高3共通テスト数学　5月度第2講確認テスト　氏名（　　　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$

$a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$ のとき，$a=b=c$ または $a+b+c=0$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$

$|x|<1$，$|y|<1$ のとき，$\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1$ を証明せよ。

$\boxed{3}$

x の 4 次式 $f(x)=x^4-2x^3+2x^2-x+4$ を x^2-x+1 で割ったときの商は ${}^{ア}\boxed{}$，余りは ${}^{イ}\boxed{}$ だから，$\dfrac{f(x)}{x^2-x+1}={}^{ア}\boxed{}+\dfrac{{}^{イ}\boxed{}}{x^2-x+1}$ と変形できる。

x が実数全体を動くとき，$t=x^2-x+1$ の最小値は ${}^{ウ}\boxed{}$ であり，特に $t>0$ である。

x が実数全体を動くとき，$\dfrac{f(x)}{x^2-x+1}$ の最小値は ${}^{エ}\boxed{}$ であり，そのときの x の値は ${}^{オ}\boxed{}$ である。

$\boxed{1}$

（解説）

$a^2-bc=b^2-ca$ から　$(a-b)c+a^2-b^2=0$

すなわち　$(a-b)c+(a+b)(a-b)=0$

よって　$(a-b)(a+b+c)=0$

ゆえに　$a=b$ または $a+b+c=0$

同様に，$b^2-ca=c^2-ab$ から　$(b-c)(a+b+c)=0$

ゆえに　$b=c$ または $a+b+c=0$

よって，$a+b+c\neq 0$ のとき　$a=b=c$

したがって　$a=b=c$ または $a+b+c=0$

$\boxed{2}$

（解説）

$\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1 \iff \dfrac{|x+y|}{|1+xy|}<1 \iff |x+y|<|1+xy|$

よって，$|x+y|<|1+xy|$ を示せばよい。

$$|1+xy|^2-|x+y|^2=(1+2xy+x^2y^2)-(x^2+2xy+y^2)$$
$$=1-x^2-y^2+x^2y^2=(1-x^2)(1-y^2)$$

$|x|<1$，$|y|<1$ から　$-1<x<1$，$-1<y<1$

ゆえに，$0\leqq x^2<1$，$0\leqq y^2<1$ であるから　$(1-x^2)(1-y^2)>0$

すなわち　$|1+xy|^2-|x+y|^2>0$

よって　$|x+y|^2<|1+xy|^2$

$|x+y|\geqq 0$，$|1+xy|>0$ であるから　$|x+y|<|1+xy|$

したがって　$\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1$

（別解）　$|x|<1$，$|y|<1$ から　$|xy|<1$

よって　$-1<xy<1$　　ゆえに　$1+xy>0$

$\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1 \iff -1<\dfrac{x+y}{1+xy}<1 \iff -(1+xy)<x+y<1+xy$

したがって，$-(1+xy)<x+y<1+xy$ を示せばよい。

$$1+xy-(x+y)=(1-x)(1-y)$$
$$x+y-\{-(1+xy)\}=(1+x)(1+y)$$

$|x|<1$，$|y|<1$ から　$-1<x<1$，$-1<y<1$

よって　$(1-x)(1-y)>0$，$(1+x)(1+y)>0$

ゆえに　$x+y<1+xy$，$-(1+xy)<x+y$

すなわち　$-(1+xy)<x+y<1+xy$

したがって　$\left|\dfrac{x+y}{1+xy}\right|<1$

$\boxed{3}$

（解説）

$f(x)$ を x^2-x+1 で割ると，右のようになるから，商は ${}^{ア}x^2-x$，余りは ${}^{イ}4$

$$\begin{array}{r}
x^2-x \\
x^2-x+1\,\big)\,\overline{x^4-2x^3+2x^2-x+4} \\
\underline{x^4-x^3+x^2} \\
-x^3+x^2-x \\
\underline{-x^3+x^2-x} \\
4
\end{array}$$

よって，$f(x)=(x^2-x+1)(x^2-x)+4$ と表されるから

$$\frac{f(x)}{x^2-x+1}=\frac{(x^2-x+1)(x^2-x)+4}{x^2-x+1}$$
$$=x^2-x+\frac{4}{x^2-x+1}$$

$t=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ であるから，t の最小値は ${}^{ウ}\dfrac{3}{4}$ である。

よって，$t>0$ となる。

$$\frac{f(x)}{x^2-x+1}=(x^2-x+1)+\frac{4}{x^2-x+1}-1=t+\frac{4}{t}-1$$

$t>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$t+\frac{4}{t}-1\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}-1=3$$

等号が成り立つのは，$t=\dfrac{4}{t}$ かつ $t>0$，すなわち $t=2$ のときである。

$t=2$ のとき　$x^2-x+1=2$　　よって　$x^2-x-1=0$

これを解くと　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

したがって，$\dfrac{f(x)}{x^2-x+1}$ は $x={}^{オ}\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ のとき最小値 ${}^{エ}3$ をとる。