高 3 物理総合 S～前期第 10 回～＜解答＞◆単スリット回折・N スリット回折②◆

＜予習用問題＞

【１】

（あ）$S_2A = d\sin\theta$ [m]

（い）$d\sin\theta = m\lambda$であり，位相差$\Delta = 2\pi\dfrac{d\sin\theta}{\lambda}$

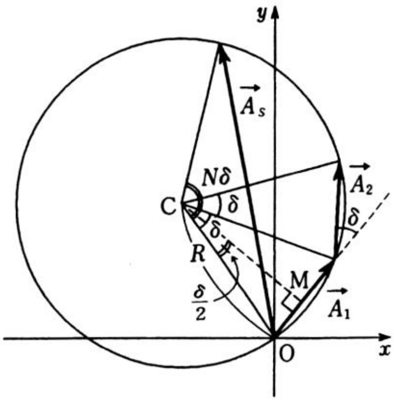
（う）$\Delta = 2\pi m$ [rad]

（え）明線の位置では N 個のスリットを通った光が全て強め合っているので，振幅は NA_0 である。よって，明線の位置での光の強度 K_0 は振幅の 2 乗に等しいから
$K_0 = N^2A_0^2$

（お）図 2(b)において，$\overrightarrow{A_S}$ の中心角は $N\delta$ [rad]なので，正の整数 n を用いて

$N\delta = 2\pi n$ のとき $\left|\overrightarrow{A_S}\right| = 0$ になる。よって，$\delta = \dfrac{2\pi n}{N}$

（か）右図のように，円の中心 C から $\overrightarrow{A_1}$ に下ろした垂線の足を M，半径 CO の長さを R とすると $R\sin\dfrac{\delta}{2} = \mathrm{OM} = \dfrac{A_0}{2}$　　$\therefore R = \dfrac{A_0}{2\sin\dfrac{\delta}{2}}$



同様にして $R\sin\dfrac{N\delta}{2} = \dfrac{\left|\overrightarrow{A_S}\right|}{2}$

$$\therefore \left|\overrightarrow{A_S}\right|^2 = \left(2R\sin\frac{N\delta}{2}\right)^2 = \frac{\sin^2\dfrac{N\delta}{2}}{\sin^2\dfrac{\delta}{2}}A_0^2$$

（き）（お）より $\delta_1 = \dfrac{2\pi}{N}$，$\delta_2 = \dfrac{4\pi}{N}$　　$\therefore \delta = \dfrac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \dfrac{3\pi}{N}$

これを（か）に代入すると $\left|\overrightarrow{A_S}\right|^2 = \dfrac{\sin^2\dfrac{3}{2}\pi}{\sin^2\dfrac{3\pi}{2N}}A_0^2$

N が非常に大きいので，$\dfrac{3\pi}{2N}$ は微小角であるから，$\sin\dfrac{3\pi}{2N} \fallingdotseq \dfrac{3\pi}{2N}$ を用いて

$\sin^2\dfrac{3\pi}{2N} \fallingdotseq \left(\dfrac{3\pi}{2N}\right)^2 = \dfrac{9\pi^2}{4N^2}$　また $\sin^2\dfrac{3}{2}\pi = 1$　　$\therefore \dfrac{K_1}{K_0} = \dfrac{\left|\overrightarrow{A_S}\right|^2}{N^2A_0^2} = \dfrac{\dfrac{4N^2}{9\pi^2}A_0^2}{N^2A_0^2} = \dfrac{4}{9\pi^2}$

（く）求める道のりの差を l とすると，$\dfrac{2\pi}{\lambda}l = \Delta_m + \delta_1$ である。

（う），（お）より，$\Delta_m + \delta_1 = 2\pi m + \dfrac{2\pi}{N}$ なので，

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \times \left(2\pi m + \frac{2\pi}{N}\right) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda$$

（け）$l = d\sin\theta_m{}' = d\sin(\theta_m + \beta_m) = \sin\theta_m\cos\beta_m + \cos\theta_m\sin\beta_m \fallingdotseq \sin\theta_m + \beta_m\cos\theta_m$

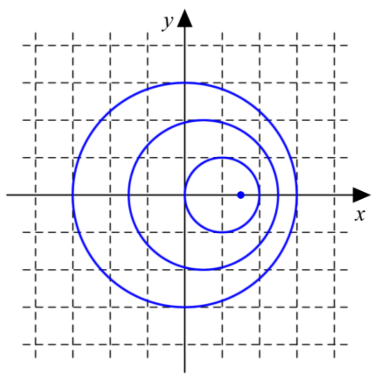
$$= \sin\theta_m + \frac{b_m}{N}\cos\theta_m$$

$l = d\sin(\theta_m + \beta_m) = \left(m + \dfrac{1}{N}\right)\lambda$ より $d\left(\sin\theta_m + \dfrac{b_m}{N}\cos\theta_m\right) = \left(m + \dfrac{1}{N}\right)\lambda$

（い），（う）より，$d\sin\theta_m = m\lambda$ なので，

$$\frac{b_m}{N}d\cos\theta_m = \frac{\lambda}{N} \qquad \therefore b_m = \frac{\lambda}{d\cos\theta_m}$$

【２】



問 1　$\dfrac{3}{T}$　　問 2　右図。　　問 3　$\sin\theta_1 : \dfrac{\lambda}{2w}$　，$\sin\theta_2 : \dfrac{\lambda}{w}$

問 4　$\dfrac{\lambda}{15d}$　　問 5　$\sin\theta_4{}' : \dfrac{\lambda}{D}$　　$\sin\theta_5{}' : \dfrac{2\lambda}{D}$

問 6　$\sin\theta_4 : \dfrac{\lambda}{D}$　　$\sin\theta_5 : \dfrac{2\lambda}{D}$

＜解説＞

問 1　時間 T は 3 周期に相当するから，周期は $\dfrac{T}{3}$ であり，振動数は $f = \dfrac{3}{T}$

問 2　時刻 $t = T$ における S の位置は $x = VT = \dfrac{3L}{2T} \times T = \dfrac{3}{2}L$ ，$y = 0$　である。

波面は，波が出た位置を中心とする円になるから

・時刻 $t = 0$ に出た波：原点を中心とする，半径 $3L$ の円

・1 周期後に出た波：$(x\ ,\ y) = \left(\dfrac{1}{2}L\ ,\ 0\right)$ を中心とする，半径 $2L$ の円

・2 周期後に出た波：$(x\ ,\ y) = (L\ ,\ 0)$ を中心とする，半径 L の円

問 3　2 つのスリットから観測点 P までの光路差は $w\sin\theta$ であり，$\theta = \theta_1$ は $\theta = 0$ に隣り合って，2 つのスリットからの光が最初に弱め合う位置，$\theta = \theta_2$ は最初に強めあう位置であるから　$w\sin\theta_1 = \dfrac{1}{2}\lambda$ ，$w\sin\theta_2 = \lambda$　　$\therefore \sin\theta_1 = \dfrac{\lambda}{2w}$ ，$\sin\theta_2 = \dfrac{\lambda}{w}$

問 4　$\theta = \theta_3$ において，隣り合うスリットから達する光がすべて強め合うと考えると
$60d\sin\theta_3 = m_1\lambda$ ，$30d\sin\theta_3 = m_2\lambda$ ，$45d\sin\theta_3 = m_3\lambda$ が成り立つ（m_1 ，m_2 ，m_3 は適当な整数)。これらの関係を満たす最小の整数の組み合わせは，

$m_1 = 4$，$m_2 = 2$，$m_3 = 3$ であるから $\sin\theta_3 = \dfrac{\lambda}{15d}$

問 5　$\theta = \theta_4'$ の場合，Q_1 と Q_3 から回折する光が打ち消しあえば，Q_2 と Q_4 から回折する光も打ち消しあうと考えて $\dfrac{D}{2}\sin\theta_4' = \dfrac{1}{2}\lambda$　　$\therefore \sin\theta_4' = \dfrac{\lambda}{D}$ となる。

また，$\theta = \theta_5'$ の場合，Q_1 と Q_3 から回折する光が打ち消しあえば，Q_2 と Q_4 から回折する光も打ち消しあうと考えて，$\dfrac{D}{4}\sin\theta_5' = \dfrac{1}{2}\lambda$　　$\therefore \sin\theta_5' = \dfrac{2\lambda}{D}$

問 6　$\theta = \theta_4$ の場合，Q_1 と，これから $\dfrac{D}{2}$ だけ離れた Q_{N+1} から回折する光が打ち消しあえば，Q_2 と Q_{N+2}，Q_3 と Q_{N+3}，…から回折する光も打ち消しあうので

$\dfrac{D}{2}\sin\theta_4 = \dfrac{1}{2}\lambda$　　$\therefore \sin\theta_4 = \dfrac{\lambda}{D}$ となる。

また，$\theta = \theta_5$ の場合，Q_1 と，これから $\dfrac{D}{4}$ だけ離れた $Q_{\frac{N}{2}+1}$ から回折する光が打ち消しあえば，Q_2 と $Q_{\frac{N}{2}+2}$，Q_3 と $Q_{\frac{N}{2}+3}$，…から回折する光も打ち消しあうので

$\dfrac{D}{4}\sin\theta_5 = \dfrac{1}{2}\lambda$　　$\therefore \sin\theta_5 = \dfrac{2\lambda}{D}$ となる。

【３】

〔Ⅰ〕幾何的な比例関係より $\dfrac{D}{R} = \dfrac{w_1}{L+R}$ であるから $w_1 = \dfrac{L+R}{R}D$

〔Ⅱ〕（１）スクリーン上の位置 x の点 P で，2 つのスリットからの距離の差は

$\varDelta = S_2P - S_1P = \sqrt{L^2+(x+d)^2} - \sqrt{L^2+(x-d)^2}$ である。干渉縞の暗い部分 $x = a$ では，2 つのスリットから達する光が逆位相で，$\varDelta = \left(m+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$ となるから（m：整数）

$$\sqrt{L^2+(a+d)^2} - \sqrt{L^2+(a-d)^2} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

（２）与えられた近似式を用い，また，$d = \dfrac{D}{4}$ とすると，（１）の式は

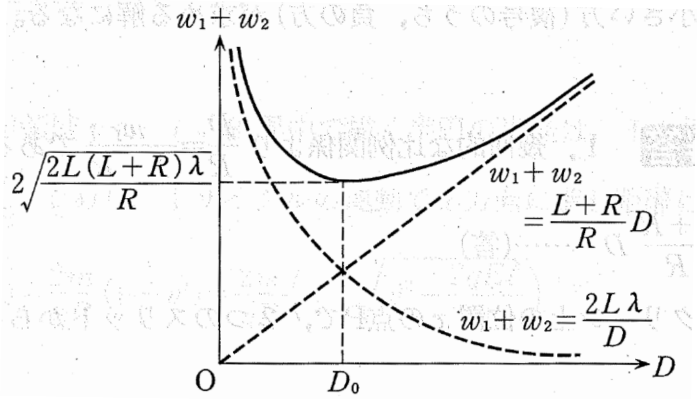
$$\varDelta = L\sqrt{1+\left(\frac{x+d}{L}\right)^2} - L\sqrt{1+\left(\frac{x-d}{L}\right)^2} \fallingdotseq L\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x+d}{L}\right)^2\right\} - L\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-d}{L}\right)^2\right\}$$

$= \dfrac{2dx}{L} = \dfrac{Dx}{2L}$ となる。

$m = 0$ で $x = x_1$，$m = -1$ で $x = x_2$ であるから $\dfrac{Dx_1}{2L} = \dfrac{\lambda}{2}$，$\dfrac{Dx_2}{2L} = -\dfrac{\lambda}{2}$

$\therefore \varDelta x = |x_1 - x_2| = \dfrac{2L\lambda}{D}$

〔Ⅲ〕ⅠとⅡの結果より $w_1+w_2=\dfrac{L+R}{R}D+\dfrac{2L\lambda}{D}$ となり，直径 D によって変化する様子は下図のようになる。



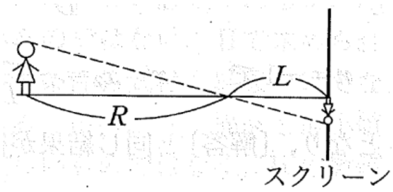
相加平均と相乗平均の関係より $w_1+w_2 \geqq 2\sqrt{\dfrac{L+R}{R}D\cdot\dfrac{2L\lambda}{D}}=2\sqrt{\dfrac{2L(L+R)\lambda}{R}}$

となるが，w_1 と w_2 が最小になるとき $\dfrac{L+R}{R}D_0=\dfrac{2L\lambda}{D_0}$ $\quad\therefore D_0=\sqrt{\dfrac{2LR\lambda}{L+R}}$

〔Ⅳ〕（１）Ⅲの結果の式に与えられた数値を代入すると

$$D_0=\sqrt{\frac{2\times0.1\times0.9\times5\times10^{-7}}{(0.1+0.9)}}=3\times10^{-4}\ [\mathrm{m}]$$

（２）スクリーン上での像の大きさは，幾何的な比例関係より



$$0.1\times\frac{L}{R}=0.1\times\frac{0.1}{0.9}\fallingdotseq 1.1\times10^{-2}\ [\mathrm{m}]$$

また，$D=D_0$ のとき

$$w_1+w_2=\frac{L+R}{R}D_0+\frac{2L\lambda}{D_0}$$

$$=\frac{(0.1+0.9)}{0.9}\times3\times10^{-4}+\frac{2\times0.1\times5\times10^{-7}}{3\times10^{-4}}\fallingdotseq 6.7\times10^{-4}\ [\mathrm{m}]$$

＜別解＞

$$w_1+w_2=2\sqrt{\frac{2L(L+R)\lambda}{R}}=2\sqrt{\frac{2\times0.1\times(0.1+0.9)\times5\times10^{-7}}{0.9}}=\frac{2}{3}\times10^{-3}\fallingdotseq 6.7\times10^{-4}\ [\mathrm{m}]$$

＜演習問題＞【１】（１）$\dfrac{a}{2}\sin\theta$ 　（２）$\dfrac{a}{2}\sin\theta=\dfrac{\lambda}{2}$ より $a\sin\theta=\lambda$

（３）$\sin\theta=\theta$ とすると，$a\theta=\lambda$，$\theta=\dfrac{\lambda}{a}$ だから，$\tan\theta=\theta$ を用いて，$OX_1=l\tan\theta=l\theta=\dfrac{l\lambda}{a}$

（４）（３）より a を小さくすると OX_1 は大きくなるので，間隔は拡がる。

（５）$d\sin\alpha=m\lambda$ 　より $\sin\alpha=\dfrac{m\lambda}{d}$

（６）α が小さいとして，$\sin\alpha=\tan\alpha=\alpha$，また $\alpha=\dfrac{m\lambda}{d}$ より $OY_m=l\tan\alpha=l\alpha=\dfrac{ml\lambda}{d}$

$OY_{m+1}-OY_m=\dfrac{(m+1)l\lambda}{d}-\dfrac{ml\lambda}{d}=\dfrac{l\lambda}{d}$ 　　（７）（ニ）