7月度課題

1

正六角形 ABCDEF において $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　対角線 CE と DF の交点を P とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3)　対角線 BF と線分 AP の交点を Q とするとき，BQ：QF を求めよ。

2

鋭角三角形 ABC の外心を O，辺 BC の中点を M とし，A から辺 BC に下ろした垂線上に点 H を AH＝2OM となるようにとる。H が △ABC の垂心であることを，ベクトルを用いて証明せよ。

3

平面上の異なる 2 つの定点 O，A と任意の点 P に対し，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とする。次のベクトル方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$|\vec{p}|=|\vec{p}-\vec{a}|$　　　　(2)　$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$

4

ベクトル $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ は，$|\vec{p}|=4$，$|\vec{q}|=2$ を満たし，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角は 60° である。

(1)　$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ と内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　$|t\vec{a}+\vec{b}|$ が最小となる実数 t の値を求めよ。

5

△ABC は点 O を中心とする半径 1 の円に内接していて

$$3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

を満たしているとする。

(1)　内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ を求めよ。

(2)　△ABC の面積を求めよ。

6

座標平面上に 3 点 O (0，0)，A (3，2)，B (1，5) がある。

(1)　△OAB の面積を求めよ。

(2)　s と t が条件 $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$1\leqq s+t\leqq 2$ を満たすとき，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で定まる点 P の存在する範囲の面積を求めよ。

7

(1)　次の方程式はどのような図形を表すか。

$$x^2+y^2+z^2+4x-6y-2z-11=0$$

(2)　点 (4，2，2) を通り，3 つの座標平面に接する球面の方程式を求めよ。

8

(1)　3 点 P (p，6，-12)，Q (-1，-2，2)，R (3，r，-5) が一直線上にあるとき，p と r の値をそれぞれ求めよ。

(2)　辺の長さが 1 である正四面体 OABC において，辺 AB の中点を D，辺 OC の中点を E とする。2 つのベクトル $\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{AC}$ との内積を求めよ。

9

座標空間において，原点を中心とする半径が 3 の球面 S 上の点 A (3，0，0)，B (0，3，0)，C (-1，2，2) を考える。

(1)　線分 AB，BC，CA の長さを求めよ。

(2)　△ABC はどのような形の三角形か。

(3)　3 点 A，B，C を通る平面と S が交わってできる円の半径と中心の座標を求めよ。

10

空間内に 4 点 O，A，B，C があり，

$$OA=3,\ OB=OC=4,\ \angle BOC=\angle COA=\angle AOB=60^\circ$$

であるとする。3 点 A，B，C を通る平面に垂線 OH を下ろす。

(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とし，$\overrightarrow{OH}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すとき，r，s，t を求めよ。

(2)　直線 CH と直線 AB の交点を D とするとき，長さの比 CH：HD，AD：DB をそれぞれ求めよ。

11

a，b は正の整数で $a<b$ とする。a と b の間にあって，3 を分母とするすべての分数 (整数を除く) の和を求めよ。

12

数列 1，11，111，1111，…… の一般項 a_n と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

13

数列 1，2，3，……，n において，次の和を求めよ。

(1)　異なる 2 つの項の積の和 ($n\geqq 2$)

(2)　互いに隣り合わない 2 つの項の積の和 ($n\geqq 3$)

14

自然数を右の図のように並べて，上から第 m 行，左から第 n 列にある数を $a_{m,\ n}$ で表す。

(1)　$a_{n,\ 1}$，$a_{1,\ n}$ を求めよ。

(2)　$a_{m,\ n}$ を求めよ。

1	2	5	10	17	
4	3	6	11	18	
9	8	7	12		
16	15	14	13		

15

1 g，2 g，4 g，……，2^{n-1} g の分銅が各 1 個あれば，これらを組み合わせて 1 g から (2^n-1) g までの 1 g ごとの重さが作られることを示せ。

16

第 3 項が 8，第 10 項が 29 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とするとき

(1)　a と d の値を求めよ。

(2)　和 $2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots\cdots+2^{a_n}$ を n の式で表せ。

(3)　200 以下の a_n のうち偶数であるものの和を求めよ。

17

1 から 180 までの整数のうち，初項が 5，公差が 4 の等差数列に現れる数の集合を A，初項が 1，公差が 6 の等差数列に現れる数の集合を B とする。

(1)　A に属するすべての数の和を求めよ。

(2)　共通部分 $A\cap B$ に属する要素の個数を求めよ。

(3)　和集合 $A\cup B$ に属するすべての数の和を求めよ。

18

自然数の数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $(3+\sqrt{5})^n=a_n+b_n\sqrt{5}$ により定める。

(1)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2)　$c_n=a_n-b_n\sqrt{5}$ とするとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

19

(1)　2 以上の整数 n に対し，

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$ を求めよ。

(2)　任意の正の整数 n に対し，

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$$

が成り立つことを示せ。

20

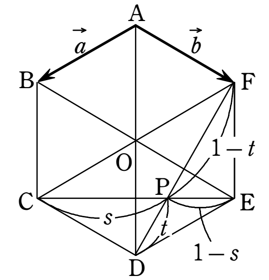
(1)　$\{a_n\}$ を初項 27，公比 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の等比数列とするとき，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_3 a_k$ を求めよ。

(2)　$a_1=5$，$a_{n+1}=8{a_n}^2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

1

解説

正六角形の 3 本の対角線 AD，BE，CF の交点を O とする。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})$

$=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AO}}=2\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\vec{b}+(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\mathrm{CP}:\mathrm{PE}=s:(1-s)$，$\mathrm{DP}:\mathrm{PF}=t:(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}=(1-s)(2\vec{a}+\vec{b})+s(\vec{a}+2\vec{b})$

$=(2-s)\vec{a}+(1+s)\vec{b}$ ……①

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\overrightarrow{\mathrm{AF}}=(1-t)(2\vec{a}+2\vec{b})+t\vec{b}$

$=(2-2t)\vec{a}+(2-t)\vec{b}$ ……②

①，② から　$(2-s)\vec{a}+(1+s)\vec{b}=(2-2t)\vec{a}+(2-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから

$2-s=2-2t$，$1+s=2-t$

これを解いて　$s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{1}{3}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{4}{3}\vec{a}+\dfrac{5}{3}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$（$k$ は実数）とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{4}{3}k\vec{a}+\dfrac{5}{3}k\vec{b}$

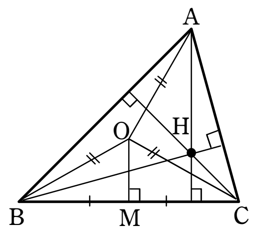
Q は対角線 BF 上にあるから　$\dfrac{4}{3}k+\dfrac{5}{3}k=1$　　これを解いて　$k=\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{4}{9}\vec{a}+\dfrac{5}{9}\vec{b}=\dfrac{4\vec{a}+5\vec{b}}{5+4}$　　したがって　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QF}=5:4$

2

解説

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。



O は △ABC の外心であるから　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$

M は辺 BC の中点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

また，OM⊥BC であるから　OM∥AH

このことと条件 AH＝2OM から

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{b}+\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2=0$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=0$

よって　BH⊥CA，CH⊥AB

したがって，H は △ABC の垂心である。

3

解説

(1) $|\vec{p}|=|\vec{p}-\vec{a}|$ の両辺を 2 乗すると　$|\vec{p}|^2=|\vec{p}-\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$　　ゆえに　$2\vec{p}\cdot\vec{a}-|\vec{a}|^2=0$

両辺を 2 で割ると　$\vec{p}\cdot\vec{a}-\dfrac{1}{2}|\vec{a}|^2=0$　　すなわち　$\left(\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0$

ここで，線分 OA の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$ であるから

$\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{MP}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\neq\vec{0}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\vec{0}$ のとき，点 P は M と一致する。

したがって，点 P が描く図形は，線分 OA の中点 M を通り OA に垂直な直線，すなわち線分 OA の垂直二等分線である。

別解　$|\vec{p}|=|\vec{p}-\vec{a}|$ から　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

よって，点 P は 2 点 O，A から等距離にある。

したがって，点 P が描く図形は，線分 OA の垂直二等分線である。

(2) $|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ の両辺に $|\vec{a}|^2$ を加えると　$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}+|\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$

よって　$|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$　　ゆえに　$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{a}|$

したがって，点 P が描く図形は，点 A を中心とする半径 OA の円である。

4

解説

(1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos 60^\circ=4\times 2\times\dfrac{1}{2}=4$

$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ から　$\vec{a}=\dfrac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})$，$\vec{b}=\dfrac{1}{2}(\vec{p}-\vec{q})$

よって　$|\vec{a}|^2=\dfrac{1}{4}|\vec{p}+\vec{q}|^2=\dfrac{1}{4}(|\vec{p}|^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2)=\dfrac{1}{4}(16+2\times 4+4)=7$

$|\vec{a}|\geqq 0$ であるから　$|\vec{a}|=\sqrt{7}$

また　$|\vec{b}|^2=\dfrac{1}{4}|\vec{p}-\vec{q}|^2=\dfrac{1}{4}(|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2)=\dfrac{1}{4}(16-2\times 4+4)=3$

$|\vec{b}|\geqq 0$ であるから　$|\vec{b}|=\sqrt{3}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}(\vec{p}+\vec{q})\cdot(\vec{p}-\vec{q})=\dfrac{1}{4}(|\vec{p}|^2-|\vec{q}|^2)=\dfrac{1}{4}(16-4)=3$

(2) $|t\vec{a}+\vec{b}|^2=t^2|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7t^2+6t+3$

$=7\left(t+\dfrac{3}{7}\right)^2+\dfrac{12}{7}$

よって，$|t\vec{a}+\vec{b}|^2$ は $t=-\dfrac{3}{7}$ で最小となる。

$|t\vec{a}+\vec{b}|\geqq 0$ であるから，このとき $|t\vec{a}+\vec{b}|$ も最小になる。

したがって，求める t の値は　$t=-\dfrac{3}{7}$

参考　$|t\vec{a}+\vec{b}|$ の最小値は　$\sqrt{\dfrac{12}{7}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

5

解説

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$

条件式から　$5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}})$　　よって　$|5\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

すなわち　$25|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=9|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+24\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+16|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

ゆえに　$25=9+24\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+16$　　したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

同様に $3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-(4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}})$，$4\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ から

$|3\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$，$|4\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

よって　$9=16+40\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+25$，$16=9+30\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+25$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\dfrac{4}{5}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\dfrac{3}{5}$

別解　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\beta$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\gamma$ とおく。

$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ から　$(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

よって　$3+4\alpha+5\gamma=0$ ……①

同様に，$(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$，$(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OB}}+5\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ から

$3\alpha+4+5\beta=0$ ……②，　$3\gamma+4\beta+5=0$ ……③

① から　$\gamma=-\dfrac{4\alpha+3}{5}$ ……④　　② から　$\beta=-\dfrac{3\alpha+4}{5}$ ……⑤

④，⑤ を ③ に代入して　$-\dfrac{3(4\alpha+3)}{5}-\dfrac{4(3\alpha+4)}{5}+5=0$

これを解いて　$\alpha=0$　　⑤，④ に代入して　$\beta=-\dfrac{4}{5}$，$\gamma=-\dfrac{3}{5}$

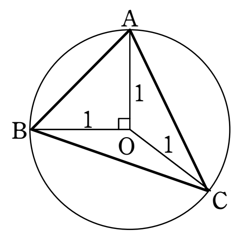
よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\dfrac{4}{5}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\dfrac{3}{5}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から　$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$

また　$\cos\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=-\dfrac{4}{5}$，　$\cos\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=-\dfrac{3}{5}$

よって　$\sin\angle\mathrm{BOC}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$，

$\sin\angle\mathrm{COA}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$



$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ であり，$\angle\mathrm{BOC}$，$\angle\mathrm{COA}$ は鈍角であるから，O は △ABC の内部にある。

したがって，△ABC の面積を S とすると

$S=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OCA}$

$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|+\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\sin\angle\mathrm{BOC}+\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\sin\angle\mathrm{COA}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{6}{5}$

6

解説

(1)　$\overrightarrow{OA}=(3,\ 2)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\ 5)$ であるから

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}|3\times5-2\times1|=\frac{13}{2}$$

(2)　$s+t=k$ (定数) とおくと　$1\leqq k\leqq 2$

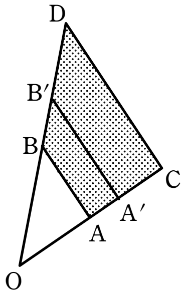
$s+t=k$ から　$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$

また　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{s}{k}(k\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$

ここで，$\dfrac{s}{k}=s'$，$\dfrac{t}{k}=t'$ とおくと

$\overrightarrow{OP}=s'(k\overrightarrow{OA})+t'(k\overrightarrow{OB})$，　$s'+t'=1$，$s'\geqq0$，$t'\geqq0$

よって，$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ を満たす点 A′，B′ をとると，点 P は線分 A′B′ 上を動く。



次に，k を $1\leqq k\leqq 2$ の範囲で動かすと，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ で定まる点 C，D に対して，

A′ は A から C まで
B′ は B から D まで

動き，A′B′∥AB，A′B′∥CD である。

よって，点 P の存在する範囲は，台形 ACDB の周および内部である。

△OAB：△OCD$=1^2:2^2=1:4$ であるから，求める面積は

$$\triangle OCD-\triangle OAB=(4-1)\triangle OAB=3\triangle OAB=3\times\frac{13}{2}=\frac{39}{2}$$

7

解説

(1)　方程式を変形すると

$$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)+(z^2-2z+1)=11+4+9+1$$

よって　$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$

これは，中心が点 $(-2,\ 3,\ 1)$，半径が 5 の球面を表す。

(2)　条件から，$x\geqq0$，$y\geqq0$，$z\geqq0$ の空間に球面の中心は存在する。

球面が 3 つの座標平面に接するから，中心の座標を $(r,\ r,\ r)$，半径を r $(r>0)$ とおける。

よって，球面の方程式は　$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$

これが点 $(4,\ 2,\ 2)$ を通るから　$(4-r)^2+(2-r)^2+(2-r)^2=r^2$

整理すると　$r^2-8r+12=0$　　これを解いて　$r=2,\ 6$

したがって，求める球面の方程式は

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4,\quad (x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=36$$

8

解説

(1)　3 点 P，Q，R が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{QP}=k\overrightarrow{QR}$ ……①　となる実数 k がある。

$\overrightarrow{QP}=(p+1,\ 8,\ -14)$，$\overrightarrow{QR}=(4,\ r+2,\ -7)$ であるから，① より

$(p+1,\ 8,\ -14)=k(4,\ r+2,\ -7)$

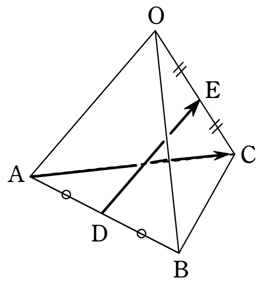
よって　$p+1=4k$，$8=k(r+2)$，$-14=-7k$

これを解いて　$k=2$，$p=7$，$r=2$

(2)　$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=\dfrac{1}{2}(-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$



したがって

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=\dfrac{1}{2}\{|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\}$

$=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})$

ここで，正四面体 OABC において

$|\overrightarrow{AC}|=1$，　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

よって　$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\left(1^2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

9

解説

(1)　$AB=\sqrt{(0-3)^2+(3-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{(-1-0)^2+(2-3)^2+(2-0)^2}=\sqrt{6}$

$CA=\sqrt{(3+1)^2+(0-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

(2)　(1) より $AB^2+BC^2=CA^2$ であるから，△ABC は ∠B$=90^\circ$ の直角三角形である。

参考　AB：BC：CA$=\sqrt{3}:1:2$ であるから，∠A$=30^\circ$，∠C$=60^\circ$ となる。

(3)　3 点 A，B，C を通る平面と球面 S が交わってできる円は △ABC の外接円である。

(2) より，△ABC は ∠B$=90^\circ$ の直角三角形であるから，△ABC の外接円の中心は斜辺 CA の中点で，半径は CA の長さの半分に等しい。

よって，円の半径は　$\dfrac{1}{2}CA=\sqrt{6}$

中心の座標は　$\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{2+0}{2},\ \dfrac{2+0}{2}\right)$　　すなわち　$(1,\ 1,\ 1)$

10

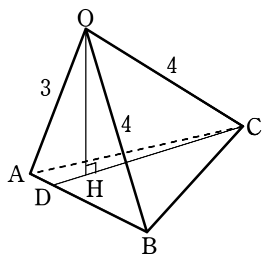
解説

(1)　H は平面 ABC 上にあるから

$r+s+t=1$ ……①

また，OH⊥平面 ABC であるから

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{BC}$



よって，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ であるから

$(r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$ ……②

$(r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ ……③

ここで　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=4$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times4\cos60^\circ=6$，　$\vec{b}\cdot\vec{c}=4\times4\cos60^\circ=8$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=4\times3\cos60^\circ=6$

② から　$-r|\vec{a}|^2+s|\vec{b}|^2+(r-s)\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ゆえに　$-9r+16s+6(r-s)+8t-6t=0$

よって　$-3r+10s+2t=0$ ……④

③ から　$-s|\vec{b}|^2+t|\vec{c}|^2-r\vec{a}\cdot\vec{b}+(s-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+r\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ゆえに　$-16s+16t-6r+8(s-t)+6r=0$

よって　$-s+t=0$ ……⑤

①，④，⑤ を解いて　$r=\dfrac{2}{3}$，$s=\dfrac{1}{6}$，$t=\dfrac{1}{6}$

(2)　(1) より　$\overrightarrow{OH}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

よって　$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}-\dfrac{5}{6}\vec{c}$

$=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO})+\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CO})+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{CO}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{CB}$

$=\dfrac{4\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{6}=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{4\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{5}$

ゆえに，線分 AB を 1：4 に内分する点が D であり，$\overrightarrow{CH}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{CD}$ と表されるから，線分 CD を 5：1 に内分する点が H である。

したがって　CH：HD=5：1，　AD：DB=1：4

11

解説

a から b までの 3 を分母とする分数 (整数も含む) を書き出すと

$$\frac{3a}{3},\ \frac{3a+1}{3},\ \frac{3a+2}{3},\ \cdots\cdots,\ \frac{3b-1}{3},\ \frac{3b}{3}$$

これは初項 a，末項 b，公差 $\dfrac{1}{3}$，項数 $3(b-a)+1$ の等差数列である。

よって，その和を S_1 とすると　$S_1=\dfrac{1}{2}\{3(b-a)+1\}(a+b)$

また，a から b までの整数の和を S_2 とすると　$S_2=\dfrac{1}{2}(b-a+1)(a+b)$

求める和は S_1-S_2 であるから

$\dfrac{1}{2}\{3(b-a)+1\}(a+b)-\dfrac{1}{2}(b-a+1)(a+b)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b)\{3(b-a)+1-(b-a+1)\}$

$=\dfrac{1}{2}(a+b)\cdot2(b-a)=b^2-a^2$

12

解説

この数列は　1，$1+10$，$1+10+10^2$，……　となるから，一般項は

$$a_n=1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{n-1}=\frac{1(10^n-1)}{10-1}=\frac{1}{9}(10^n-1)$$

よって　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k-1)=\frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$

$=\dfrac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)$

$\boxed{13}$

(解説)

(1)　求める和を S とする。

$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)+2(1\cdot2+1\cdot3+\cdots\cdots+2\cdot3+\cdots\cdots)$

であるから　　$\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+2S$

よって　　$2S=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2-n-2)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

したがって　　$S=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$

(2)　求める和は

$$S-\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)=S-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)\{(n+1)(3n+2)-4(2n-1)-12\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n-1)\cdot3(n^2-n-2)=\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n+1)$$

$\boxed{14}$

(解説)

(1)　第 1 列の数は　　1，4，9，16，……

よって　　$a_{n,\ 1}=n^2$

第 1 行の第 2 項以降の数 2，5，10，17，…… は第 1 列の数に 1 を加えたものである。

1	2	5	10	17	
4	3	6	11	18	
9	8	7	12		
16	15	14	13		

よって，$n\geqq2$ のとき

$$a_{1,\ n}=a_{n-1,\ 1}+1=(n-1)^2+1$$

$$=n^2-2n+2\quad\cdots\cdots①$$

$a_{1,\ 1}=1$ であるから，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　　$a_{1,\ n}=n^2-2n+2$

(2)　[1]　$m\geqq n$ のとき，第 m 行の第 1 列から第 n 列までの数は，初項 m^2，公差 -1 の等差数列である。

よって　　$a_{m,\ n}=m^2+(n-1)\cdot(-1)=m^2-n+1$

[2]　$m<n$ のとき，第 n 列の第 1 行から第 m 行までの数は，初項 n^2-2n+2，公差 1 の等差数列である。

よって　　$a_{m,\ n}=n^2-2n+2+(m-1)\cdot1=n^2-2n+m+1$

$\boxed{15}$

(解説)

数学的帰納法で証明する。

証明すべき命題を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$2^1-1=1$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つことを仮定すると，1 g，2 g，……，2^{k-1} g の分銅で 1 g から (2^k-1) g までの 1 g ごとの重さが作られる。

$n=k+1$ のときを考えると，1 g，2 g，……，2^k g の分銅では更に

$$2^k\ \mathrm{g},\ (2^k+1)\ \mathrm{g},\ \cdots\cdots,\ \{2^k+(2^k-1)\}\ \mathrm{g}$$

の重さが作られるから，結局 1 g から $(2^{k+1}-1)$ g までの 1 g ごとの重さが作られる。

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

$\boxed{16}$

(解説)

(1)　第 3 項が 8 であるから　　$a+2d=8$　　……①

第 10 項が 29 であるから　　$a+9d=29$　　……②

①，② を解いて　　$a=2$，$d=3$

(2)　(1) から　　$a_n=2+(n-1)\cdot3=3n-1$

よって，求める和は　　$\sum_{k=1}^{n}2^{a_k}=\sum_{k=1}^{n}2^{3k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot8^k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}8^k$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{8(8^n-1)}{8-1}=\frac{4}{7}(8^n-1)$$

(3)　$\{a_n\}$ の初項は偶数で，公差は奇数であるから，奇数番目の項が偶数になる。

奇数番目の項を取り出してできる数列

$$a_1,\ a_3,\ a_5,\ \cdots\cdots,\ a_{2n-1},\ \cdots\cdots$$

を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は初項 2，公差 $3\times2=6$ の等差数列である。

よって　　$b_n=2+(n-1)\cdot6=6n-4$

$b_n\leqq200$ とすると　　$6n-4\leqq200$　　　これを解くと　　$n\leqq34$

ゆえに，求める和は $\{b_n\}$ の初項から第 34 項までの和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot34\{2\cdot2+(34-1)\cdot6\}=3434$$

別解　求める和は　　$\sum_{k=1}^{34}(6k-4)=6\cdot\frac{1}{2}\cdot34\cdot35-4\cdot34=3570-136=3434$

$\boxed{17}$

(解説)

初項 5，公差 4 の等差数列を $\{a_n\}$，初項 1，公差 6 の等差数列を $\{b_n\}$ とする。

また，集合 X に属するすべての数の和を $S(X)$ で表すことにする。

(1)　$a_n=5+(n-1)\cdot4=4n+1$

$a_n\leqq180$ とすると　　$4n+1\leqq180$　　　よって　　$n\leqq\frac{179}{4}=44.75$

n は自然数であるから　　$n\leqq44$

したがって　　$S(A)=\sum_{k=1}^{44}(4k+1)=4\cdot\frac{1}{2}\cdot44\cdot45+44=4004$

(2)　$b_n=1+(n-1)\cdot6=6n-5$

$a_l=b_m$ とすると　　$4l+1=6m-5$　　　よって　　$2l=3(m-1)$

2 と 3 は互いに素であるから，l は 3 の倍数である。

ゆえに，$l=3k$ (k は自然数) とおけて

$$a_{3k}=4\cdot3k+1=12k+1$$

$12k+1\leqq180$ とすると　　$k\leqq\frac{179}{12}=14.9\cdots\cdots$

k は自然数であるから　　$k\leqq14$

したがって，$A\cap B$ に属する要素の個数は　14

(3)　(2) から　　$S(A\cap B)=\sum_{k=1}^{14}(12k+1)=12\cdot\frac{1}{2}\cdot14\cdot15+14=1274$

$b_n\leqq180$ とすると　　$6n-5\leqq180$　　　よって　　$n\leqq\frac{185}{6}=30.8\cdots\cdots$

n は自然数であるから　　$n\leqq30$

ゆえに　　$S(B)=\sum_{k=1}^{30}(6k-5)=6\cdot\frac{1}{2}\cdot30\cdot31-5\cdot30=2640$

したがって　　$S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$

$$=4004+2640-1274=5370$$

$\boxed{18}$

(解説)

(1)　$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{5}=(3+\sqrt{5})^{n+1}=(3+\sqrt{5})^n(3+\sqrt{5})$

$$=(a_n+b_n\sqrt{5})(3+\sqrt{5})$$

$$=3a_n+5b_n+(a_n+3b_n)\sqrt{5}$$

a_{n+1}，b_{n+1}，$3a_n+5b_n$，a_n+3b_n は有理数，$\sqrt{5}$ は無理数であるから

$$a_{n+1}=3a_n+5b_n,\quad b_{n+1}=a_n+3b_n$$

(2)　$c_{n+1}=a_{n+1}-b_{n+1}\sqrt{5}=3a_n+5b_n-(a_n+3b_n)\sqrt{5}$

$$=a_n(3-\sqrt{5})-\sqrt{5}\,b_n(3-\sqrt{5})$$

$$=(3-\sqrt{5})(a_n-b_n\sqrt{5})=(3-\sqrt{5})c_n$$

よって　　$c_{n+1}=(3-\sqrt{5})c_n$

また，$3+\sqrt{5}=a_1+b_1\sqrt{5}$ であるから　　$a_1=3$，$b_1=1$

ゆえに　　$c_1=a_1-b_1\sqrt{5}=3-\sqrt{5}$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $3-\sqrt{5}$，公比 $3-\sqrt{5}$ の等比数列で

$$c_n=(3-\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})^{n-1}=(3-\sqrt{5})^n$$

(3)　条件から　　$a_n+b_n\sqrt{5}=(3+\sqrt{5})^n$　　……①

(2) の結果から　　$a_n-b_n\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^n$　　……②

①＋② から　　$2a_n=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$

よって　　$a_n=\frac{1}{2}\{(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n\}$

①－② から　　$2\sqrt{5}\,b_n=(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n$

よって　　$b_n=\frac{\sqrt{5}}{10}\{(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n\}$

$\boxed{19}$

(解説)

(1)　求める和を S とする。

$\dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(k-1)k}-\dfrac{1}{k(k+1)}\right\}$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}=\frac{(n+2)(n-1)}{4n(n+1)}$$

(2)　$\dfrac{1}{1^3}<\dfrac{5}{4}$ であるから，$n=1$ のとき，与えられた不等式が成り立つ。

k が 2 以上の自然数のとき，$\dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}=\dfrac{1}{k^3-k}>\dfrac{1}{k^3}$ が成り立つから，$n\geqq2$ のとき

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{1^3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}$$

$$=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}<1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

したがって，任意の正の整数 n に対し，与えられた不等式が成り立つ。

$\boxed{20}$

(解説)

(1)　$$a_n=27\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}=3^3\cdot3^{-\frac{n-1}{2}}=3^{\frac{7-n}{2}}$$

よって　$\log_3 a_n=\log_3 3^{\frac{7-n}{2}}=\dfrac{7-n}{2}$

したがって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log_3 a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{7-k}{2}=\frac{1}{2}\left\{7n-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

$$=\frac{1}{4}n\{14-(n+1)\}=\frac{1}{4}n(13-n)$$

(2)　初項と漸化式から，数列の各項は正である。

2 を底として，$a_{n+1}=8a_n{}^2$ の両辺の対数をとると　$\log_2 a_{n+1}=\log_2 8a_n{}^2$

よって　$\log_2 a_{n+1}=\log_2 8+\log_2 a_n{}^2$

すなわち　$\log_2 a_{n+1}=3+2\log_2 a_n$

$b_n=\log_2 a_n$ とおくと　$b_{n+1}=3+2b_n$

これを変形して　$b_{n+1}+3=2(b_n+3)$

また　$b_1+3=\log_2 a_1+3=\log_2 5+\log_2 8=\log_2 40$

ゆえに，数列 $\{b_n+3\}$ は初項 $\log_2 40$，公比 2 の等比数列で

$b_n+3=(\log_2 40)\cdot2^{n-1}$　　ゆえに　$b_n=(\log_2 40)\cdot2^{n-1}-3$

$b_n=\log_2 a_n$ より $a_n=2^{b_n}$ であるから

$$a_n=2^{(\log_2 40)\cdot2^{n-1}-3}=2^{(\log_2 40)\cdot2^{n-1}}2^{-3}=\frac{1}{8}\cdot40^{2^{n-1}}$$