1

解説

$\dfrac{x+2}{x^2+2x+16}=t$ とおくと　$tx^2+(2t-1)x+16t-2=0$ ……①

この x についての方程式が実数解をもつ t の値の範囲を求める。

[1]　$t=0$ のとき

$-x-2=0$　すなわち　$x=-2$

[2]　$t\fallingdotseq 0$ のとき

x についての 2 次方程式 ① が実数解をもつ条件から，2 次方程式 ① の判別式を D として　$D=(2t-1)^2-4t(16t-2)=-60t^2+4t+1=-(6t-1)(10t+1)\geqq 0$

ゆえに　$-\dfrac{1}{10}\leqq t\leqq\dfrac{1}{6}$　$(t\fallingdotseq 0)$

以上から　$-\dfrac{1}{10}\leqq t\leqq\dfrac{1}{6}$

よって，$\dfrac{x+2}{x^2+2x+16}$ の最大値は $\dfrac{1}{6}$ である。

参考　$t=\dfrac{1}{6}$ のとき，$D=0$ であるから，2 次方程式 ① は重解 $x=-\dfrac{2t-1}{2t}$ をもつ。

$t=\dfrac{1}{6}$ のとき　$x=2$

よって，$x=2$ で最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

2

解説

$x^2y+xy^2=91$ から　$xy(x+y)=91$

$x+y=\alpha$，$xy=\beta$ ……① とおくと，仮定から　$\alpha+\beta=20$，$\alpha\beta=91$

よって，解と係数の関係から，α，β は 2 次方程式 $s^2-20s+91=0$ の解である。

左辺を因数分解して　$(s-7)(s-13)=0$　ゆえに　$s=7$，13

すなわち　$(\alpha,\ \beta)=(7,\ 13)$，$(13,\ 7)$

また，① より，解と係数の関係から，x，y は 2 次方程式 $t^2-\alpha t+\beta=0$ の解である。

x，y は実数であるから，この 2 次方程式の判別式を D とすると　$D\geqq 0$

ゆえに　$\alpha^2-4\beta\geqq 0$

ここで，$\alpha=7$，$\beta=13$ のとき　$\alpha^2-4\beta=7^2-4\cdot 13=-3$

これは $\alpha^2-4\beta\geqq 0$ を満たさないから，不適。

$\alpha=13$，$\beta=7$ のとき　$\alpha^2-4\beta=13^2-4\cdot 7=141$

これは $\alpha^2-4\beta\geqq 0$ を満たす。

よって，α，β の値は　$\alpha=13$，$\beta=7$

すなわち　$x+y=13$，$xy=7$

したがって　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=13^2-2\cdot 7=155$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=13^3-3\cdot 7\cdot 13=1924$

$\boxed{3}$

(解説)

$h(x)=f(x)-g(x)=2x^2-a-3$　とする。

$y=h(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，頂点は点 $(0,\ -a-3)$ である。

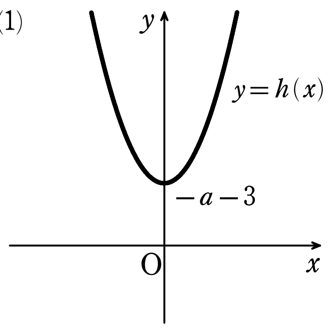
(1)　すべての実数 x に対して，$f(x)>g(x)$ すなわち $h(x)>0$ が成り立つための条件は

　$-a-3>0$　　よって　$a<-3$

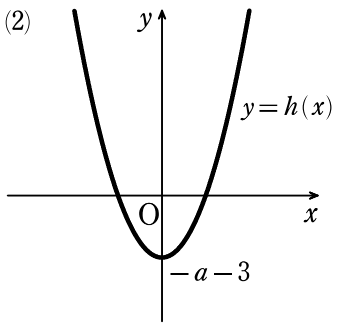
(2)　ある実数 x に対して，$f(x)<g(x)$ すなわち $h(x)<0$ が成り立つための条件は

　$-a-3<0$　　ゆえに　$a>-3$

(1)



(2)



(3)　$0\leqq x\leqq 2$ を満たすすべての実数 x に対して，$h(x)<0$ が成り立つための条件は

　$h(2)<0$　　よって　$8-a-3<0$　　ゆえに　$a>5$

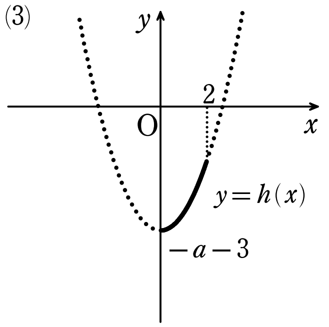
(4)　$0\leqq x\leqq 2$ を満たすある実数 x に対して，$f(x)=g(x)$ すなわち $h(x)=0$ が成り立つための条件は　$h(0)\leqq 0$　かつ　$h(2)\geqq 0$

$h(0)\leqq 0$ から　$-a-3\leqq 0$　　すなわち　$a\geqq -3$

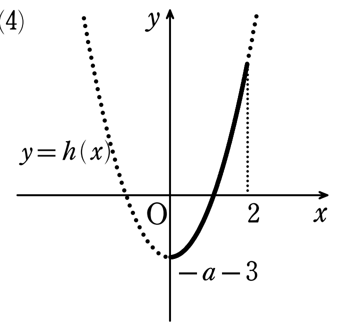
$h(2)\geqq 0$ から　$8-a-3\geqq 0$　　すなわち　$a\leqq 5$

よって，求める a の値の範囲は　$-3\leqq a\leqq 5$

(3)



(4)



$\boxed{4}$

(解説)

$$f(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+m-\frac{9}{4}$$

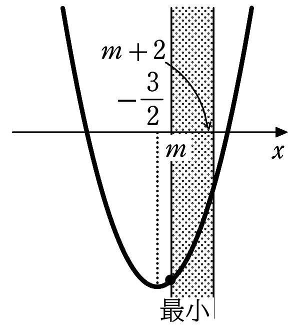
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-\dfrac{3}{2}$ である。

また　$f(m)=m^2+3m+m=m^2+4m$，

　$f(m+2)=(m+2)^2+3(m+2)+m=m^2+8m+10$

(1)　$m>-\dfrac{3}{2}$ のとき

　$g=f(m)=m^2+4m$



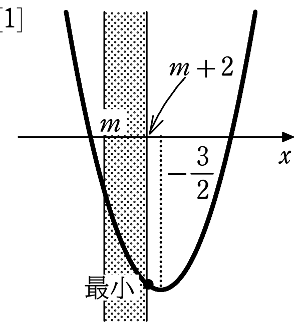
(2)　[1]　$m+2<-\dfrac{3}{2}$　すなわち　$m<-\dfrac{7}{2}$ のとき

　$g=f(m+2)=m^2+8m+10$

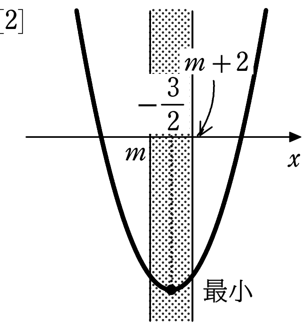
[2]　$m\leqq -\dfrac{3}{2}\leqq m+2$ すなわち $-\dfrac{7}{2}\leqq m\leqq -\dfrac{3}{2}$ のとき

　$g=f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=m-\dfrac{9}{4}$

[1]



[2]



(3)　(1)，(2) より

$$g=\begin{cases}(m+4)^2-6 & \left(m<-\dfrac{7}{2}\right)\\ m-\dfrac{9}{4} & \left(-\dfrac{7}{2}\leqq m\leqq -\dfrac{3}{2}\right)\\ (m+2)^2-4 & \left(m>-\dfrac{3}{2}\right)\end{cases}$$

したがって，グラフは右のようになる。
よって，g は $m=-4$ で最小値 -6 をとる。