓪～⑤の中にある。当てはまるものを一つずつ選べ。ただし，$\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ の解答の順序は問わない。

⓪ △AGH　① △AIB　② △AJC
③ △AHD　④ △AHC　⑤ △AJD

(iii) $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 正三角形　① 二等辺三角形
② 直角三角形　③ 直角二等辺三角形

$\boxed{1}$

解答　(アイ)　-1　(ウ)　0　(エ)　1　(オカ)　-2　$\frac{\text{(キ)}}{\text{(ク)}}$　$\frac{2}{3}$　$\frac{\text{(ケ)}}{\text{(コ)}}$　$\frac{4}{5}$

$\boxed{2}$

解答　(ア)　④　(イ)　⑦

$\boxed{3}$

解答　(ア)　①　(イ)　①　(ウ)　⓪

$\boxed{4}$

解答　(ア)　③　(イ)　⓪　(ウ)　⑤　(エ)　④　(オ)　①　(カ)　③

$\boxed{5}$

解答　(ア)，(イ)　①，④　または　④，①

$\boxed{6}$

解答　(ア)　③　(イ)　②　(ウ)　①　(エ)　⑤

$\boxed{7}$

解答　(ア)，(イ)　②，⑤　または　⑤，②　(ウ)　②　(エ)　④　(オカ)　-2
(キ)　2　(ク)　4　(ケ)　⑦　(コ)　⓪　(サ)　⑦　(シ)　④
$\frac{\text{(ス)}}{\text{(セ)}}$　$\frac{7}{4}$　$\frac{\text{(ソタ)}}{\text{(チ)}}$　$\frac{-9}{2}$

$\boxed{8}$

解答　(ア)　2　(イ)　4　(ウ)　4　(エ)　8　(オカ)　13　$\frac{\text{(キク)}}{\text{(ケ)}}$　$\frac{-9}{4}$
$-\text{(コ)}-\sqrt{\text{(サ)}}$　$-4-\sqrt{3}$　(シス)　-3　(セ)　1　(ソタチ)　-13
(ツ)　4　(テトナ)　-16

$\boxed{9}$

解答　(ア)　4　(イ)　7　(ウエ)　16　(オカ)　32　$\frac{\text{(キ)}}{\text{(ク)}}$　$\frac{8}{7}$　$\frac{\text{(ケコサ)}}{\text{(シ)}}$　$\frac{160}{7}$
$\frac{\text{(ス)}}{\text{(セ)}}$　$\frac{1}{7}$　$\frac{\text{(ソ)}}{\text{(タ)}}$　$\frac{8}{7}$　$\frac{\text{(チ)}}{\text{(ツテ)}}$　$\frac{9}{14}$

$\boxed{10}$

解答　(アイ)　-1　(ウ)　3　$\text{(エ)}\pm\sqrt{\text{(オ)}}$　$1\pm\sqrt{2}$

$\boxed{11}$

解答　(ア)　①　(イ)　⑤　(ウ)　⑤

$\boxed{12}$

解答　$\text{(ア)}\sqrt{\text{(イウ)}}$　$2\sqrt{57}$　$\text{(エ)}\sqrt{\text{(オ)}}$　$8\sqrt{3}$　(カ)　⓪　(キ)　①　(ク)　②
(ケ)　②　(コ)　①　(サ)　⑥　$\frac{\text{(シス)}\pm\text{(セ)}\sqrt{\text{(ソ)}}}{\text{(タ)}}$　$\frac{30\pm6\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{13}$

解答　(ア)，(イ)　①，③　または　③，①　(ウ)　⑨　(エ)　⑧　(オ)　⑦

$\boxed{14}$

解答　(ア)　④　(イ)　⓪　(ウ)　⑧　(エ)，(オ)　②，③　または　③，②

$\boxed{15}$

解答　(ア)　②　(イ)　④　(ウ)　①　(エ)　③　(オ)，(カ)　①，⑦　(順不同)
(キ)　③　(ク)，(ケ)，(コ)　⓪，②，⑤　(順不同)　(サ)　②

$\boxed{16}$

解答　$\frac{\text{(アイ)}}{\text{(ウエ)}}$　$\frac{27}{64}$　$\frac{\text{(オカ)}}{\text{(キクケ)}}$　$\frac{39}{256}$

$\boxed{17}$

解答　$\frac{\text{(ア)}}{\text{(イウ)}}$　$\frac{1}{20}$　$\frac{\text{(エ)}}{\text{(オカ)}}$　$\frac{3}{40}$　$\frac{\text{(キ)}}{\text{(ク)}}$　$\frac{2}{3}$　(ケ)　4　$\frac{\text{(コ)}}{\text{(サシ)}}$　$\frac{2}{27}$
$\frac{\text{(ス)}}{\text{(セソ)}}$　$\frac{1}{15}$　$\frac{\text{(タ)}}{\text{(チツ)}}$　$\frac{4}{51}$　(テ)　①

$\boxed{18}$

解答　(アイ)　35　(ウ)　4　(エ)　3　(オカ)　12　(キ)　3　(ク)　4
(ケ)　⑦　(コ)　⑨　(サ)　⑦

$\boxed{19}$

解答　(ア)　5　(イ)　7　$\frac{\text{(ウ)}\sqrt{\text{(エ)}}}{\text{(オ)}}$　$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　(カ)　4　$\frac{\text{(キ)}\sqrt{\text{(クケ)}}}{\text{(コ)}}$　$\frac{2\sqrt{42}}{3}$
$\frac{\text{(サ)}\sqrt{\text{(シ)}}}{\text{(ス)}}$　$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\boxed{20}$

解答　(ア)　⓪　$\frac{\text{(イ)}}{\text{(ウ)}}$　$\frac{1}{2}$　$\frac{\text{(エ)}}{\text{(オ)}}$　$\frac{1}{3}$　(カ)　3　$\text{(キ)}\sqrt{\text{(ク)}}$　$2\sqrt{7}$　(ケ)　4
(コサ)　30　(シ)　2

$\boxed{21}$

解答　(ア)　③　(イ)　③　(ウ)　⓪　(エ)，(オ)　②，③　(順不同)
(カ)　①

$\boxed{1}$

(解説)

$3x-3 \leqq 2(2x-1)$ から　$3x-3 \leqq 4x-2$

すなわち　$-x \leqq 1$　よって　$x \geqq {}^{\text{アイ}}-1$

$|2x-1|>1$ から　$2x-1<-1$，$1<2x-1$

$2x-1<-1$ から　$2x<0$　よって　$x<0$

$1<2x-1$ から　$-2x<-2$　よって　$x>1$

ゆえに　$x<{}^{\text{ウ}}0$，${}^{\text{エ}}1<x$

$5(x+1)<-(x+7)$ から　$5x+5<-x-7$

すなわち　$6x<-12$　よって　$x<-2$

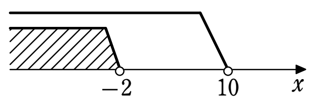
$2x+5>3x-5$ から　$-x>-10$　よって　$x<10$

$x<-2$ かつ $x<10$ から　$x<{}^{\text{オカ}}-2$

$2x-1<5x-3<1$ から　$2x-1<5x-3$　かつ　$5x-3<1$

$2x-1<5x-3$ から　$-3x<-2$　よって　$x>\frac{2}{3}$

$5x-3<1$ から　$5x<4$　よって　$x<\frac{4}{5}$



$x>\frac{2}{3}$　かつ　$x<\frac{4}{5}$ から　$\frac{{}^{\text{キ}}2}{{}^{\text{ク}}3}<x<\frac{{}^{\text{ケ}}4}{{}^{\text{コ}}5}$

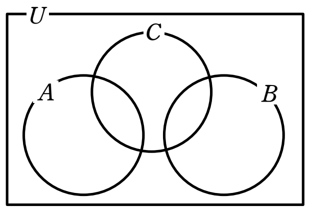
$\boxed{2}$

(解説)

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots\cdots,\ 29\}$

$B=\{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ \cdots\cdots,\ 28\}$

$C=\{2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27\}$



よって　$A\cap B=\varnothing$（ア ④），

$A\cap C\neq\varnothing$，$B\cap C\neq\varnothing$

したがって，A，B，C の関係を表す図は　イ ⑦

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　命題の逆は「n^2 が 24 の約数ならば $n=2$ である」である。反例は $n=1$

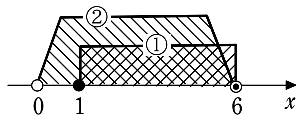
よって，偽である。ゆえに　ア ①

(2)　$1\leqq x\leqq 6$ ……① とする。

$|x-3|<3$ から　$-3<x-3<3$

各辺に 3 を加えて　$0<x<6$　……②

①，② を図示すると右のようになり，①⊂② とはならない（$x=6$ が反例となる）から，偽である。



よって　イ ①

(3)　「$x+y+z>0$ または $xyz>0$ ならば x，y，z のうち少なくとも 1 つは正である」の対偶は，「x，y，z すべてが 0 または負であるならば，$x+y+z\leqq 0$ かつ $xyz\leqq 0$」である。

これは明らかに真であるから，もとの命題も真である。よって　ウ ⓪

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　（i）　$\{0\}$ は，0 のみを要素にもつ集合である。

0 は有理数であるから，$\{0\}$ は集合 A の部分集合である。

すなわち　$A\supset\{0\}$（ア ③）

（ii）　$\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ であるから，$\sqrt{28}$ は無理数である。

よって，$\sqrt{28}$ は集合 B の要素であるから　$\sqrt{28}\in B$（イ ⓪）

（iii）（i）より，$\{0\}\subset A$ であるから　$A=\{0\}\cup A$（ウ ⑤）

（iv）　有理数であり，かつ無理数である数は存在しないから　$\varnothing=A\cap B$（エ ④）

(2)　命題「$p\Longrightarrow q$」は偽。(反例)　$x=\sqrt{7}$

命題「$q\Longrightarrow p$」は真。

(証明)　$x+\sqrt{28}=r$（r は有理数）とすると　$x=r-\sqrt{28}$

r は有理数，(1)(ii) より $\sqrt{28}$ は無理数であるから，$r-\sqrt{28}$ は無理数である。

よって，x は無理数である。

以上から，p は q であるための必要条件であるが，十分条件でない。（オ ①）

命題「$p\Longrightarrow r$」は偽。(反例)　$x=\sqrt{3}$

命題「$r\Longrightarrow p$」は偽。(反例)　$x=0$

以上から，p は r であるための必要条件でも十分条件でもない。（カ ③）

$\boxed{5}$

(解説)

⓪　$x=\sqrt{2}$ は無理数，$y=0$ は有理数である。

よって，仮定を満たさないので，命題の反例ではない。

①　$x=3-\sqrt{3}$ と $y=\sqrt{3}-1$ はともに無理数であるから，仮定は満たされている。

また，$x+y=3-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=2$ は有理数であるから，結論は満たされていない。

よって，命題の反例である。

②　$x=\sqrt{3}+1$ と $y=\sqrt{2}-1$ はともに無理数であるから，仮定は満たされている。

また，$x+y=\sqrt{3}+1+\sqrt{2}-1=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ は無理数であるから，結論も満たされている。

よって，命題の反例ではない。

③　$x=\sqrt{4}=2$，$y=-\sqrt{4}=-2$ はともに有理数である。

よって，仮定を満たさないので，命題の反例ではない。

④　$x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$y=1-2\sqrt{2}$ はともに無理数であるから，仮定は満たされている。

また，$x+y=2\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}=1$ は有理数であるから，結論は満たされていない。

よって，命題の反例である。

⑤　$x=\sqrt{2}-2$ と $y=\sqrt{2}+2$ はともに無理数であるから，仮定は満たされている。

また，$x+y=\sqrt{2}-2+\sqrt{2}+2=2\sqrt{2}$ は無理数であるから，結論も満たされている。

よって，命題の反例ではない。

以上から　ア ①，イ ④　（または　ア ④，イ ①）

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　グラフは下に凸であるから　$a>0$　……①

グラフの頂点の x 座標は，$x=-\frac{b}{2a}$ で表され，図 1 において，頂点の x 座標は負であるから　$-\frac{b}{2a}<0$

$a>0$ であるから，両辺に $-2a\,(<0)$ を掛けると

$b>0$　……②

図 1 より，グラフは x 軸と異なる 2 点で交わっているから

$b^2-4ac>0$　……③

よって，①，②，③ を満たす a，b，c の値の組合せとして最も適当なものは　ア ③

(2)　a，b の値を変えずに c の値のみを変化させるとき，頂点の x 座標 $-\frac{b}{2a}$ は変化せず，頂点の y 座標 $c-\frac{b^2}{4a}$ が変化するから，頂点は y 軸方向にのみ移動する。

よって　イ ②

(3)　(1) より，$b=3$，$c=3$ であるから

$$y=ax^2+3x+3=a\left(x+\frac{2}{2a}\right)^2+3-\frac{9}{4a}$$

したがって，頂点の座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$$X=-\frac{3}{2a},\ Y=3-\frac{9}{4a}$$

$a=\frac{b^2}{4c}=\frac{3}{4}$ のとき　$X=-\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=-2$，$Y=3-\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3}=0$

よって，頂点は x 軸上にある。

それ以外のとき，$a>0$，$a\neq\frac{3}{4}$ より，X，Y のとりうる値の範囲は

$X<0$，$Y<3$，$Y\neq 0$

よって，頂点は第 2 象限と第 3 象限を移動する。

したがって　ウ ①，エ ⑤

$\boxed{7}$

（解説）

(1) ① の左辺を因数分解すると　$(x+a)(x-2a)=0$

したがって，① の解は　$x=-a,\ 2a$　（ア ②，イ ⑤ または ア ⑤，イ ②）

(2) (i) $x=-a$ が共通解であるとき，② に代入して

$$(-a)^2-2a\cdot(-a)-a+2=0$$

整理して　$3a^2-a+2=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-1)^2-4\cdot3\cdot2=-23<0$$

よって，a は実数とはならないから，不適。

(ii) $x=2a$ が共通解であるとき，② に代入して

$$(2a)^2-2a\cdot2a-a+2=0$$

整理して　$-a+2=0$　すなわち　$a=2$

このとき，方程式 ① は $x^2-2x-8=0$ となるから　$(x+2)(x-4)=0$

ゆえに　$x=-2,\ 4$

方程式 ② は $x^2-4x=0$ となるから　$x(x-4)=0$

ゆえに　$x=0,\ 4$

よって，共通解 $x=4$ をもつ。

以上から　$a=2$　（ウ ②）　　共通な実数解は　$x=4$　（エ ④）

(3) $x^2+4x-2a=0$ について，解の公式から

$$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot(-2a)}=-2\pm\sqrt{4+2a}$$

よって　$x={}^{オカ}-2\pm\sqrt{{}^{キ}2a+{}^{ク}4}$

(4)，(5) ②，③ の共通解を $x=k$ とおくと

$$\begin{cases} k^2-2ak-a+2=0 & \cdots\cdots②' \\ k^2+4k-2a=0 & \cdots\cdots③' \end{cases}$$

③′−②′ から　$4k+2ak-2a+a-2=0$

k について整理して　$2(a+2)k-(a+2)=0$　すなわち　$(a+2)(2k-1)=0$

よって　$a=-2$　（ケ ⑦）　または　$k=\frac{1}{2}$　（コ ⓪）

(i) $a=-2$ のとき，方程式 ②，③ はともに $x^2+4x+4=0$ であり，$(x+2)^2=0$ となることから，共通解は　$k=-2$　（サ ⑦）

(ii) $k=\frac{1}{2}$ のとき，③′ に代入して　$\left(\frac{1}{2}\right)^2+4\cdot\frac{1}{2}-2a=0$

これから　$a=\frac{9}{8}$　（シ ④）

このとき，② は　$x^2-\frac{9}{4}x+\frac{7}{8}=0$　すなわち　$8x^2-18x+7=0$

ゆえに　$(2x-1)(4x-7)=0$

よって，② の解は　$x=\frac{1}{2},\ \frac{{}^{ス}7}{{}^{セ}4}$

一方，③ は　$x^2+4x-\frac{9}{4}=0$　すなわち　$4x^2+16x-9=0$

ゆえに　$(2x-1)(2x+9)=0$

よって，③ の解は　$x=\frac{1}{2},\ \frac{{}^{ソタ}-9}{{}^{チ}2}$

したがって，確かに共通解 $\frac{1}{2}$ をもつから，適する。

以上から，求める a の値と共通な解 k の組 $(a,\ k)$ は

$$(a,\ k)=(-2,\ -2),\ \left(\frac{9}{8},\ \frac{1}{2}\right)$$

$\boxed{8}$

（解説）

$y=-x^2+(2a+4)x+b$

$=-\{x^2-2(a+2)x+(a+2)^2\}+(a+2)^2+b$

$=-\{x-(a+2)\}^2+a^2+4a+b+4$

よって，G の頂点の座標は　$(a+{}^{ア}2,\ a^2+{}^{イ}4a+b+{}^{ウ}4)$

この頂点が直線 $y=-4x-1$ 上にあるから　$a^2+4a+b+4=-4(a+2)-1$

整理して　$b=-a^2-{}^{エ}8a-{}^{オカ}13$

以下，$f(x)=-x^2+(2a+4)x-a^2-8a-13$ とおく。

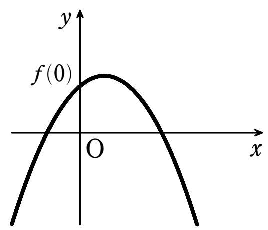
(1) G の頂点の座標は　$(a+2,\ -4a-9)$

G は上に凸の放物線で，頂点の y 座標は $-4a-9$ である。

よって，x 軸と異なる 2 点で交わるとき

$$-4a-9>0$$

ゆえに　$a<\frac{{}^{キク}-9}{{}^{ケ}4}$



また，G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わる条件は，右の図から　$f(0)>0$

すなわち　$-a^2-8a-13>0$

よって　$a^2+8a+13<0$

これを解いて　$-{}^{コ}4-\sqrt{{}^{サ}3}<a<-4+\sqrt{3}$

(2) $f(x)$ の $0\leqq x\leqq4$ における最小値を考える。

[1] $a+2<2$ すなわち $a<0$ のとき

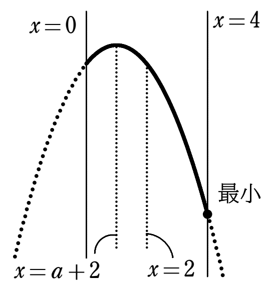
$f(x)$ の最小値は

$f(4)=-4^2+(2a+4)\cdot4-a^2-8a-13$

$=-a^2-13$

$-a^2-13=-22$ とすると　$a^2=9$

$a<0$ より　$a=-3$



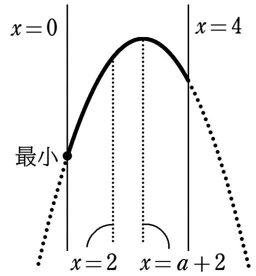
[2] $a+2\geqq2$ すなわち $a\geqq0$ のとき

$f(x)$ の最小値は　$f(0)=-a^2-8a-13$

$-a^2-8a-13=-22$ とすると　$a^2+8a-9=0$

すなわち　$(a+9)(a-1)=0$

$a\geqq0$ より　$a=1$



[1]，[2] より，求める a の値は　$a={}^{シス}-3,\ {}^{セ}1$

$a=1$ のとき，G の軸の方程式は　$x=3$

このとき，軸は $0\leqq x\leqq4$ の範囲にあるから，求める最大値は，頂点の y 座標で

$$-4a-9=-4\cdot1-9={}^{ソタチ}-13$$

また，G の頂点の座標は

$a=-3$ のとき　$(-1,\ 3)$，　$a=1$ のとき　$(3,\ -13)$

ゆえに，$a=-3$ のときの ① のグラフを，

x 軸方向に　$3-(-1)={}^{ツ}4$，　y 軸方向に　$-13-3={}^{テトナ}-16$

だけ平行移動すると，$a=1$ のときの ① のグラフと一致する。

$\boxed{9}$

（解説）

点 P の x 座標は t 秒間に $2t$ 増加し，点 Q の x 座標は t 秒間に t 増加する。

よって，出発してから t 秒後の P の x 座標は $2t-8$，Q の x 座標は t である。

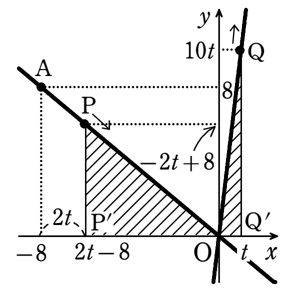
ゆえに，t 秒後の P の座標は

$$(2t-8,\ -2t+8)$$

Q の座標は　$(t,\ 10t)$

点 P が O に到達するとき　$2t-8=0$

よって　$t={}^{ア}4$



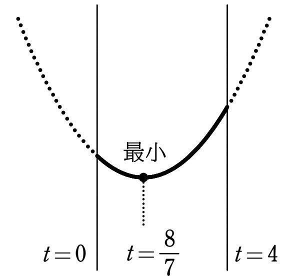
$S=\triangle\mathrm{OPP'}+\triangle\mathrm{OQQ'}$

$=\frac{1}{2}\cdot\{0-(2t-8)\}\cdot(-2t+8)+\frac{1}{2}\cdot t\cdot10t$

$={}^{イ}7t^2-{}^{ウエ}16t+{}^{オカ}32$

$=7\left(t-\frac{8}{7}\right)^2+\frac{160}{7}$

$0<\frac{8}{7}<4$ であるから，右の図より S は $0<t<4$ において，$t=\frac{{}^{キ}8}{{}^{ク}7}$ で最小値 $\frac{{}^{ケコサ}160}{{}^{シ}7}$ をとる。

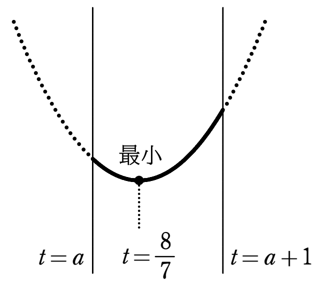


以下，a は $0<a<3$ を満たす定数とする。

(1) S が $t=\frac{8}{7}$ で最小となるのは，$a\leqq\frac{8}{7}\leqq a+1$ を満たすときである。

$\frac{8}{7}\leqq a+1$ より $\frac{1}{7}\leqq a$ であるから，求める a の値の範囲は

$$\frac{{}^{ス}1}{{}^{セ}7}\leqq a\leqq\frac{{}^{ソ}8}{{}^{タ}7}$$



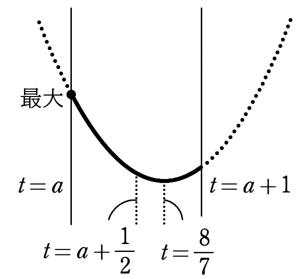
(2) 区間 $a\leqq t\leqq a+1$ の中央の値は

$$\frac{a+(a+1)}{2}=a+\frac{1}{2}$$

S が $t=a$ で最大となるのは，t の範囲 $a\leqq t\leqq a+1$ の中央の値 $a+\frac{1}{2}$ が，軸の値 $\frac{8}{7}$ 以下になるときである。

すなわち　$a+\frac{1}{2}\leqq\frac{8}{7}$

よって　$a\leqq\frac{9}{14}$



これと，$0<a<3$ の共通範囲から，求める a の値の範囲は　$0<a\leqq\frac{{}^{チ}9}{{}^{ツテ}14}$

$\boxed{10}$

解説

$x^2+2px+3p^2-4p-6=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=p^2-(3p^2-4p-6)=-2p^2+4p+6$$

x 軸と異なる2点で交わるから　$D>0$

すなわち　$-2p^2+4p+6>0$

よって　$2(p+1)(p-3)<0$　　ゆえに　${}^{\text{アイ}}-1<p<{}^{\text{ウ}}3$

また，$x^2+2px+3p^2-4p-6=0$ を解くと $x=-p\pm\sqrt{-2p^2+4p+6}$ であるから，x 軸との2つの交点の座標は，それぞれ

$$(-p-\sqrt{-2p^2+4p+6},\ 0),\ (-p+\sqrt{-2p^2+4p+6},\ 0)$$

よって，グラフが x 軸から切り取る線分の長さは

$$-p+\sqrt{-2p^2+4p+6}-(-p-\sqrt{-2p^2+4p+6})=2\sqrt{-2p^2+4p+6}$$

これが4に等しいから　$2\sqrt{-2p^2+4p+6}=4$

ゆえに　$\sqrt{-2p^2+4p+6}=2$

両辺を2乗して　$-2p^2+4p+6=4$　すなわち　$p^2-2p-1=0$

よって　$p={}^{\text{エ}}1\pm\sqrt{{}^{\text{オ}}2}$　　これは $-1<p<3$ を満たす。

$\boxed{11}$

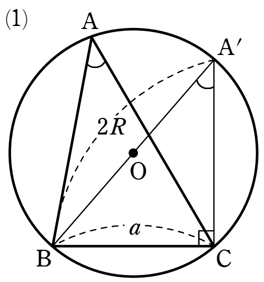
解説

(1)　直角三角形の場合を利用するために，点A′を∠A′CB=90° となるようにとることを考える。
直線BOと円Oとの交点のうち点Bと異なる点をA′とすると，A′Bは円Oの直径であるから

∠A′CB=90°

よって　${}^{\text{ア}}$①

(1)



(2)　直角三角形の場合を利用すると

$$\sin\angle \mathrm{BDC}=\frac{\mathrm{BC}}{2R}=\frac{a}{2R}\quad({}^{\text{イ}}⑤)$$

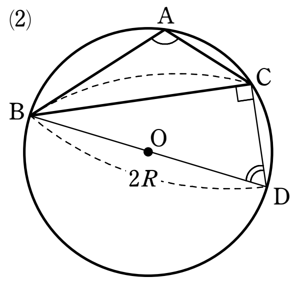
四角形ABDCは円Oに内接するから

∠CAB=180°−∠BDC　（${}^{\text{ウ}}$⑤）

よって，$\sin\angle\mathrm{CAB}=\sin(180^\circ-\angle\mathrm{BDC})=\sin\angle\mathrm{BDC}$

であるから，$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，すなわち，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立つことがわかる。

(2)



$\boxed{12}$

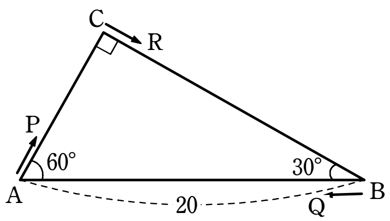
解説

(1)　AC : AB : BC $=1:2:\sqrt{3}$，AB $=20$ から

AC $=10$，BC $=10\sqrt{3}$

点Pは毎秒1の速さで移動するから，10秒後に点Cに到達する。

点Qは点Aに，点Rは点Bに，点Pと同時刻に到達することから，点Qは毎秒2，点Rは毎秒 $\sqrt{3}$ の速さで移動することがわかる。



(i)　2秒後のAP，AQの長さは

AP $=1\cdot2=2$，AQ $=20-2\cdot2=16$

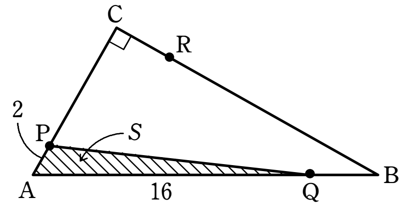
ゆえに，△APQにおいて余弦定理により

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\cos60^\circ$$
$$=4+256-2\cdot2\cdot16\cdot\frac{1}{2}=228$$

PQ >0 であるから　PQ $={}^{\text{ア}}2\sqrt{{}^{\text{イウ}}57}$

また　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\sin60^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$={}^{\text{エ}}8\sqrt{{}^{\text{オ}}3}$$



(ii)　t 秒後のCP，CRの長さは

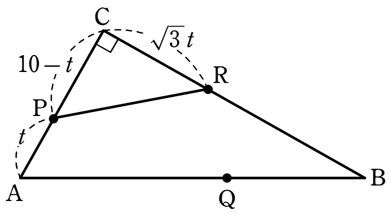
CP $=10-t$，CR $=\sqrt{3}\,t$

したがって，三平方の定理により

$$\mathrm{PR}^2=(10-t)^2+(\sqrt{3}\,t)^2=4t^2-20t+100$$

PR >0 であるから，t 秒後のPRの長さは

$$\mathrm{PR}=\sqrt{4t^2-20t+100}$$



ここで，$y=4t^2-20t+100$ とすると

$$y=4t^2-20t+100=4(t^2-5t)+100$$
$$=4\left(t-\frac{5}{2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+100=4\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+75$$

$0\leqq t\leqq10$ であるから，グラフは右の図のようになる。

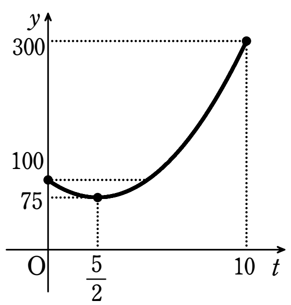
グラフから，PR^2 の値としてとり得ない値 y は

$y<75$ または $y>300$

一回だけとり得る値 y は　$y=75$，$100<y\leqq300$

二回だけとり得る値 y は　$75<y\leqq100$

したがって，PRの長さとして



$5\sqrt{2}$ はとり得ない値である。（${}^{\text{カ}}$⓪）

$5\sqrt{3}$ は一回だけとり得る値である。（${}^{\text{キ}}$①）

$4\sqrt{5}$ は二回だけとり得る値である。（${}^{\text{ク}}$②）

10 は二回だけとり得る値である。（${}^{\text{ケ}}$②）

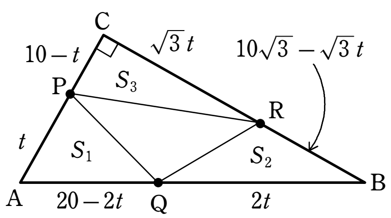
$10\sqrt{3}$ は一回だけとり得る値である。（${}^{\text{コ}}$①）

(iii)　△ABCの面積を S' とする。

各点が移動を開始してから t 秒後のとき，

$\mathrm{AP}=\dfrac{t}{10}\mathrm{AC}$，$\mathrm{AQ}=\dfrac{20-2t}{20}\mathrm{AB}$ から

$$S_1=\frac{t}{10}\cdot\frac{20-2t}{20}\cdot S'=\frac{t(10-t)}{100}S'$$



同様に，

$\mathrm{BQ}=\dfrac{2t}{20}\mathrm{BA}$，$\mathrm{BR}=\dfrac{10\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t}{10\sqrt{3}}\mathrm{BC}$ から

$$S_2=\frac{2t}{20}\cdot\frac{10\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t}{10\sqrt{3}}\cdot S'=\frac{t(10-t)}{100}S'$$

$\mathrm{CP}=\dfrac{10-t}{10}\mathrm{CA}$，$\mathrm{CR}=\dfrac{\sqrt{3}\,t}{10\sqrt{3}}\mathrm{CB}$ から

$$S_3=\frac{10-t}{10}\cdot\frac{\sqrt{3}\,t}{10\sqrt{3}}\cdot S'=\frac{t(10-t)}{100}S'$$

よって，S_1，S_2，S_3 の大小関係について，時刻によらず

$S_1=S_2=S_3$

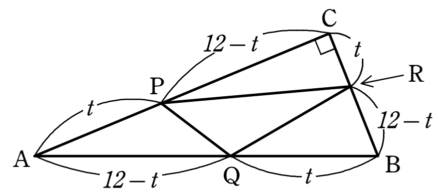
が成り立つ。（${}^{\text{サ}}$⑥）

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot12\cdot5=30$

(1)と同様に考えると，各点が移動を開始してから t 秒後のとき

AP : CP = BQ : AQ = CR : BR

$=t:(12-t)$ $(0\leqq t\leqq12)$



よって　$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{t}{12}\cdot\dfrac{12-t}{12}\triangle\mathrm{ABC}$

$$=\frac{5}{24}t(12-t)$$

△APQ=△BQR=△CRP，

△PQR=△ABC−(△APQ+△BQR+△CRP) であるから

$$\triangle\mathrm{PQR}=30-3\cdot\frac{5}{24}t(12-t)=30-\frac{5}{8}t(12-t)$$

△PQR=12 のとき，$30-\dfrac{5}{8}t(12-t)=12$ から　$5t^2-60t+144=0$

これを解いて　$t=\dfrac{30\pm6\sqrt{5}}{5}$　　これらはともに $0\leqq t\leqq12$ を満たす。

よって，△PQRの面積が12となるのは，各点が移動を開始してから

$\dfrac{{}^{\text{シス}}30\pm{}^{\text{セ}}6\sqrt{{}^{\text{ソ}}5}}{{}^{\text{タ}}5}$ 秒後である。

13

(解説)

(1) ⓪，①，② 散布図から，東京とN市の最高気温の間には正の相関があり，東京とM市の最高気温の間には負の相関があることが読み取れる。① が正しい。

③，④ 散布図から，東京とO市の散布図の点の方が，東京とN市の散布図の点より，右上がりの直線に沿って分布する傾向が強いことが読み取れる。

すなわち，東京とO市の最高気温の間の相関の方が，東京とN市の最高気温の間の相関より強いことが読み取れる。③ が正しい。

よって ア①，イ③ （または ア③，イ①）

(2) N市の摂氏での最高気温を x (℃)，華氏での最高気温を y (°F) とすると

$y=\frac{9}{5}x+32$ ……①

よって，分散について $Y=\left(\frac{9}{5}\right)^2X$

ゆえに $\frac{Y}{X}=\frac{81}{25}$ （ウ⑨）

東京の摂氏での最高気温を z (℃) とすると，共分散について $Z=s_{zx}$，$W=s_{zy}$

① の関係から $s_{zy}=\frac{9}{5}s_{zx}$

よって $W=\frac{9}{5}Z$ ゆえに $\frac{W}{Z}=\frac{9}{5}$ （エ⑧）

また，相関係数について

$$V=\frac{s_{zy}}{s_zs_y}=\frac{\frac{9}{5}s_{zx}}{s_z\cdot\frac{9}{5}s_x}=\frac{s_{zx}}{s_zs_x}=U$$

よって $\frac{V}{U}=1$ （オ⑦）

参考 相関係数は，2つのデータの間の関係を表す数値であり，単位の取り方によらないから $\frac{V}{U}=1$ （オ⑦）

14

(解説)

(1) 図1の散布図から，観光客数と消費総額の間には強い正の相関があることが読み取れるから，相関係数に最も近い値は 0.83 （ア④）

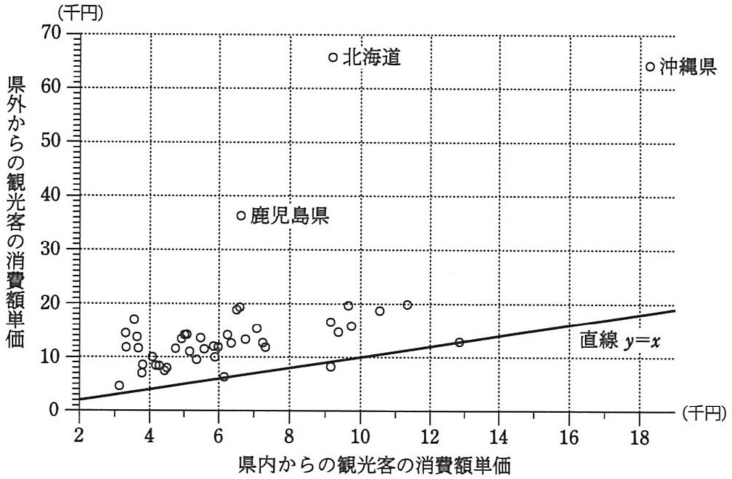
(2) 消費総額を観光客数で割った値が消費額単価である。

よって，各県を表す点のうち，その点と原点を通る直線の傾きが最も大きい点を選べばよいから イ⓪

(3) 消費額単価が最も高い県を表す点は，散布図の ⓪～⑨ の点のうち，その点と原点を通る直線の傾きが最も大きい点であるから ウ⑧

(4) 図2の箱ひげ図では，各県のデータが箱ひげ図のどの位置にあるか特定できないので，⓪，① のことは読み取れない。

図3において，県内からの観光客の消費額単価を x (千円)，県外からの観光客の消費額単価を y (千円) として，次の図のように直線 $y=x$ をかく。



直線 $y=x$ の近くに4つの点があるが，それ以外の点は明らかに直線の上側にあり，それらの点では x の値より y の値の方が大きい。したがって，② は正しい。

図3において，県外からの観光客の消費額単価（縦軸）に着目すると，北海道，鹿児島県，沖縄県は44県の中で上位3位の県であることがわかる。したがって，③ は正しい。

図3において，県内からの観光客の消費額単価のデータ（横軸）は3～13（千円）に分布している。県外からの観光客の消費額単価のデータ（縦軸）は5～20（千円）に分布している。県内の方が県外よりも散らばりが小さく見えるので，④ のことは読み取れない。

以上から エ②，オ③ （または エ③，オ②）

15

(解説)

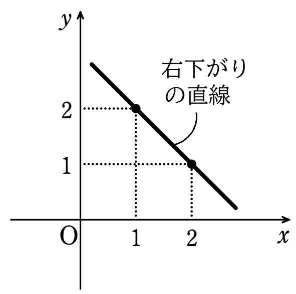
(1) 2つの変量 x，y のデータの組を $(x,\ y)$，それぞれの標準偏差を s_x，s_y，共分散を s_{xy}，相関係数を r とすると，$r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$ である。よって ア②

(2) データの組を散布図に表したとき，相関係数の値は散布図の点が直線に沿って分布する程度を表している。

よって イ④

(3) 2点 (1, 2)，(2, 1) を散布図に表すと，右の図のように右下がりの直線上にあるから，相関係数 r の値は -1 である。

よって ウ①



(4) y の2つの値が2と2のとき，平均値は2であり，分散と標準偏差が0となるから，分母に y の標準偏差を含む相関係数 r の値は定義できない。

よって エ③

(5) データの組の個数が2のとき，散布図上でその2点を通る直線が右上がりの場合の相関係数の値は1，右下がりの場合の相関係数の値は -1，x 軸または y 軸に平行になる場合の相関係数の値は計算できない，の3通りしかない。

よって オ①，カ⑦ （または オ⑦，カ①）

(6) データの組の個数が2のとき，平面上の異なる2点は必ずある直線上にあるから，相関係数の値は1か，-1 か，計算できない場合の3通りに限られる。

よって キ③

(7) 与えられた3点が散布図上で右上がりの直線上にあるとき，相関係数の値は1.00になる。⓪～⑦のうち，適するのは

⓪ (1, 1)，(2, 2)，(3, 3)

② (1, 1)，(2, 2)，(2, 2)

⑤ (1, 1)，(2, 3)，(3, 5)

の3つである。（クケコ⓪，②，⑤ （順不同））

(8) ⓪ データの組の個数が2のとき，相関係数の値は1か -1 か計算できない場合の3通りしかない。

よって，正しい。

① $(x,\ y)=(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$ とすると，相関係数の値は -1 になる。

よって，正しい。

② $(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 3)$，$(4,\ 4)$ とすると，相関係数の値は1になる。

よって，正しくない。

③ データの組は (1, 1) と (2, 2) の2種類であり，50個の点を散布図に表したとき，それらは平面上で2点 (1, 1)，(2, 0) を通る右下がりの直線上にあるから，相関係数の値は -1 になる。

よって，正しい。

④ データの組は (1, 1) と (2, 2) の2種類であり，100個の点を散布図に表したとき，それらは平面上で2点 (1, 1)，(2, 2) を通る右上がりの直線上にあるから，相関係数の値は1になる。

よって，正しい。

したがって，誤っているものは サ②

16

(解説)

1回の試行で，白いボールを取り出す確率は $\frac{3}{4}$

黒いボールを取り出す確率は $\frac{1}{4}$

(1) 白いボールを3回，黒いボールを1回取り出す場合であるから，求める確率は

$${}_4C_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{{}^{アイ}27}{{}^{ウエ}64}$$

(2) $n=1$ となるボールの取り出し方は

[1] 白，黒，白，黒　[2] 白，黒，黒，白　[3] 白，黒，黒，黒

[4] 黒，白，黒，白　[5] 黒，白，黒，黒　[6] 黒，黒，白，黒

[7] 黒，黒，黒，白

の7つの場合があり，これらは互いに排反である。

[1]，[2]，[4] の場合の確率は，それぞれ $\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{256}$

[3]，[5]，[6]，[7] の場合の確率は，それぞれ $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{3}{256}$

よって，求める確率は　$\dfrac{9}{256}\times 3+\dfrac{3}{256}\times 4=\dfrac{{}^{\text{オカ}}39}{{}^{\text{キクケ}}256}$

$\boxed{17}$

(解説)

(1)　2つの箱にはくじがそれぞれ100本ずつ入っており，箱Aはそのうち10本が当たりくじであるから，1番目のSが引いた箱が箱Aで，かつ当たりくじを引く確率は

$$P(A\cap W)=P(A)\cdot P_A(W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}=\frac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イウ}}20}$$

箱Bには当たりくじが5本入っているから，Sが引いた箱が箱Bで，かつ当たりくじを引く確率は

$$P(B\cap W)=P(B)\cdot P_B(W)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}=\frac{1}{40}$$

事象 $A\cap W$ と事象 $B\cap W$ は互いに排反であるから，Sが当たりくじを引く確率は

$$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)=\frac{1}{20}+\frac{1}{40}=\frac{{}^{\text{エ}}3}{{}^{\text{オカ}}40}$$

Sが当たりくじを引いたという条件のもとで，その箱が箱Aであるという条件付き確率は

$$P_W(A)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{1}{20}\div\frac{3}{40}=\frac{{}^{\text{キ}}2}{{}^{\text{ク}}3}$$

Sが当たりくじを引いたとき，その箱は箱Aであるか箱Bであるかのいずれかであるから

$$P_W(B)=1-P_W(A)=\frac{1}{3}$$

Sが箱Bから当たりくじを引いた場合，2番目のTが箱Bからくじを引くときの当たりくじの本数は4である。

よって，Sが当たりくじを引いた後，同じ箱からTがくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は

$$P_W(A)\times\frac{9}{99}+P_W(B)\times\frac{{}^{\text{ケ}}4}{99}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{99}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{99}$$
$$=\frac{22}{297}=\frac{{}^{\text{コ}}2}{{}^{\text{サシ}}27}$$

Sが当たりくじを引いた後，異なる箱からTがくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は

$$P_W(A)\times\frac{5}{100}+P_W(B)\times\frac{10}{100}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{100}$$
$$=\frac{20}{300}=\frac{{}^{\text{ス}}1}{{}^{\text{セソ}}15}$$

(2)　(1)と同様にして，$P(W)$，$P_W(A)$，$P_W(B)$ を考える。

Sが当たりくじを引く確率 $P(W)$ は

$$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)=P(A)\cdot P_A(W)+P(B)\cdot P_B(W)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{100}=\frac{10}{200}+\frac{7}{200}=\frac{17}{200}$$

よって　$P_W(A)=\dfrac{P(A\cap W)}{P(W)}=\dfrac{10}{200}\div\dfrac{17}{200}=\dfrac{10}{17}$

$$P_W(B)=1-P_W(A)=\frac{7}{17}$$

したがって，Sが当たりくじを引いた後，同じ箱からTがくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は

$$P_W(A)\times\frac{9}{99}+P_W(B)\times\frac{6}{99}=\frac{10}{17}\cdot\frac{9}{99}+\frac{7}{17}\cdot\frac{6}{99}$$
$$=\frac{132}{1683}=\frac{{}^{\text{タ}}4}{{}^{\text{チツ}}51}$$

(3)　$\dfrac{2}{27}>\dfrac{1}{15}$ であるから，箱Bの当たりくじが5本のときは，Sが引いた箱と同じ箱を選ぶべきである。

また，$\dfrac{4}{51}<\dfrac{7}{85}$ であるから，箱Bの当たりくじが7本のときは，Sが引いた箱と異なる箱を選ぶべきである。

箱Bの当たりくじが6本の場合を考える。

(1)と同様にして，$P(W)$，$P_W(A)$，$P_W(B)$ を考える。

Sが当たりくじを引く確率 $P(W)$ は

$$P(W)=P(A\cap W)+P(B\cap W)$$
$$=P(A)\cdot P_A(W)+P(B)\cdot P_B(W)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{100}=\frac{10}{200}+\frac{6}{200}=\frac{16}{200}$$

よって　$P_W(A)=\dfrac{P(A\cap W)}{P(W)}=\dfrac{10}{200}\div\dfrac{16}{200}=\dfrac{5}{8}$

$$P_W(B)=1-P_W(A)=\frac{3}{8}$$

したがって，Sが当たりくじを引いた後，同じ箱からTがくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は

$$P_W(A)\times\frac{9}{99}+P_W(B)\times\frac{5}{99}=\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{99}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{99}=\frac{60}{792}$$

Sが当たりくじを引いた後，異なる箱からTがくじを引くとき，そのくじが当たりくじである確率は

$$P_W(A)\times\frac{6}{100}+P_W(B)\times\frac{10}{100}=\frac{5}{8}\cdot\frac{6}{100}+\frac{3}{8}\cdot\frac{10}{100}$$
$$=\frac{60}{800}$$

$\dfrac{60}{792}>\dfrac{60}{800}$ であるから，Sが引いた箱と同じ箱を選ぶべきである。

よって　${}^{\text{テ}}$①

$\boxed{18}$

(解説)

(1)　A地点からB地点に行く経路の総数は，↑3個と→4個を1列に並べる順列の総数に等しいから

$\dfrac{7!}{3!4!}={}^{\text{アイ}}35$（通り）

A地点からP地点に行く経路は $\dfrac{4!}{1!3!}={}^{\text{ウ}}4$（通り）

P地点からB地点に行く経路は $\dfrac{3!}{2!1!}={}^{\text{エ}}3$（通り）

よって，A地点からP地点を経由してB地点に行く経路の総数は

$4\times 3={}^{\text{オカ}}12$（通り）

図1の経路をとる確率は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{{}^{\text{キ}}3}$

図2の経路をとる確率は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{{}^{\text{ク}}4}$

(2)　A地点からP地点に行く確率は

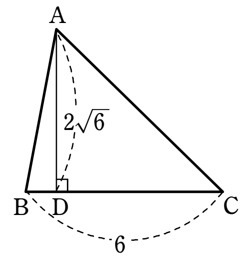
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times 4=\dfrac{1}{4}$　（${}^{\text{ケ}}$⑦）

P地点からB地点に行く確率は1（${}^{\text{コ}}$⑨）であるから，求める[3]の確率は

$\dfrac{1}{4}\times 1=\dfrac{1}{4}$　（${}^{\text{サ}}$⑦）

$\boxed{19}$

(解説)



BC＝6，BD：DC＝1：5 であるから

BD＝1，CD＝5

よって，△ABD において，三平方の定理により

$$\mathrm{AB}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{6})^2}=\sqrt{25}={}^{\text{ア}}5$$

△ACD において，三平方の定理により

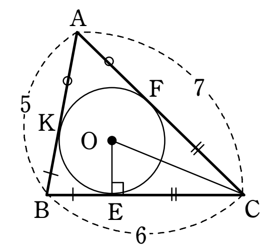
$$\mathrm{AC}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{6})^2}=\sqrt{49}={}^{\text{イ}}7$$

△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})=\frac{1}{2}r(5+6+7)=9r$$

一方　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

よって　$9r=6\sqrt{6}$　　したがって　$r=\dfrac{{}^{\text{ウ}}2\sqrt{{}^{\text{エ}}6}}{{}^{\text{オ}}3}$



内接円が辺 AB に接する点を K とすると

AK＝AF，BK＝BE，CE＝CF

CE＝CF＝x とおくと　AF＝$7-x$，BE＝$6-x$

よって　AK＝$7-x$，BK＝$6-x$

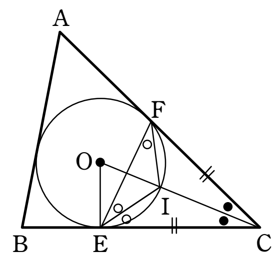
AK＋BK＝5 であるから　$(7-x)+(6-x)=5$

これを解くと　$x=4$　　すなわち　CE＝CF＝${}^{\text{カ}}4$

△OEC において　∠OEC＝90°，$\mathrm{OE}=r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

ゆえに，三平方の定理により

$$\mathrm{CO}=\sqrt{\mathrm{OE}^2+\mathrm{CE}^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2+4^2}=\sqrt{\frac{168}{9}}=\frac{{}^{\text{キ}}2\sqrt{{}^{\text{クケ}}42}}{{}^{\text{コ}}3}$$



線分 CO と円 O の交点を I とする。

△CEF は CE＝CF の二等辺三角形であり，CO はその頂角の二等分線であるから，CO は辺 EF の垂直二等分線でもある。

よって　IE＝IF

ゆえに　∠IEF＝∠IFE　……①

また，接線と弦のつくる角により

∠IEC＝∠IFE　……②

①，② から　∠IEF＝∠IEC

よって，△CEF において，点 I は ∠FEC の二等分線上にある。

点 I は ∠ECF の二等分線上にもあるから，点 I は △CEF の内心である。

したがって，求める距離は，線分 OI の長さ，すなわち円 O の半径 r であるから

$\dfrac{{}^{サ}2\sqrt{{}^{シ}6}}{{}^{ス}3}$

$\boxed{20}$

(解説)

DA＝DC であるから

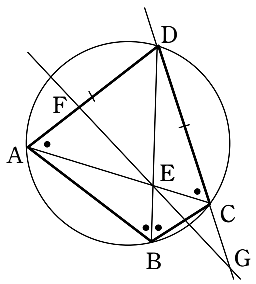
$\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{DCA}$ ……①

円周角の定理により

$\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{DBC}$ ……②

円周角の定理により

$\angle\mathrm{DCA}=\angle\mathrm{ABD}$ ……③



①，③ から　$\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{ABD}$ (^{ア}⓪) ……④

②，④ から　$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}$ ……⑤

よって，線分 BE は ∠ABC の二等分線であるから

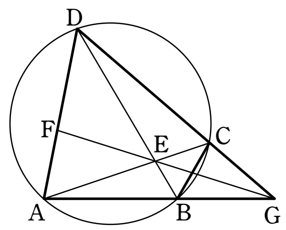
$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=2:1$

すなわち　$\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{{}^{イ}1}{{}^{ウ}2}$

△ACD と直線 FE について，メネラウスの定理により

$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{DG}}{\mathrm{GC}}\cdot\dfrac{1}{2}=1$　　よって　$\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{{}^{エ}1}{{}^{オ}3}$

(1)　チェバの定理により　$\dfrac{4}{\mathrm{BG}}\cdot\dfrac{1}{3-1}\cdot\dfrac{3}{2}=1$



よって　$\mathrm{BG}={}^{カ}3$

また，方べきの定理により　$\mathrm{GA}\cdot\mathrm{GB}=\mathrm{GD}\cdot\mathrm{GC}$

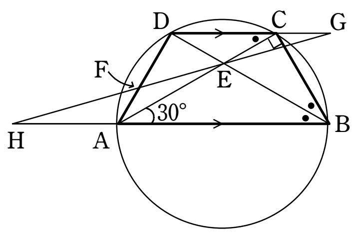
$\mathrm{GD}=3\mathrm{GC}$ であるから　$(4+3)\cdot3=3\mathrm{GC}\cdot\mathrm{GC}$

すなわち　$\mathrm{GC}^2=7$

$\mathrm{GC}>0$ であるから　$\mathrm{GC}=\sqrt{7}$

$\mathrm{DC}=2\mathrm{GC}$ であるから　$\mathrm{DC}={}^{キ}2\sqrt{{}^{ク}7}$

(2)　四角形 ABCD の外接円の直径が最小となるのは，辺 AB が直径となる場合である。



よって，外接円の直径は　${}^{ケ}4$

ゆえに，$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$，$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=2:1$ であるから，△ABC は辺の比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である。

よって　$\angle\mathrm{BAC}={}^{コサ}30^\circ$，$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$

⑤ から　$\angle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABC}=30^\circ$

③ から　$\angle\mathrm{DCA}=\angle\mathrm{ABD}=30^\circ$

したがって，∠BAC＝∠DCA であり，錯角が等しいから　AB∥DC

ゆえに　$\mathrm{AB}:\mathrm{CD}=\mathrm{AE}:\mathrm{CE}$　　すなわち　$4:\mathrm{CD}=2:1$

よって　$\mathrm{CD}=2$

$\dfrac{\mathrm{GC}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{1}{3}$ であるから　$\mathrm{GC}=1$

AB∥DC であるから　$\mathrm{AH}:\mathrm{CG}=\mathrm{AE}:\mathrm{CE}$　　すなわち　$\mathrm{AH}:1=2:1$

よって　$\mathrm{AH}={}^{シ}2$

$\boxed{21}$

(解説)

(1)　(i)，(ii)　正四面体 ABCD の1辺の長さを a とすると，△BAC，△BCD，△BDA，△ACD はすべて1辺の長さ a の正三角形である。

△BAC において中点連結定理により　$\mathrm{FH}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{1}{2}a$

△BCD において中点連結定理により　$\mathrm{HJ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{CD}=\dfrac{1}{2}a$

△BDA において中点連結定理により　$\mathrm{JG}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BA}=\dfrac{1}{2}a$

△ACD において中点連結定理により　$\mathrm{FG}=\dfrac{1}{2}\mathrm{CD}=\dfrac{1}{2}a$

したがって，中点連結定理 (^{ア}③) により，四角形 FHJG の各辺の長さはいずれも正四面体 ABCD の1辺の長さの $\dfrac{1}{2}$ (^{イ}③) 倍であるから，四角形 FHJG の4辺の長さが等しくなる。

(2)　(i)　四角形において，

命題「4辺の長さが等しいならば正方形である」は偽，

命題「正方形であるならば4辺の長さが等しい」は真

であるから，4辺の長さが等しいことは正方形であるための必要条件であるが十分条件でない。(^{ウ}⓪)

(ii)，(iii)　FJ＝GH をいうために，△FJC と △GHD が合同であることを示したいが，その証明は難しい。そこで，点 F，点 G がそれぞれ AC，AD の中点であることから，△AJC，△AHD (${}^{エ，オ}$②，③ (順不同)) について調べる。

AC＝AD，AJ＝AH，CJ＝DH が成り立つので，△AJC と △AHD は合同である。

また，AJ＝CJ，AH＝DH が成り立つので，△AJC と △AHD はともに二等辺三角形 (^{カ}①) である。

点 F，点 G はそれぞれ AC，AD の中点であるから，FJ＝GH である。