

第3章～三角比～ 第1講 例題

1

解答 (1) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \tan \theta = \frac{1}{2}$

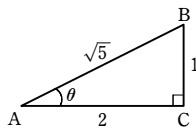
(2) $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$

解説

(1) $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

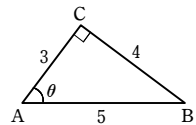
$\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$



(2) $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$

$\cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$

$\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$



2

解答 (1) $k \cos \theta$ (2) $k \sin \theta \cos \theta$

(3) $k \sin^2 \theta$ ($k \sin \theta \cos \theta \tan \theta$ または $k(1 - \cos^2 \theta)$ でもよい)

解説

(1) $\triangle ABC$ において

$AC = AB \cos \theta = k \cos \theta$

(2) $\triangle ADC$ において

$CD = AC \sin \theta = (k \cos \theta) \sin \theta$
 $= k \sin \theta \cos \theta$

(3) (解1) $\triangle ABC$ において

$BC = AB \sin \theta = k \sin \theta$

また $\angle BCD = 90^\circ - \angle ACD = \angle CAD = \theta$

よって, $\triangle BCD$ において

$BD = BC \sin \theta = (k \sin \theta) \sin \theta = k \sin^2 \theta$

(解2) $\angle BCD = \theta$ から, $\triangle BCD$ において

$BD = CD \tan \theta = (k \sin \theta \cos \theta) \tan \theta = k \sin \theta \cos \theta \tan \theta$

(解3) $\triangle ADC$ において

$AD = AC \cos \theta = (k \cos \theta) \cos \theta = k \cos^2 \theta$

よって $BD = AB - AD = k - k \cos^2 \theta = k(1 - \cos^2 \theta)$

注意 $(\sin \theta)^2, (\cos \theta)^2$ は, それぞれ $\sin^2 \theta, \cos^2 \theta$ と書く。

参考 次の項目で学ぶ三角比の相互関係 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ を用いると,

(3) で求めた3つの解

$k \sin^2 \theta, k \sin \theta \cos \theta \tan \theta, k(1 - \cos^2 \theta)$

はどれも同じ形になる。

3

解答 (1) $\cos 17^\circ$ (2) $\sin 36^\circ$ (3) $\frac{1}{\tan 40^\circ}$

解説

(1) $\sin 73^\circ = \sin(90^\circ - 17^\circ) = \cos 17^\circ$

(2) $\cos 54^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ) = \sin 36^\circ$

(3) $\tan 50^\circ = \tan(90^\circ - 40^\circ) = \frac{1}{\tan 40^\circ}$

4

解答 略

解説

$A + B + C = 180^\circ$ であるから $A + B = 180^\circ - C$

よって $\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{180^\circ - C}{2} = \sin(90^\circ - \frac{C}{2}) = \cos \frac{C}{2}$

5

解答 (1) $\cos \theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}, \tan \theta = \frac{2}{3}$ (2) $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \theta = \frac{2}{3}$

解説

(1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13}$

$\cos \theta > 0$ であるから

$\cos \theta = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{13}} \div \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{2}{3}$

(2) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から

$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$

よって $\cos^2 \theta = \frac{4}{9}$

$\cos \theta > 0$ であるから

$\cos \theta = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

また $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

6

解答 (1) 2 (2) 0

解説

(1) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$

$= (\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$

$= 1 + 2\sin \theta \cos \theta + 1 - 2\sin \theta \cos \theta$

$= 2$

(2) $(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta) - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$

$= 1 - \sin^2 \theta - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$

$= \cos^2 \theta - \cos^2 \theta$

$= 0$

7

解答 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ (3) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

解説

(1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ の両辺を2乗すると

$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{6}{4}$

よって $1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{2}$

したがって $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

$= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$

$= \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$

$= \frac{3\sqrt{6}}{4} - \frac{3\sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$

(3) $(\sin \theta - \cos \theta)^2$

$= \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$

$= 1 - 2\sin \theta \cos \theta$

$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

よって, $\sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

第1講 例題演習

1

- 解答 (1) $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$
 (2) $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos \theta = \frac{1}{3}, \tan \theta = 2\sqrt{2}$
 (3) $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \theta = \frac{2}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

解説

- (1) $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
 (2) $AC = \sqrt{6^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$
 よって $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$
 $\tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$
 (3) $AB = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{9} = 3$
 よって $\sin \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}, \tan \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

2

- 解答 (1) $BC = k \sin \theta$ (2) $AC = k \cos \theta$ (3) $AD = k \cos^2 \theta$
 (4) $CD = k \sin \theta \cos \theta$ (5) $BD = k \sin^2 \theta$

解説

- (1) $BC = AB \sin \theta = k \sin \theta$
 (2) $AC = AB \cos \theta = k \cos \theta$
 (3) $AD = AC \cos \theta = (k \cos \theta) \cos \theta = k \cos^2 \theta$
 (4) $CD = AC \sin \theta = (k \cos \theta) \sin \theta = k \sin \theta \cos \theta$
 (5) $\angle BCD = \theta$ であるから $BD = BC \sin \theta = (k \sin \theta) \sin \theta = k \sin^2 \theta$

注意 $(\cos \theta)^2, (\sin \theta)^2$ は、それぞれ $\cos^2 \theta, \sin^2 \theta$ と書く。

3

- 解答 (1) $\cos 38^\circ$ (2) $\sin 43^\circ$ (3) $\frac{1}{\tan 19^\circ}$

解説

- (1) $\sin 52^\circ = \sin(90^\circ - 38^\circ) = \cos 38^\circ$
 (2) $\cos 47^\circ = \cos(90^\circ - 43^\circ) = \sin 43^\circ$
 (3) $\tan 71^\circ = \tan(90^\circ - 19^\circ) = \frac{1}{\tan 19^\circ}$

4

- 解答 (1) 略 (2) 略

解説

$A + B + C = 180^\circ$ であるから $B + C = 180^\circ - A$

よって $\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$

- (1) $\cos \frac{B+C}{2} = \cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \sin \frac{A}{2}$
 (2) $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B+C}{2} = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \tan \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} = 1$

5

- 解答 (1) $\cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}$ (2) $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$
 (3) $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cos \theta = \frac{1}{3}$

解説

- (1) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から
 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$
 $\cos \theta > 0$ であるから
 $\cos \theta = \sqrt{\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{12^2}{13^2}} = \frac{12}{13}$
 また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{5}{13} \div \frac{12}{13} = \frac{5}{12}$

- (2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から
 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$
 $\sin \theta > 0$ であるから
 $\sin \theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
 また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{5}}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

- (3) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ から
 $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (2\sqrt{2})^2 = 1 + 8 = 9$

- よって $\cos^2 \theta = \frac{1}{9}$
 $\cos \theta > 0$ であるから

- $\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$
 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ から
 $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

6

- 解答 (1) 略 (2) 略 (3) 略 (4) 略 (5) 略 (6) 略

解説

- (1) (左辺) $= \cos \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta =$ (右辺)
 (2) (左辺) $= 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta =$ (右辺)
 (3) (左辺) $= \tan^2 \theta \cdot \cos^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta = \sin^2 \theta =$ (右辺)
 (4) (左辺) $= \frac{\sin \theta \cos \theta}{(1 + \sin \theta)} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{1 + \sin \theta} = 1 - \sin \theta =$ (右辺)
 (5) (左辺) $= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta =$ (右辺)
 (6) (左辺) $= (\sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta + 4 \cos^2 \theta) + (4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$

$= 5(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 5 =$ (右辺)

7

- 解答 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $-\frac{9\sqrt{3}}{16}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

解説

- (1) $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を2乗すると $\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$
 よって $1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$
 したがって $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8}$

- (2) $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = (\sin \theta - \cos \theta)^3 + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)$
 $= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{16}$

- 別解 $\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$
 $= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{16}$

- (3) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$
 $= 1 + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$

θ は鋭角なので $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$

- よって、 $\sin \theta + \cos \theta > 0$ であるから $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

1

【解答】 $5\sqrt{3} + 6.5$ (m)

【解説】

右の図のように、木の頂点を D、木の根元を C とし、目の高さの直線上の点を A'、B'、C' とする。このとき、 $BC = x$ m、 $C'D = h$ m とすると

$$h = (10 + x) \tan 30^\circ \quad \dots \textcircled{1}$$

$$h = x \tan 45^\circ \quad \dots \textcircled{2}$$

② から $x = h$

これを ① に代入して $h = \frac{10+h}{\sqrt{3}}$

ゆえに $(\sqrt{3}-1)h = 10$

よって $h = \frac{10}{\sqrt{3}-1} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 5(\sqrt{3}+1)$

したがって、求める木の高さは、目の高さを加えて

$$5(\sqrt{3}+1) + 1.5 = 5\sqrt{3} + 6.5 \text{ (m)}$$

2

【解答】 $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$,

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$

【解説】

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ であるから

$$BD = BC - CD = \sqrt{3} - 1$$

$\triangle BED$ は $\angle E = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから

$$DE = BE = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

また、 $AD = \sqrt{2} AC = \sqrt{2}$ であるから

$$AE = AD + DE = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

よって、直角三角形 ABE において

$$\sin 15^\circ = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \div 2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \div 2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

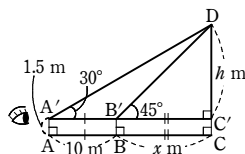
$$\tan 15^\circ = \frac{BE}{AE} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \div \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{8-2\sqrt{12}}{6-2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

また $\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$$\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75^\circ = \tan(90^\circ - 15^\circ) = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}$$



3

【解答】 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ (3) $\frac{2\sqrt{15}}{9}$ (4) $6\sqrt{15}$

【解説】

$$(1) \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 3 \text{ であるから } \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 3$$

$$\text{したがって } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$(2) (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より、 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ であるから $\sin \theta + \cos \theta > 0$

$$\text{よって } \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$(3) \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{15}}{9}$$

$$(4) \frac{1}{\sin^3 \theta} + \frac{1}{\cos^3 \theta} = \frac{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}{\sin^3 \theta \cos^3 \theta} = \frac{2\sqrt{15}}{9} \div \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2\sqrt{15}}{9} \cdot 27 = 6\sqrt{15}$$

1

【解答】 (1) $\frac{4+\sqrt{7}}{4}$ (2) 1 (3) $\frac{2}{3}$

【解説】

$$(1) 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{ から } \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (\sqrt{7})^2 = 8$$

$$\text{したがって } \cos^2 \theta = \frac{1}{8}$$

$$\theta \text{ は鋭角であるから、} \cos \theta > 0 \text{ より } \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{よって } \sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$\text{ゆえに } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2})^2(\sqrt{7}+1)^2}{4^2} = \frac{2(8+2\sqrt{7})}{16} = \frac{4+\sqrt{7}}{4}$$

【別解】 同様に $\cos^2 \theta = \frac{1}{8}$

$$\tan \theta = \sqrt{7} \text{ から } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{7} \text{ ゆえに } \sin \theta = \sqrt{7} \cos \theta$$

$$\text{よって } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = ((\sqrt{7}+1)\cos \theta)^2 = (\sqrt{7}+1)^2 \cos^2 \theta = (8+2\sqrt{7}) \cdot \frac{1}{8} = \frac{4+\sqrt{7}}{4}$$

$$(2) \tan^2 \theta + (1 - \tan^4 \theta)(1 - \sin^2 \theta) = \tan^2 \theta + (1 + \tan^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) \cos^2 \theta = \tan^2 \theta + \frac{1 - \tan^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta = \tan^2 \theta + 1 - \tan^2 \theta = 1$$

$$(3) \text{ (分子) } = \sin^4 \theta + 4\cos^2 \theta - \cos^4 \theta + 1 = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + 4\cos^2 \theta + 1 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + 4\cos^2 \theta + 1 = (1 - \cos^2 \theta) + 3\cos^2 \theta + 1 = 2(1 + \cos^2 \theta)$$

$$\text{よって (与式) } = \frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{3(1 + \cos^2 \theta)} = \frac{2}{3}$$

第2講 例題

1

【解答】 (1) $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

(2) $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$

【解説】

(1) 右の図で、 $\angle AOP = 120^\circ$ とすると
 $\angle POQ = 60^\circ$
 半円の半径を $r=2$ とすると、点 P の座標は

$(-1, \sqrt{3})$

そこで $x=-1$, $y=\sqrt{3}$ として

$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

(2) 右の図で、 $\angle AOP = 180^\circ$ とする。

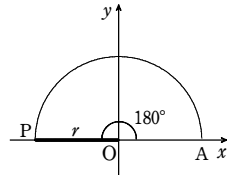
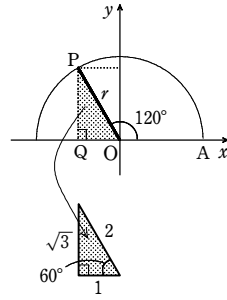
半円の半径を $r=1$ とすると、点 P の座標は
 $(-1, 0)$

そこで $x=-1$, $y=0$ として

$\sin 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$\cos 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$

$\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$



2

【解答】 (1) 0 (2) 2

【解説】

(1) (与式) $= \cos(180^\circ - 10^\circ) + \cos(90^\circ - 20^\circ) + \sin(90^\circ - 10^\circ) - \sin(180^\circ - 20^\circ)$
 $= -\cos 10^\circ + \sin 20^\circ + \cos 10^\circ - \sin 20^\circ = 0$

(2) (与式) $= \tan(180^\circ - 35^\circ)\tan(90^\circ - 35^\circ) - 3\tan(180^\circ - 25^\circ)\tan(90^\circ - 25^\circ)$

$= (-\tan 35^\circ) \cdot \frac{1}{\tan 35^\circ} - 3(-\tan 25^\circ) \cdot \frac{1}{\tan 25^\circ}$

$= -1 + 3 = 2$

【別解】 (与式) $= \tan(90^\circ + 55^\circ)\tan 55^\circ - 3\tan(90^\circ + 65^\circ)\tan 65^\circ$

$= -\frac{1}{\tan 55^\circ} \cdot \tan 55^\circ - 3\left(-\frac{1}{\tan 65^\circ}\right)\tan 65^\circ$

$= -1 + 3 = 2$

3

【解答】 (1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $(\cos \theta, \tan \theta) = \left(\frac{3\sqrt{5}}{7}, \frac{2\sqrt{5}}{15}\right), \left(-\frac{3\sqrt{5}}{7}, -\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$

(3) $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

【解説】

(1) $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

$\sin \theta \geq 0$ であるから

$\sin \theta = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{5}/3}{-2/3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $\sin \theta = \frac{2}{7}$ から、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ または $90^\circ < \theta < 180^\circ$ である。

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{45}{49}$

[1] $0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき、 $\cos \theta > 0$ であるから

$\cos \theta = \sqrt{\frac{45}{49}} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2/7}{3\sqrt{5}/7} = \frac{2}{3\sqrt{5}}$

$= \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$

[2] $90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき、 $\cos \theta < 0$ であるから

$\cos \theta = -\sqrt{\frac{45}{49}} = -\frac{3\sqrt{5}}{7}$

また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2/7}{-3\sqrt{5}/7} = -\frac{2}{3\sqrt{5}}$

$= -\frac{2}{3\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$

[1], [2] から

$(\cos \theta, \tan \theta) = \left(\frac{3\sqrt{5}}{7}, \frac{2\sqrt{5}}{15}\right), \left(-\frac{3\sqrt{5}}{7}, -\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$

(3) $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

よって $\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\tan \theta = -\frac{4}{3} < 0$ であるから $90^\circ < \theta < 180^\circ$

ゆえに $\cos \theta < 0$ よって $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

また $\sin \theta = \tan \theta \cdot \cos \theta = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$

【別解】 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{4}{3}$ から $\sin \theta = -\frac{4}{3} \cos \theta$ …… ①

① を $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ に代入して $\left(-\frac{4}{3} \cos \theta\right)^2 + \cos^2 \theta = 1$

よって $\frac{25}{9} \cos^2 \theta = 1$ ゆえに $\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\tan \theta < 0$ であるから $90^\circ < \theta < 180^\circ$

よって $\cos \theta < 0$ ゆえに $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

① に代入して $\sin \theta = -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$

4

【解答】 (1) $\theta = 45^\circ, 135^\circ$ (2) $\theta = 150^\circ$ (3) $\theta = 135^\circ$ (4) $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

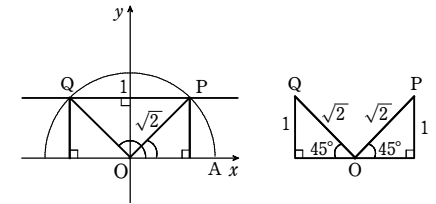
(5) $\theta = 30^\circ$

【解説】

(1) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は、

右の図で $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ である。

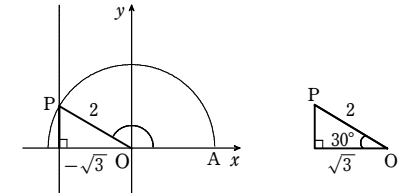
よって $\theta = 45^\circ, 135^\circ$



(2) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす

θ は、右の図で $\angle AOP$ である。

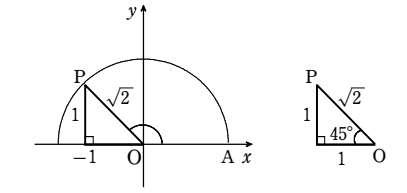
よって $\theta = 150^\circ$



(3) $\tan \theta = -1$ を満たす θ は、

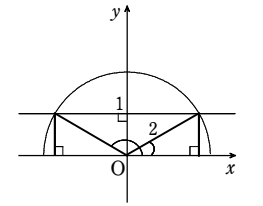
右の図で $\angle AOP$ である。

よって $\theta = 135^\circ$



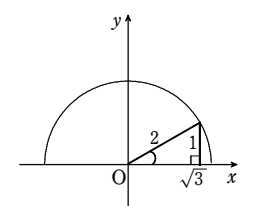
(4) $2\sin \theta - 1 = 0$ から $\sin \theta = \frac{1}{2}$

よって $\theta = 30^\circ, 150^\circ$



(5) $3\tan \theta = \sqrt{3}$ から $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

よって $\theta = 30^\circ$

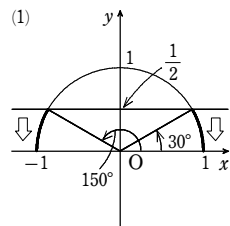


5

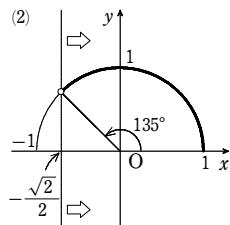
【解答】 (1) $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ, 150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ (2) $0^\circ \leq \theta < 135^\circ$ (3) $30^\circ \leq \theta < 90^\circ$

【解説】

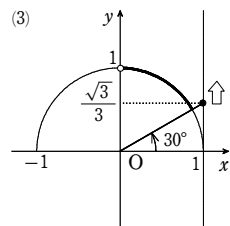
(1) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ のとき $\theta = 30^\circ, (180^\circ - 30^\circ) = 150^\circ$
よって $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ, 150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$



(2) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$
よって $0^\circ \leq \theta < 135^\circ$



(3) $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $\theta = 30^\circ$
よって $30^\circ \leq \theta < 90^\circ$



6

解答 $\theta = 60^\circ, 180^\circ$

解説

$$\sin^2 \theta - \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} = 0 \text{ から } (1 - \cos^2 \theta) - \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{よって } 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0 \\ (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき } -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ であるから } \cos \theta = \frac{1}{2}, -1$$

$$\text{よって } \theta = 60^\circ, 180^\circ$$

7

解答 (1) $60^\circ < \theta \leq 180^\circ$ (2) $30^\circ < \theta < 45^\circ, 135^\circ < \theta < 150^\circ$

解説

$$(1) \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ であるから } 2(1 - \cos^2 \theta) - 3\cos \theta > 0$$

$$\text{整理すると } 2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 2 < 0 \\ \cos \theta = t \text{ とおくと, } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき } -1 \leq t \leq 1 \text{ ①}$$

$$\text{不等式は } 2t^2 + 3t - 2 < 0 \\ \text{ゆえに } (t+2)(2t-1) < 0$$

$$\text{よって } -2 < t < \frac{1}{2}$$

$$\text{① との共通範囲を求めて } -1 \leq t < \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに, } -1 \leq \cos \theta < \frac{1}{2} \text{ を解いて } 60^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

$$(2) \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ であるから } 4(1 - \sin^2 \theta) + (2 + 2\sqrt{2})\sin \theta > 4 + \sqrt{2}$$

$$\text{整理すると } 4\sin^2 \theta - (2 + 2\sqrt{2})\sin \theta + \sqrt{2} < 0$$

$$\sin \theta = t \text{ とおくと, } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき } 0 \leq t \leq 1 \text{ ①}$$

$$\text{不等式は } 4t^2 - (2 + 2\sqrt{2})t + \sqrt{2} < 0 \\ \text{ゆえに } (2t-1)(2t-\sqrt{2}) < 0$$

$$\text{よって } \frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{① との共通範囲は } \frac{1}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ゆえに, } \frac{1}{2} < \sin \theta < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ を解いて}$$

$$30^\circ < \theta < 45^\circ, 135^\circ < \theta < 150^\circ$$

8

解答 $\theta = 60^\circ$ で最大値 8, $\theta = 180^\circ$ で最小値 -1

解説

$$y = 4(1 - \cos^2 \theta) + 4\cos \theta + 3 = -4\cos^2 \theta + 4\cos \theta + 7 \\ \cos \theta = x \text{ とおくと}$$

$$y = -4x^2 + 4x + 7 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 8$$

$$\text{また, } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ から } -1 \leq x \leq 1$$

よって, y は

$$x = \frac{1}{2} \text{ で最大値 } 8,$$

$$x = -1 \text{ で最小値 } -1$$

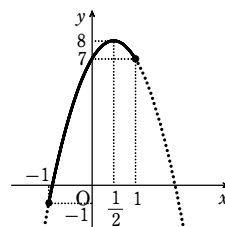
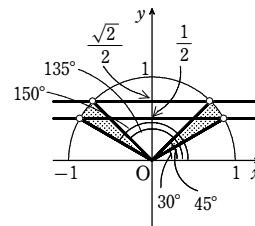
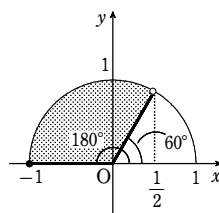
をとる。

$$x = \frac{1}{2} \text{ すなわち } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ のとき } \theta = 60^\circ$$

$$x = -1 \text{ すなわち } \cos \theta = -1 \text{ のとき } \theta = 180^\circ$$

したがって $\theta = 60^\circ$ で最大値 8

$$\theta = 180^\circ \text{ で最小値 } -1$$



1

解答

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	なし	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

解説

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	なし	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

2

解答 (1) 0 (2) 0 (3) 1 (4) 4

解説

$$(1) \cos 160^\circ - \cos 110^\circ + \sin 70^\circ - \sin 20^\circ \\ = \cos(180^\circ - 20^\circ) - \cos(90^\circ + 20^\circ) + \sin(90^\circ - 20^\circ) - \sin 20^\circ \\ = -\cos 20^\circ + \sin 20^\circ + \cos 20^\circ - \sin 20^\circ = 0$$

$$(2) \sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ \\ \sin 50^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ \\ \cos 130^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ \\ = -\cos(90^\circ - 40^\circ) = -\sin 40^\circ \\ \text{よって } \sin 140^\circ \sin 50^\circ + \cos 40^\circ \cos 130^\circ \\ = \sin 40^\circ \cos 40^\circ + \cos 40^\circ \cdot (-\sin 40^\circ) = 0$$

$$(3) \cos 80^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ \\ \sin 100^\circ = \sin(90^\circ + 10^\circ) = \cos 10^\circ \\ \cos 170^\circ = \cos(180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ \\ \text{よって 与式} = \sin 10^\circ \sin 10^\circ - \cos 10^\circ (-\cos 10^\circ) = \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ = 1$$

$$(4) \tan 155^\circ = \tan(180^\circ - 25^\circ) = -\tan 25^\circ \\ \tan 115^\circ = \tan(180^\circ - 65^\circ) = -\tan 65^\circ \\ \text{よって } (\tan 25^\circ + \tan 65^\circ)^2 - (\tan 155^\circ - \tan 115^\circ)^2 \\ = (\tan 25^\circ + \tan 65^\circ)^2 - (-\tan 25^\circ + \tan 65^\circ)^2 \\ = (\tan 25^\circ + \tan 65^\circ)^2 - (\tan 25^\circ - \tan 65^\circ)^2 \\ = 4\tan 25^\circ \tan 65^\circ = 4\tan 25^\circ \tan(90^\circ - 25^\circ) \\ = 4\tan 25^\circ \cdot \frac{1}{\tan 25^\circ} = 4$$

3

解答 (1) $\cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan \theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$ または $\cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \tan \theta = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

第2講 例題演習

(2) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$ (3) $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

(4) $\sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \tan \theta = 2\sqrt{6}$

解説

(1) $\sin \theta = \frac{3}{4}$ から, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ または $90^\circ < \theta < 180^\circ$ である.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき, $\cos \theta > 0$ であるから

$\cos \theta = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \div \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき, $\cos \theta < 0$ であるから

$\cos \theta = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4} \div \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{\sqrt{7}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

(2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$\sin \theta \geq 0$ であるから $\sin \theta = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-2) = -\sqrt{3}$

参考 $\theta = 120^\circ$ である.

(3) $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + (-3)^2 = 10$ よって $\cos^2 \theta = \frac{1}{10}$

$\tan \theta < 0$ であるから, θ は鈍角で $\cos \theta < 0$

ゆえに $\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

また $\sin \theta = \tan \theta \times \cos \theta = -3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

(4) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$

$\sin \theta \geq 0$ であるから $\sin \theta = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \div \frac{1}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \times 5 = 2\sqrt{6}$

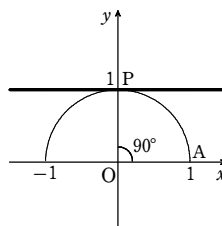
4

解答 (1) $\theta = 90^\circ$ (2) $\theta = 60^\circ$ (3) $\theta = 60^\circ$ (4) $\theta = 45^\circ, 135^\circ$

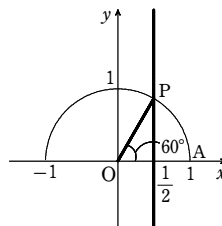
(5) $\theta = 135^\circ$ (6) $\theta = 150^\circ$

解説

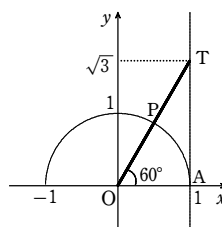
(1) 半径1の半円周上で, y座標が1となる点は, 図の点Pである. 求める θ は, $\angle AOP$ であるから $\theta = 90^\circ$



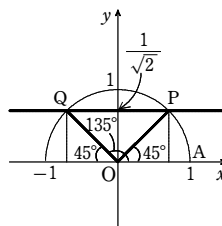
(2) 半径1の半円周上で, x座標が $\frac{1}{2}$ となる点は, 図の点Pである. 求める θ は, $\angle AOP$ であるから $\theta = 60^\circ$



(3) 直線 $x=1$ 上で, y座標が $\sqrt{3}$ となる点を T とすると, 直線 OT と半径1の半円の交点は, 図の点Pである. 求める θ は, $\angle AOP$ であるから $\theta = 60^\circ$

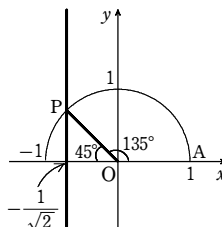


(4) $2\sin \theta = \sqrt{2}$ から $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
半径1の半円周上で, y座標が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は, 図の2点P, Qである. 求める θ は, $\angle AOP$ と $\angle AOQ$ であるから $\theta = 45^\circ, 135^\circ$



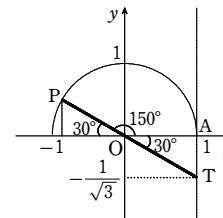
(5) $\sqrt{2} \cos \theta + 1 = 0$ から $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

半径1の半円周上で, x座標が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は, 図の点Pである. 求める θ は, $\angle AOP$ であるから $\theta = 135^\circ$



(6) $\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$ から $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

直線 $x=1$ 上で, y座標が $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる点を T とすると, 直線 OT と半径1の半円の交点は, 図の点Pである. 求める θ は, $\angle AOP$ であるから $\theta = 150^\circ$



5

解答 (1) $45^\circ < \theta < 135^\circ$ (2) $0^\circ \leq \theta < 30^\circ, 150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ (3) $150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

(4) $135^\circ < \theta \leq 180^\circ$ (5) $0^\circ < \theta \leq 45^\circ$ (6) $60^\circ \leq \theta < 90^\circ$

(7) $30^\circ < \theta \leq 60^\circ, 120^\circ \leq \theta < 150^\circ$ (8) $120^\circ \leq \theta < 150^\circ$

(9) $0^\circ \leq \theta < 60^\circ, 150^\circ < \theta \leq 180^\circ$

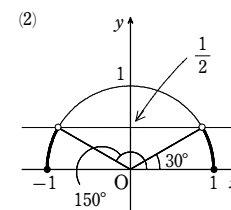
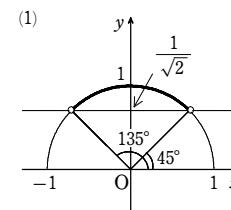
解説

(1) $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は $\theta = 45^\circ, 135^\circ$

図から, 不等式の解は $45^\circ < \theta < 135^\circ$

(2) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ は $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

図から, 不等式の解は $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ, 150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

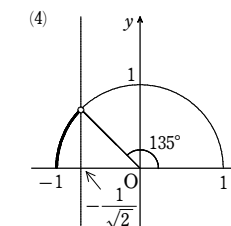
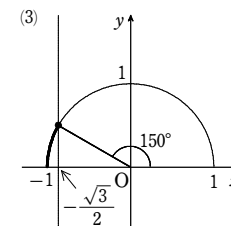


(3) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は $\theta = 150^\circ$

図から, 不等式の解は $150^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

(4) $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は $\theta = 135^\circ$

図から, 不等式の解は $135^\circ < \theta \leq 180^\circ$



(5) $\tan \theta = 0$ を満たす θ は $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

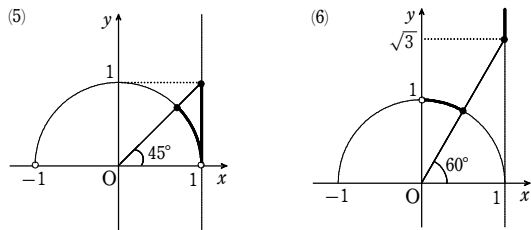
$\tan \theta = 1$ を満たす θ は $\theta = 45^\circ$

図から, 不等式の解は $0^\circ < \theta \leq 45^\circ$

(6) $\tan \theta = \sqrt{3}$ を満たす θ は $\theta = 60^\circ$

第2講 例題演習

図から、不等式の解は $60^\circ \leq \theta < 90^\circ$



(7) $1 < 2\sin\theta \leq \sqrt{3}$ から $\frac{1}{2} < \sin\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ は $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は $\theta = 60^\circ, 120^\circ$

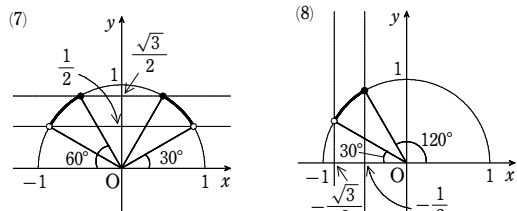
図から、不等式の解は $30^\circ < \theta \leq 60^\circ, 120^\circ \leq \theta < 150^\circ$

(8) $1 \leq -2\cos\theta < \sqrt{3}$ から $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\theta \leq -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は $\theta = 150^\circ$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ を満たす θ は $\theta = 120^\circ$

図から、不等式の解は $120^\circ \leq \theta < 150^\circ$

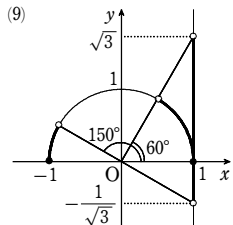


(9) $-1 < \sqrt{3}\tan\theta < 3$ から $-\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan\theta < \sqrt{3}$

$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ は $\theta = 150^\circ$

$\tan\theta = \sqrt{3}$ を満たす θ は $\theta = 60^\circ$

図から、不等式の解は $0^\circ \leq \theta < 60^\circ, 150^\circ < \theta \leq 180^\circ$



6

解答 (1) $\theta = 60^\circ$ (2) $\theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$

解説

(1) $4\sin^2\theta - 4\cos\theta - 1 = 0$ から $4(1 - \cos^2\theta) - 4\cos\theta - 1 = 0$

よって $4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 = 0$

ゆえに $(2\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 3) = 0$ …… ①

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ であるから $2\cos\theta + 3 \neq 0$

よって、①から $2\cos\theta - 1 = 0$ すなわち $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 60^\circ$

(2) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ より $2(1 - \sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$

整理して $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

よって $(\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

ゆえに $\sin\theta = 1, \frac{1}{2}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから

$\sin\theta = 1$ より $\theta = 90^\circ$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ より $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

したがって、求める θ は $\theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$

7

解答 (1) $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ, \theta = 180^\circ$ (2) $0^\circ \leq \theta < 30^\circ, 150^\circ < \theta \leq 180^\circ$

解説

(1) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ であるから $2(1 - \cos^2\theta) - \cos\theta - 1 \leq 0$

整理すると $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 \geq 0$

$\cos\theta = t$ とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $-1 \leq t \leq 1$ …… ①

不等式は $2t^2 + t - 1 \geq 0$ ゆえに $(t+1)(2t-1) \geq 0$

よって $t \leq -1, \frac{1}{2} \leq t$

①との共通範囲を求めて $t = -1, \frac{1}{2} \leq t \leq 1$

$t = -1$ すなわち $\cos\theta = -1$ を解いて $\theta = 180^\circ$

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ すなわち $\frac{1}{2} \leq \cos\theta \leq 1$ を解いて

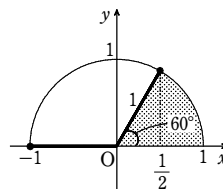
$0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$

以上から $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ, \theta = 180^\circ$

(2) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ であるから $2(1 - \sin^2\theta) + 3\sin\theta < 3$

整理すると $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 > 0$

$\sin\theta = t$ とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $0 \leq t \leq 1$ …… ①



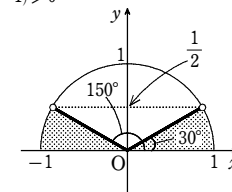
不等式は $2t^2 - 3t + 1 > 0$ ゆえに $(2t-1)(t-1) > 0$

よって $t < \frac{1}{2}, 1 < t$

①との共通範囲を求めて $0 \leq t < \frac{1}{2}$

求める解は、 $0 \leq t < \frac{1}{2}$ すなわち $0 \leq \sin\theta < \frac{1}{2}$

を解いて $0^\circ \leq \theta < 30^\circ, 150^\circ < \theta \leq 180^\circ$



8

解答 (1) $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ のとき最大値 0; $\theta = 90^\circ$ のとき最小値 -3

(2) $\theta = 0^\circ$ のとき最大値 5, $\theta = 90^\circ$ のとき最小値 -1

(3) $\theta = 120^\circ$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$, $\theta = 0^\circ$ のとき最小値 -1

解説

(1) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ であるから

$y = (1 - \sin^2\theta) - 2\sin\theta - 1 = -\sin^2\theta - 2\sin\theta$

$\sin\theta = t$ とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき

$0 \leq t \leq 1$ …… ①

y を t の式で表すと

$y = -t^2 - 2t = -(t+1)^2 + 1$

①の範囲において、 y は

$t = 0$ で最大値 0,

$t = 1$ で最小値 -3

をとる。 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから

$t = 0$ となるのは、 $\sin\theta = 0$ から $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

$t = 1$ となるのは、 $\sin\theta = 1$ から $\theta = 90^\circ$

したがって

$\theta = 0^\circ, 180^\circ$ のとき最大値 0; $\theta = 90^\circ$ のとき最小値 -3

(2) $\sin\theta = t$ とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ のとき

$0 \leq t \leq 1$ …… ①

y を t の式で表すと

$y = 2t^2 - 8t + 5 = 2(t-2)^2 - 3$

①の範囲において、 y は

$t = 0$ で最大値 5,

$t = 1$ で最小値 -1

をとる。 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ であるから

$t = 0$ となるのは、 $\sin\theta = 0$ から $\theta = 0^\circ$

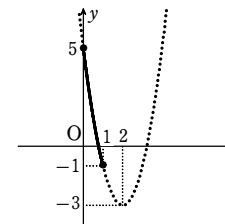
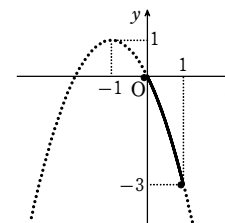
$t = 1$ となるのは、 $\sin\theta = 1$ から $\theta = 90^\circ$

したがって

$\theta = 0^\circ$ のとき最大値 5, $\theta = 90^\circ$ のとき最小値 -1

(3) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ であるから

$y = \sin^2\theta - \cos\theta = (1 - \cos^2\theta) - \cos\theta = -\cos^2\theta - \cos\theta + 1$



$\cos\theta = t$ とおくと, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき
 $-1 \leq t \leq 1$ …… ①

y を t の式で表すと

$$y = -t^2 - t + 1 = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

①の範囲において, y は

$$t = -\frac{1}{2} \text{ で最大値 } \frac{5}{4},$$

$$t = 1 \text{ で最小値 } -1$$

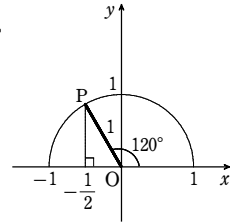
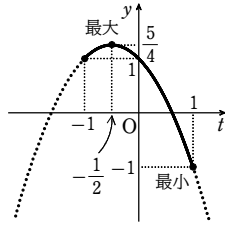
をとる. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから

$$t = -\frac{1}{2} \text{ となるのは, } \cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ から } \theta = 120^\circ$$

$$t = 1 \text{ となるのは, } \cos\theta = 1 \text{ から } \theta = 0^\circ$$

よって $\theta = 120^\circ$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$,

$\theta = 0^\circ$ のとき最小値 -1



1

- 解答 (1) $2 \leq \sin\theta + 2 \leq 3$ (2) $-2 \leq 2\cos\theta \leq 2$ (3) $-1 \leq 2\sin\theta - 1 \leq 1$
 (4) $-2 \leq -3\cos\theta + 1 \leq 4$ (5) $1 \leq 2\tan\theta + 1 \leq 2\sqrt{3} + 1$
 (6) $\tan^2\theta + 1 \geq 1$

解説

- (1) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $0 \leq \sin\theta \leq 1$
 各辺に 2 を加えて $2 \leq \sin\theta + 2 \leq 3$
 (2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $-1 \leq \cos\theta \leq 1$
 各辺に 2 を掛けて $-2 \leq 2\cos\theta \leq 2$
 (3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $0 \leq \sin\theta \leq 1$
 各辺に 2 を掛けて $0 \leq 2\sin\theta \leq 2$
 各辺から 1 を引いて $-1 \leq 2\sin\theta - 1 \leq 1$
 (4) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $-1 \leq \cos\theta \leq 1$
 各辺に -3 を掛けて $-3 \leq -3\cos\theta \leq 3$
 各辺に 1 を加えて $-2 \leq -3\cos\theta + 1 \leq 4$
 (5) $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ のとき $0 \leq \tan\theta \leq \sqrt{3}$
 各辺に 2 を掛けて $0 \leq 2\tan\theta \leq 2\sqrt{3}$
 各辺に 1 を加えて $1 \leq 2\tan\theta + 1 \leq 2\sqrt{3} + 1$
 (6) $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ のとき $\tan\theta \geq 0$
 両辺を 2 乗して $\tan^2\theta \geq 0$
 両辺に 1 を加えて $\tan^2\theta + 1 \geq 1$

2

- 解答 (1) 1 (2) 2 (3) -1 (4) 1

解説

(1) (与式) $= \sin\theta \sin\theta - \cos\theta(-\cos\theta) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2) (与式) $= \cos^2\theta + \sin^2\theta + (-\sin\theta)^2 + (-\cos\theta)^2$
 $= \cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta$
 $= 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 2$

(3) $\cos 124^\circ = \cos(180^\circ - 56^\circ) = -\cos 56^\circ$
 $\cos 146^\circ = \cos(90^\circ + 56^\circ) = -\sin 56^\circ$

よって (与式) $= \cos 56^\circ(-\cos 56^\circ) + \sin 56^\circ(-\sin 56^\circ)$
 $= -\cos^2 56^\circ - \sin^2 56^\circ$
 $= -(\sin^2 56^\circ + \cos^2 56^\circ) = -1$

(4) $\tan 130^\circ = \tan(90^\circ + 40^\circ) = -\frac{1}{\tan 40^\circ}$

よって (与式) $= \frac{1}{\sin^2 40^\circ} - \left(-\frac{1}{\tan 40^\circ}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 40^\circ} - \left(-\frac{\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ}\right)^2$
 $= \frac{1}{\sin^2 40^\circ} - \frac{\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ} = \frac{1 - \cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ} = \frac{\sin^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ} = 1$

3

- 解答 (1) $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$ (2) $\frac{1-\sqrt{7}}{4}$ (3) $-\frac{4+\sqrt{7}}{3}$

解説

(1) $\cos\theta + \sin\theta = \frac{1}{2}$ から $\cos\theta = \frac{1}{2} - \sin\theta$

これを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると $\sin^2\theta + \left(\frac{1}{2} - \sin\theta\right)^2 = 1$

整理して $2\sin^2\theta - \sin\theta - \frac{3}{4} = 0$

よって $8\sin^2\theta - 4\sin\theta - 3 = 0$ これを解くと $\sin\theta = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より $0 \leq \sin\theta \leq 1$ であるから $\sin\theta = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$

(2) (1) より $\cos\theta = \frac{1}{2} - \frac{1 + \sqrt{7}}{4} = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$

(3) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1 + \sqrt{7}}{4}}{\frac{1 - \sqrt{7}}{4}} = \frac{1 + \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}} = \frac{(1 + \sqrt{7})^2}{(1 - \sqrt{7})(1 + \sqrt{7})} = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{-6} = -\frac{4 + \sqrt{7}}{3}$

4

- 解答 (ア) 2 (イ) 2 (ウ) 1 (エ) $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ (オ) 1

- (カ) $45^\circ, 135^\circ$ (キ) $\frac{1}{2}$

解説

$\cos^4\theta = (\cos^2\theta)^2 = (1 - \sin^2\theta)^2$ であるから

$$y = \sin^4\theta + (1 - \sin^2\theta)^2 = (\sin^2\theta)^2 + (1 - \sin^2\theta)^2$$

$\sin^2\theta = t$ とおくと, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $0 \leq t \leq 1$ …… ①

y を t の式で表すと

$$y = t^2 + (1 - t)^2 = 2t^2 - 2t + 1$$

$$= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

①の範囲において, y は

$$t = 0, 1 \text{ のとき最大値 } 1; t = \frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{1}{2}$$

をとる. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ では, $\sin\theta \geq 0$ であるから

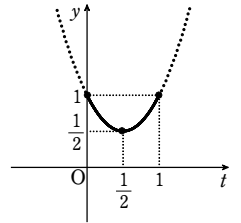
$$t = 0 \text{ となるのは, } \sin^2\theta = 0 \text{ から } \theta = 0^\circ, 180^\circ$$

$$t = 1 \text{ となるのは, } \sin^2\theta = 1 \text{ から } \theta = 90^\circ$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ となるのは, } \sin^2\theta = \frac{1}{2} \text{ から } \theta = 45^\circ, 135^\circ$$

よって $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ のとき最大値 1

$\theta = 45^\circ, 135^\circ$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$



1

【解答】 $x=60^\circ, y=30^\circ$ または $x=120^\circ, y=30^\circ$

【解説】

第1式から $(1-\sin^2 x) + (1-\cos^2 y) = \frac{1}{2}$

よって $\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}$ ……①

第2式から $\sin x(-\cos y) = -\frac{3}{4}$

よって $\sin x \cos y = \frac{3}{4}$ ……②

②の両辺を2乗して、①を代入すると $\sin^2 x \left(\frac{3}{2} - \sin^2 x\right) = \frac{9}{16}$

整理して $16\sin^4 x - 24\sin^2 x + 9 = 0$ ゆえに $(4\sin^2 x - 3)^2 = 0$

よって $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ より $\sin x \geq 0$ であるから $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって $x=60^\circ, 120^\circ$

②から $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos y = \frac{3}{4}$ ゆえに $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって $y=30^\circ$

以上から $x=60^\circ, y=30^\circ$ または $x=120^\circ, y=30^\circ$

2

【解答】 (1) $a=\sqrt{2}, \theta=45^\circ$

(2) $\theta=0^\circ$ のとき最大値 $a+1, \theta=180^\circ$ のとき最小値 $-a+1$

【解説】

(1) $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ であるから

$$f(\theta) = \sin^2 \theta + a \cos \theta + 1 = -\cos^2 \theta + a \cos \theta + 2$$

$\cos \theta = t$ とおくと、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $-1 \leq t \leq 1$ ……①

$f(\theta)$ を t の式で表すと $f(\theta) = -t^2 + at + 2 = -\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 2$

$0 < \frac{a}{2} < 1$ であるから、①の範囲において、 $f(\theta)$ は $t = \frac{a}{2}$ のとき最大値 $\frac{a^2}{4} + 2$ をと

る。最大値が $\frac{5}{2}$ となるための条件は $\frac{a^2}{4} + 2 = \frac{5}{2}$

ゆえに $a^2 = 2$ $0 < a < 2$ であるから $a = \sqrt{2}$

このとき、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ から $\theta = 45^\circ$

(2) $a \geq 2$ のとき、 $y=f(\theta)$ のグラフの軸について

$$t = \frac{a}{2} \geq 1$$

したがって、①の範囲において、 $f(\theta)$ は

$t=1$ で最大値 $a+1, t=-1$ で最小値 $-a+1$

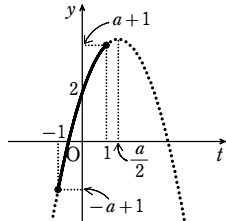
をとる。 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから

$t=1$ となるのは、 $\cos \theta = 1$ から $\theta = 0^\circ$

$t=-1$ となるのは、 $\cos \theta = -1$ から $\theta = 180^\circ$

よって $\theta = 0^\circ$ のとき最大値 $a+1,$

$\theta = 180^\circ$ のとき最小値 $-a+1$



3

【解答】 (1) $30^\circ < \theta < 60^\circ, 120^\circ < \theta < 150^\circ$ (2) 略 (3) $120^\circ < \theta < 150^\circ$

【解説】

(1) この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-2\cos\theta)^2 - \{-2(1+\sqrt{3})\sin\theta + 4 + \sqrt{3}\}$$

$$= 4\cos^2\theta + (2+2\sqrt{3})\sin\theta - 4 - \sqrt{3}$$

$$= 4(1-\sin^2\theta) + (2+2\sqrt{3})\sin\theta - 4 - \sqrt{3}$$

$$= -[4\sin^2\theta - (2+2\sqrt{3})\sin\theta + \sqrt{3}]$$

$$= -(2\sin\theta - 1)(2\sin\theta - \sqrt{3})$$

異なる2つの実数解をもつとき、 $D > 0$ であるから

$$-(2\sin\theta - 1)(2\sin\theta - \sqrt{3}) > 0$$

ゆえに $(2\sin\theta - 1)(2\sin\theta - \sqrt{3}) < 0$

よって $\frac{1}{2} < \sin\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $30^\circ < \theta < 60^\circ, 120^\circ < \theta < 150^\circ$

(2) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $0 < \sin\theta \leq 1$

$\sin\theta = t$ とおくと $0 < t \leq 1$

$f(t) = -2(1+\sqrt{3})t + 4 + \sqrt{3}$ とすると、 $y=f(t)$ のグラフは傾きが負の直線である。

ゆえに、1次関数 $f(t)$ は単調に減少する。

また $f(1) = 2 - \sqrt{3} > 0$

よって、 $0 < t \leq 1$ の範囲で常に $f(t) > 0$

したがって、与えられた不等式が常に成り立つ。

(3) $g(x) = x^2 - 4(\cos\theta)x - 2(1+\sqrt{3})\sin\theta + 4 + \sqrt{3}$

とする。このとき、放物線 $y=g(x)$ の軸は直線

$x = 2\cos\theta$ である。

与えられた2次方程式が異なる2つの実数解をもち、

それらがともに負となるような条件は

$$\begin{cases} D > 0 & \dots\dots ① \\ g(0) > 0 & \dots\dots ② \\ 2\cos\theta < 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$\begin{cases} D > 0 & \dots\dots ① \\ g(0) > 0 & \dots\dots ② \\ 2\cos\theta < 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①は、(1)から

$$30^\circ < \theta < 60^\circ, 120^\circ < \theta < 150^\circ \dots\dots ④$$

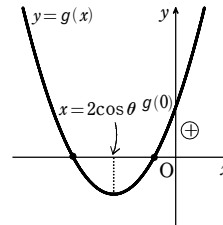
②は、 $g(0) = -2(1+\sqrt{3})\sin\theta + 4 + \sqrt{3} > 0$ であり、(2)から、この不等式は

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき常に成り立つ。

③から $\cos\theta < 0$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $90^\circ < \theta < 180^\circ \dots\dots ⑤$

ゆえに、④、⑤の共通範囲を求めて $120^\circ < \theta < 150^\circ$



1

【解答】 (1) $b=\sqrt{3}$ (2) $C=60^\circ, 120^\circ$ (3) $R=5\sqrt{3}$ (4) $B=30^\circ, 150^\circ$

【解説】

(1) 正弦定理により $\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 120^\circ}$

よって $b = \sqrt{2} \cdot \sin 120^\circ \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ}$
 $= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3}$

(2) 正弦定理により $\frac{15}{\sin 30^\circ} = \frac{15\sqrt{3}}{\sin C}$

よって $\sin C = \frac{15\sqrt{3}}{15} \cdot \sin 30^\circ$
 $= \frac{15\sqrt{3}}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$B=30^\circ$ より $0^\circ < C < 150^\circ$ であるから $C=60^\circ, 120^\circ$

(3) 正弦定理により $\frac{5\sqrt{3}}{\sin 150^\circ} = 2R$

よって $R = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot \frac{2}{1} = 5\sqrt{3}$

(4) 正弦定理により $\frac{5}{\sin B} = 2 \cdot 5$

よって $\sin B = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2}$

したがって $B=30^\circ, 150^\circ$

2

【解答】 (1) $a=\sqrt{5}$ (2) $B=60^\circ$

【解説】

(1) 余弦定理から $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $= 3^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cos 45^\circ$
 $= 9 + 2 - 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5$

$a > 0$ であるから $a = \sqrt{5}$

(2) 余弦定理から $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{40}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2}$

よって $B=60^\circ$

3

【解答】 $c=1+\sqrt{3}$

【解説】

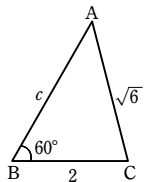
余弦定理により

$$(\sqrt{6})^2 = c^2 + 2^2 - 2 \cdot c \cdot 2 \cos 60^\circ$$

整理すると $c^2 - 2c - 2 = 0$

これを解いて $c = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \cdot (-2)} = 1 \pm \sqrt{3}$

$c > 0$ であるから $c = 1 + \sqrt{3}$



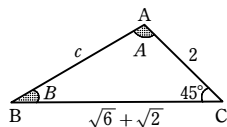
4

【解答】 $c = 2\sqrt{2}$, $A = 105^\circ$, $B = 30^\circ$

【解説】

余弦定理により

$$\begin{aligned} c^2 &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot 2 \cos 45^\circ \\ &= (6 + 2\sqrt{12} + 2) + 4 - 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 12 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$



$c > 0$ であるから $c = 2\sqrt{2}$

正弦定理により $\frac{2}{\sin B} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$

よって $\sin B = \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \sin 45^\circ = \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$A + B = 180^\circ - C = 135^\circ$ であるから $B < 135^\circ$

ゆえに $B = 30^\circ$

したがって $A = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

5

【解答】 (1) $5 : 8 : 7$ (2) 60°

【解説】

(1) 正弦定理により

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 5 : 8 : 7$$

(2) (1) から, $a = 5k$, $b = 8k$, $c = 7k$ ($k > 0$) とおける。

$a < c < b$ であるから $A < C < B$

よって, C が 2 番目に大きい角である。

余弦定理により

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(5k)^2 + (8k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 8k} = \frac{40k^2}{2 \cdot 5 \cdot 8k^2} = \frac{1}{2}$$

よって $C = 60^\circ$

したがって, 求める角の大きさは 60°

6

【解答】 (1) $b = c$ の二等辺三角形 (2) $A = 90^\circ$ または $B = 90^\circ$ の直角三角形

【解説】

(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。

正弦定理により $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

これらを等式に代入すると $b \cdot \frac{b}{2R} = c \cdot \frac{c}{2R}$

両辺に $2R$ を掛けて $b^2 = c^2$ $b > 0$, $c > 0$ であるから $b = c$

よって, $\triangle ABC$ は $b = c$ の二等辺三角形である。

(2) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

これらを等式に代入すると $a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

両辺に $2abc$ を掛けて $a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) = c^2(a^2 + b^2 - c^2)$

整理して $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - c^4 = 0$

よって $(a^2 - b^2)^2 - (c^2)^2 = 0$

ゆえに $(a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2) = 0$

したがって $a^2 - b^2 - c^2 = 0$ または $a^2 - b^2 + c^2 = 0$

すなわち $a^2 = b^2 + c^2$ または $a^2 + c^2 = b^2$

よって, $\triangle ABC$ は $A = 90^\circ$ または $B = 90^\circ$ の直角三角形である。

1

【解答】 (1) $a = 10\sqrt{3}$ (2) $b = 6\sqrt{6}$ (3) $A = 30^\circ$ (4) $B = 30^\circ, 150^\circ$
(5) $R = 5$

【解説】

(1) 正弦定理により $\frac{a}{\sin 120^\circ} = 2 \cdot 10$

よって $a = 2 \cdot 10 \sin 120^\circ = 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

(2) $A = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

正弦定理により $\frac{12}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$

よって $b = 12 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{6}$

(3) 正弦定理により $\frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$

よって $\sin A = \frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$C = 120^\circ$ より $0^\circ < A < 60^\circ$ であるから $A = 30^\circ$

(4) 正弦定理により $\frac{5}{\sin B} = 2 \cdot 5$

よって $\sin B = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2}$ したがって $B = 30^\circ, 150^\circ$

(5) $C = 180^\circ - (50^\circ + 100^\circ) = 30^\circ$

正弦定理により $\frac{5}{\sin 30^\circ} = 2R$ よって $R = \frac{5}{2 \sin 30^\circ} = 5$

2

【解答】 (1) $b = 2\sqrt{7}$ (2) $a = 5$ (3) $A = 60^\circ$ (4) $C = 45^\circ$

【解説】

(1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 60^\circ = 28 \end{aligned}$$

$b > 0$ であるから $b = 2\sqrt{7}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= (2\sqrt{2} - 1)^2 + (2\sqrt{2} + 1)^2 - 2 \cdot (2\sqrt{2} - 1) \cdot (2\sqrt{2} + 1) \cos 120^\circ \\ &= (9 - 4\sqrt{2}) + (9 + 4\sqrt{2}) + 7 = 25 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから $a = \sqrt{25} = 5$

(3) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 7 \cdot 15} \\ &= \frac{105}{2 \cdot 7 \cdot 15} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって $A = 60^\circ$

(4) 余弦定理により

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}}$$

第3講 例題演習

$$= \frac{2+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $C=45^\circ$

3

【解答】 (1) $a=\sqrt{3}+1$ (2) $c=2+2\sqrt{3}$

【解説】

(1) 余弦定理により $b^2=c^2+a^2-2cacosB$ であるから

$$(\sqrt{2})^2=2^2+a^2-2\cdot 2\cdot acos30^\circ$$

$$\text{よって } a^2-2\sqrt{3}a+2=0$$

$$\text{これを解いて } a=\sqrt{3}+1$$

(2) 余弦定理により $a^2=b^2+c^2-2bccosA$ であるから

$$(2\sqrt{6})^2=4^2+c^2-2\cdot 4\cdot ccos60^\circ$$

$$\text{よって } c^2-4c-8=0$$

$$\text{これを解いて } c=2\pm 2\sqrt{3}$$

$$c>0 \text{ であるから } c=2+2\sqrt{3}$$

4

【解答】 (1) $A=120^\circ, b=\sqrt{2}, c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (2) $a=\sqrt{2}, B=45^\circ, C=105^\circ$

【解説】

(1) $A=180^\circ-(B+C)=120^\circ$

$$\text{正弦定理により } \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$

$$\text{よって } b = \frac{\sqrt{3} \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\text{余弦定理により } (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + c^2 - 2\sqrt{2}ccos120^\circ$$

$$c^2 + \sqrt{2}c - 1 = 0 \text{ を解いて } c = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$c>0 \text{ であるから } c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

【別解】 (後半) $b^2=c^2+a^2-2cacosB$ を用いると, $c^2-\sqrt{6}c+1=0$ から

$$c = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2} \quad B>C \text{ であるから } b>c$$

$$\text{よって } c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

(2) 余弦定理により $a^2=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot 2(\sqrt{3}+1)cos30^\circ$

$$= 4+(4+2\sqrt{3})-2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=2$$

$$a>0 \text{ であるから } a=\sqrt{2}$$

余弦定理により

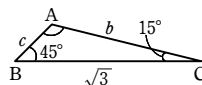
$$cosB = \frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}+1)\cdot \sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{2(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ゆえに } B=45^\circ$$

$$\text{よって } C=180^\circ-(A+B)=105^\circ$$

【別解】 (後半) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ を用いると $\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$



ゆえに $B=45^\circ, 135^\circ$

$a<b<c$ であるから, $\angle C$ が最大角。

よって $B=45^\circ$

5

【解答】 $C=135^\circ$

【解説】

正弦定理により $a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$

$$\text{よって } a:b:c = 1:\sqrt{2}:\sqrt{5}$$

ゆえに, $a=k, b=\sqrt{2}k, c=\sqrt{5}k (k>0)$ とおける。

よって, 辺 AB が最大辺で, $\angle C$ が最大の角である。

$$\text{余弦定理により } cosC = \frac{k^2+(\sqrt{2}k)^2-(\sqrt{5}k)^2}{2\cdot k\cdot \sqrt{2}k} = \frac{-2k^2}{2\sqrt{2}k^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって, 最大の角の大きさは $C=135^\circ$

6

【解答】 (1) BC=CA の二等辺三角形 (2) $A=90^\circ$ の直角三角形 (3) 正三角形

(4) $\angle B=90^\circ$ または $\angle C=90^\circ$ の直角三角形

【解説】

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。

(1) 正弦定理により $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$

$$\text{これらを等式 } a\sin A = b\sin B \text{ に代入して } a \cdot \frac{a}{2R} = b \cdot \frac{b}{2R}$$

$$\text{両辺に } 2R \text{ を掛けて } a^2 = b^2$$

$$a>0, b>0 \text{ であるから } a=b$$

よって, $\triangle ABC$ は BC=CA の二等辺三角形

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。

$$\text{正弦定理により } \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\text{これらを等式に代入すると } \left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}\right)(b+c-a) = 2c \cdot \frac{b}{2R}$$

$$\text{よって } (a+b+c)(b+c-a) = 2bc$$

$$\text{ゆえに } b^2+2bc+c^2-a^2=2bc \quad \text{したがって } b^2+c^2=a^2$$

よって, $\triangle ABC$ は $A=90^\circ$ の直角三角形である。

(3) 等式から $\frac{cosA}{a} = \frac{cosB}{b} \dots\dots ①, \frac{cosB}{b} = \frac{cosC}{c} \dots\dots ②$

余弦定理により

$$cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad cosB = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \quad cosC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

これらを ①, ② に代入すると

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{b} \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \quad \dots\dots ①'$$

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{1}{c} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad \dots\dots ②'$$

$$①' \text{ から } b^2+c^2-a^2=c^2+a^2-b^2 \quad \text{整理すると } a^2=b^2$$

$$a>0, b>0 \text{ であるから } a=b \quad \dots\dots ③$$

$$②' \text{ から } c^2+a^2-b^2=a^2+b^2-c^2 \quad \text{整理すると } b^2=c^2$$

$$b>0, c>0 \text{ であるから } b=c \quad \dots\dots ④$$

③, ④ から $a=b=c$ よって, $\triangle ABC$ は 正三角形

(4) 正弦定理, 余弦定理により

$$\frac{a}{2R} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{c}{2R} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

両辺に $4Rabc$ を掛けて

$$a^2(b^2+c^2-a^2) = b^2(c^2+a^2-b^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)$$

$$\text{ゆえに } a^2b^2+a^2c^2-a^4 = b^2c^2+b^2a^2-b^4 + c^2a^2+c^2b^2-c^4$$

$$\text{整理すると } a^4-b^4+2b^2c^2-c^4=0$$

$$\text{したがって } a^4-(b^2-c^2)^2=0$$

$$\text{よって } \{a^2+(b^2-c^2)\}\{a^2-(b^2-c^2)\}=0$$

$$\text{ゆえに } a^2+b^2=c^2 \text{ または } a^2+c^2=b^2$$

したがって, $\triangle ABC$ は $\angle B=90^\circ$ または $\angle C=90^\circ$ の直角三角形

第3講 レベルA

1

【解答】 $c = \sqrt{3} + 1$, $B = 45^\circ$, $C = 105^\circ$ または $c = \sqrt{3} - 1$, $B = 135^\circ$, $C = 15^\circ$

【解説】

余弦定理より $(\sqrt{2})^2 = 2^2 + c^2 - 2 \cdot 2c \cos 30^\circ$
 よって $c^2 - 2\sqrt{3}c + 2 = 0$ したがって $c = \sqrt{3} \pm 1$

[1] $c = \sqrt{3} + 1$ のとき

$$\cos B = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2(\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

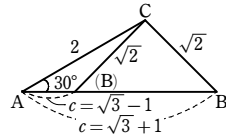
ゆえに $B = 45^\circ$
 よって $C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$

[2] $c = \sqrt{3} - 1$ のとき

$$\cos B = \frac{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2(\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt{2}} = \frac{2(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに $B = 135^\circ$ よって $C = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ$

以上から $c = \sqrt{3} + 1$, $B = 45^\circ$, $C = 105^\circ$
 または $c = \sqrt{3} - 1$, $B = 135^\circ$, $C = 15^\circ$



【解説】 正弦定理から $\frac{2}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$ ゆえに $\sin B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$A = 30^\circ$ より, $0^\circ < B < 150^\circ$ であるから $B = 45^\circ$, 135°

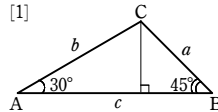
[1] $B = 45^\circ$ のとき

$$C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

$$c = b \cos A + a \cos B$$

$$= 2 \cos 30^\circ + \sqrt{2} \cos 45^\circ$$

$$= \sqrt{3} + 1$$



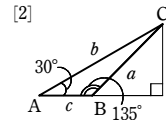
[2] $B = 135^\circ$ のとき

$$C = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ$$

$$c = b \cos A + a \cos B$$

$$= 2 \cos 30^\circ + \sqrt{2} \cos 135^\circ$$

$$= \sqrt{3} - 1$$



2

【解答】 $AC = 500\sqrt{3}$ (m), $AD = \frac{500\sqrt{6}}{3}$ (m), $DC = \frac{500\sqrt{15}}{3}$ (m)

【解説】

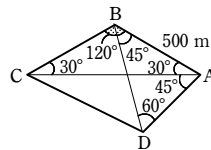
$$\angle ABC = 180^\circ - 2 \times 30^\circ = 120^\circ$$

$\triangle ABC$ において, 正弦定理により

$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{500}{\sin 30^\circ}$$

$$\text{よって } AC = \frac{500}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 120^\circ$$

$$= 500 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3} \text{ (m)}$$



次に, $\triangle ABD$ において, 正弦定理により $\frac{AD}{\sin 45^\circ} = \frac{500}{\sin 60^\circ}$

$$\text{よって } AD = \frac{500}{\sin 60^\circ} \cdot \sin 45^\circ = 500 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{500\sqrt{6}}{3} \text{ (m)}$$

また $\angle CAD = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$

よって, $\triangle ACD$ において, 余弦定理により

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos 45^\circ$$

$$= (500\sqrt{3})^2 + \left(\frac{500\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 2 \cdot 500\sqrt{3} \cdot \frac{500\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 500^2 \left(3 + \frac{2}{3} - 2\right) = 500^2 \cdot \frac{5}{3}$$

$DC > 0$ であるから $DC = \sqrt{500^2 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{500\sqrt{15}}{3}$ (m)

3

【解答】 $AM = 2\sqrt{7}$, $AD = \sqrt{33}$

【解説】

$\triangle ABC$ において, 余弦定理により

$$\cos B = \frac{7^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{7}$$

また $BM = 3$, $BD = 2$

$\triangle ABM$ において, 余弦定理により

$$AM^2 = 7^2 + 3^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \frac{5}{7} = 28$$

$AM > 0$ であるから $AM = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\triangle ABD$ において, 余弦定理により

$$AD^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \frac{5}{7} = 33$$

$AD > 0$ であるから $AD = \sqrt{33}$

4

【解答】 (1) $2\sqrt{7}$ (2) 4

【解説】

(1) $\triangle ABC$ において, 余弦定理により

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ$$

$$= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 36 + 16 - 24 = 28$$

$AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

(2) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

よって $\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

(1) から $AC = 2\sqrt{7}$

$\triangle ADC$ において, 余弦定理により

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos 120^\circ$$

$$\text{よって } (2\sqrt{7})^2 = AD^2 + 2^2 - 2 \cdot AD \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

整理すると $AD^2 + 2AD - 24 = 0$

$$(AD + 6)(AD - 4) = 0$$

$AD > 0$ であるから $AD = 4$

5

【解答】 (1) 150° (2) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

【解説】

(1) 正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ から $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

条件から $\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

よって $a : b : c = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

ゆえに, $a = \sqrt{7}k$, $b = \sqrt{3}k$, $c = k$ ($k > 0$) とおける。

よって, a が最大の辺であるから, $\angle A$ が最大の角である。

$$\text{余弦定理により } \cos A = \frac{(\sqrt{3}k)^2 + k^2 - (\sqrt{7}k)^2}{2 \cdot \sqrt{3}k \cdot k} = \frac{-3k^2}{2\sqrt{3}k^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって, 最大の角の大きさは $A = 150^\circ$

(2) (1) から, 2 番目に大きい角は $\angle B$

$$\text{余弦定理により } \cos B = \frac{k^2 + (\sqrt{7}k)^2 - (\sqrt{3}k)^2}{2 \cdot k \cdot \sqrt{7}k} = \frac{5k^2}{2\sqrt{7}k^2} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$1 + \tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B}$ であるから

$$\tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B} - 1 = \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{28}{25} - 1 = \frac{3}{25}$$

$A > 90^\circ$ より $B < 90^\circ$ であるから $\tan B > 0$

$$\text{したがって } \tan B = \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

6

【解答】 (1) 略 (2) 略

【解説】

(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。

$$\text{正弦定理により } \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\text{よって 左辺} = c \left[\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \right] = \frac{c(a^2 + b^2)}{4R^2}$$

$$\text{右辺} = \left(a \cdot \frac{a}{2R} + b \cdot \frac{b}{2R}\right) \cdot \frac{c}{2R} = \frac{c(a^2 + b^2)}{4R^2}$$

したがって 左辺 = 右辺

(2) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\text{よって 左辺} = 2 \left(bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + ca \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)$$

$$= (b^2 + c^2 - a^2) + (c^2 + a^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

したがって 左辺 = 右辺

1

解答 120°

解説

$x > 1$ のとき $x^2 + x + 1 - (x^2 - 1) = x + 2 > 0$

$$x^2 + x + 1 - (2x + 1) = x^2 - x = x(x - 1) > 0$$

よって、3辺の長さを $x^2 - 1$, $2x + 1$, $x^2 + x + 1$ とする三角形が存在するための条件は

$$x^2 + x + 1 < (x^2 - 1) + (2x + 1)$$

整理すると $x > 1$

したがって、 $x > 1$ のとき三角形が存在する。

また、長さが $x^2 + x + 1$ である辺が最大の辺であるから、この辺に対する角が最大の内角である。

この角を θ とすると、余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(x^2 - 1)^2 + (2x + 1)^2 - (x^2 + x + 1)^2}{2(x^2 - 1)(2x + 1)} \\ &= \frac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2 + 4x + 1 - (x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x + 2x^2)}{2(x^2 - 1)(2x + 1)} \\ &= \frac{-2x^3 - x^2 + 2x + 1}{2(x^2 - 1)(2x + 1)} = \frac{-2x^3 + x^2 - 2x - 1}{2(x^2 - 1)(2x + 1)} \\ &= -\frac{(x^2 - 1)(2x + 1)}{2(x^2 - 1)(2x + 1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって $\theta = 120^\circ$

2

解答 (ア) $\frac{6}{7} < a < 2$ (イ) $\frac{3}{2}$

解説

(ア) 三角形の成立条件から

$$BC + CA > AB, CA + AB > BC, AB + BC > CA$$

よって

$$a + (3a - 2) > 5a - 4, (3a - 2) + (5a - 4) > a, (5a - 4) + a > 3a - 2$$

それぞれを解くと $a < 2, a > \frac{6}{7}, a > \frac{2}{3}$

これらの共通範囲を求めて $\frac{6}{7} < a < 2$ ……①

(イ) 正弦定理から $\frac{5a - 4}{\sin C} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} (5a - 4)$

よって $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって $C = 60^\circ$ または 120°

[1] $C = 60^\circ$ のとき、余弦定理から

$$(5a - 4)^2 = a^2 + (3a - 2)^2 - 2a(3a - 2)\cos 60^\circ$$

整理すると $18a^2 - 30a + 12 = 0$

$$6(a - 1)(3a - 2) = 0$$

①を満たすのは $a = 1$

このとき、 $AB = BC = CA = 1$ であるから、 $\triangle ABC$ は正三角形となり不適。

[2] $C = 120^\circ$ のとき、余弦定理から

$$(5a - 4)^2 = a^2 + (3a - 2)^2 - 2a(3a - 2)\cos 120^\circ$$

整理すると $12a^2 - 26a + 12 = 0$

$$2(2a - 3)(3a - 2) = 0$$

①を満たすのは $a = \frac{3}{2}$

3

解答 (1) 略 (2) $AM = 7$

解説

(1) $\angle AMB = \theta$ とすると $\angle AMC = 180^\circ - \theta$

$\triangle AMB$ において、余弦定理により

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cos \theta \quad \dots\dots ①$$

$\triangle AMC$ において、余弦定理により

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \cos(180^\circ - \theta)$$

$CM = BM$, $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ であるから

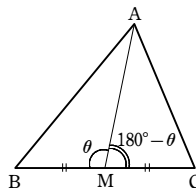
$$AC^2 = AM^2 + BM^2 + 2AM \cdot BM \cos \theta \quad \dots\dots ②$$

①+②から $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

(2) $AB = 9, AC = 7, BM = 4$ を (1) で証明した等式に代入すると

$$9^2 + 7^2 = 2(AM^2 + 4^2) \quad \text{よって} \quad AM^2 = 49$$

$AM > 0$ であるから $AM = 7$



1

解答 (1) $S = \frac{35}{2}$ (2) $S = 6\sqrt{11}$

解説

$$(1) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{2}$$

$$(2) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{120}{2 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{5}{6}$$

$$\sin A > 0 \text{ であるから } \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 6\sqrt{11}$$

別解 ヘロンの公式を用いると、 $s = \frac{5+9+8}{2} = 11$ であるから

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{11 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3} = 6\sqrt{11}$$

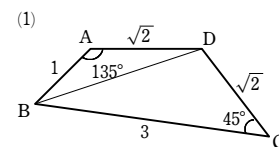
2

解答 (1) 2 (2) $\frac{15\sqrt{3}}{4} + 4\sqrt{6}$

解説

(1) 四角形 ABCD の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \sin 135^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \end{aligned}$$



(2) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用して

$$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ = 49$$

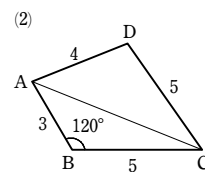
$\triangle ACD$ に余弦定理を適用して

$$\cos D = \frac{5^2 + 4^2 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 4} = -\frac{1}{5}$$

$$\sin D > 0 \text{ であるから } \sin D = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

よって、四角形 ABCD の面積 S は

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{15\sqrt{3}}{4} + 4\sqrt{6}$$



3

解答 (ア) $\frac{5}{7}$ (イ) $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ (ウ) $4\sqrt{6}$ (エ) $\frac{35\sqrt{6}}{24}$ (オ) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

解説

$$\text{余弦定理により } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{40}{2 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{5}{7}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ であるから $\sin A > 0$

$$\text{よって } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$\text{ゆえに } S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} = 4\sqrt{6}$$

さらに、正弦定理により $\frac{a}{\sin A} = 2R$

したがって $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{5}{2 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7}} = \frac{35}{4\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}$

また、 $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ と表されるから $4\sqrt{6} = \frac{1}{2}r(5+7+4)$

よって $r = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

4

解答 (1) $\sqrt{17}$ (2) $6\sqrt{2}$

解説

(1) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$C = 180^\circ - A$$

$\triangle ABD$ において、余弦定理により

$$\begin{aligned} BD^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos A \\ &= 13 - 12 \cos A \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\triangle BCD$ において、余弦定理により

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos(180^\circ - A) \\ &= 25 + 24 \cos A \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② から $13 - 12 \cos A = 25 + 24 \cos A$

整理して $36 \cos A = -12$ よって $\cos A = -\frac{1}{3}$ $\dots\dots \textcircled{3}$

これを①に代入して $BD^2 = 13 - 12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 17$

$BD > 0$ であるから $BD = \sqrt{17}$

(2) $\sin A > 0$ であるから、③より

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって $\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

したがって、四角形 ABCD の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin A + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \sin C \\ &= 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

5

解答 (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{\sqrt{91}}{10}$ (3) $\frac{3\sqrt{91}}{2}$

解説

(1) 三平方の定理により $AF = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$

$$CF = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

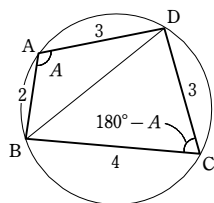
$$AC = \sqrt{4^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{43}$$

よって、 $\triangle AFC$ において、余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{AF^2 + CF^2 - AC^2}{2AF \cdot CF} = \frac{36 + 25 - 43}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{18}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{10}$$

(2) $\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{91}{100}} = \frac{\sqrt{91}}{10}$$



1

解答 (1) $14\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (4) $6\sqrt{10}$ (5) $\sqrt{5}$

解説

$\triangle ABC$ の面積を S とする。

(1) $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \sin 45^\circ = 14\sqrt{2}$

(2) $S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} \sin 150^\circ = \sqrt{3}$

(3) $C = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$

よって $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} \sin 45^\circ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

(4) 余弦定理により $\cos A = \frac{6^2 + 7^2 - 11^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{-36}{2 \cdot 6 \cdot 7} = -\frac{3}{7}$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

よって $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} = 6\sqrt{10}$

(5) 余弦定理により $\cos A = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{8}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

よって $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$

2

解答 (1) 7 (2) $-\frac{1}{5}$ (3) $\frac{15\sqrt{3}}{4} + 4\sqrt{6}$

解説

(1) $\triangle ABD$ において、余弦定理により

$$BD^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 120^\circ = 49$$

$BD > 0$ であるから $BD = \sqrt{49} = 7$

(2) $\triangle BCD$ において、余弦定理により

$$\cos C = \frac{5^2 + 4^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{-8}{2 \cdot 5 \cdot 4} = -\frac{1}{5}$$

(3) $\sin C > 0$ であるから

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

よって、四角形 ABCD の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{15\sqrt{3}}{4} + 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

3

解答 (ア) $\frac{3}{4}$ (イ) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ (ウ) $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ (エ) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (オ) $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

解説

(3) $\triangle AFC = \frac{1}{2}AF \cdot CF \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{91}}{10} = \frac{3\sqrt{91}}{2}$

6

解答 (1) $V = 1$ (2) $S = \frac{7}{2}$ (3) $\frac{6}{7}$

解説

(1) $\triangle OBC = \frac{1}{2}OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$, $OA = 3$ であるから

$$V = \frac{1}{3} \triangle OBC \cdot OA = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 = 1$$

(2) $\triangle OAB$ において、三平方の定理により $AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

同様に、 $\triangle OBC$ において $BC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\triangle OCA$ において $CA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$\cos \angle BAC = \frac{13 + 10 - 5}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{130}}$$

$\sin \angle BAC > 0$ であるから

$$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{\sqrt{130}}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{130}} = \frac{7}{\sqrt{130}}$$

したがって $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{7}{\sqrt{130}} = \frac{7}{2}$

(3) $V = \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot OH$ であるから $1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} OH$ よって $OH = \frac{6}{7}$

余弦定理より $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{5^2+6^2-4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{7}{4}$

$0^\circ < A < 180^\circ$ であるから $\sin A > 0$

よって $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

ゆえに $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$

また、 $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ と表されるから $\frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2}r(4+5+6)$

よって $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$

さらに、正弦定理により $\frac{a}{\sin A} = 2R$

したがって $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{4}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

4

解答 $A = 60^\circ$, $BD = 7$, $S = \frac{55\sqrt{3}}{4}$

解説

四角形 ABCD は円に内接するから $C = 180^\circ - A$

$\triangle ABD$ において、余弦定理より

$$BD^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos A$$

$$= 89 - 80 \cos A \quad \dots\dots ①$$

$\triangle CDB$ において、余弦定理より

$$BD^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos(180^\circ - A)$$

$$= 34 + 30 \cos A \quad \dots\dots ②$$

①, ② から $89 - 80 \cos A = 34 + 30 \cos A$

よって $\cos A = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ③$

したがって $A = 60^\circ$

①, ③ から $BD^2 = 89 - 40 = 49$

$BD > 0$ であるから $BD = 7$

また $\sin A = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに $\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって $S = \triangle ABD + \triangle CDB$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{55\sqrt{3}}{4}$$

5

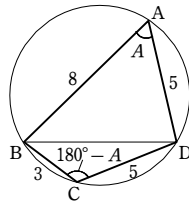
解答 (1) $\frac{8\sqrt{5}}{25}$ (2) $\frac{\sqrt{305}}{25}$ (3) $\sqrt{61}$

解説

(1) $AF = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

$FC = \sqrt{FG^2 + GC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$CA = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$



よって $\cos \theta = \frac{AF^2 + FC^2 - CA^2}{2AF \cdot FC} = \frac{(2\sqrt{5})^2 + 5^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{8\sqrt{5}}{25}$

(2) $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{8\sqrt{5}}{25}\right)^2} = \frac{\sqrt{305}}{25}$

(3) $\triangle AFC = \frac{1}{2}AF \cdot FC \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{305}}{25} = \sqrt{61}$

6

解答 (1) $2\sqrt{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $2\sqrt{5}$ (4) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

解説

(1) $\triangle ADB$ において、三平方の定理により

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$\triangle ADC$ において、三平方の定理により

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

(2) $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ から $AD \perp \triangle BCD$

$\triangle BCD$ において、余弦定理により

$$\cos \angle DBC = \frac{BD^2 + BC^2 - CD^2}{2BD \cdot BC} = \frac{1^2 + 3^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{-2}{2 \cdot 1 \cdot 3} = -\frac{1}{3}$$

$\sin \angle DBC > 0$ であるから

$$\sin \angle DBC = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって $\triangle BCD = \frac{1}{2}BD \cdot BC \sin \angle DBC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$

したがって、四面体 ABCD の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} \triangle BCD \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}$$

(3) $\triangle ABC$ は $AB = BC$ の二等辺三角形であるから、

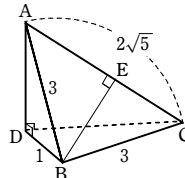
B から辺 AC に下ろした垂線を BE とすると

$$AE = CE = \sqrt{5}$$

よって、三平方の定理により

$$BE = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4} = 2$$

ゆえに $\triangle ABC = \frac{1}{2}AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2 = 2\sqrt{5}$



別解 $\angle ABC = \theta$ とおく。

$\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{3^2 + 3^2 - (2\sqrt{5})^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{-2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = -\frac{1}{9}$$

$\sin \theta > 0$ であるから $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{81}} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$

よって $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{4\sqrt{5}}{9} = 2\sqrt{5}$

(4) $V = \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot DH$ であるから

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot DH \quad \text{よって} \quad DH = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

1

解答 (1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) 7

解説

(1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用して

$$AC^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} \cos 45^\circ = 10$$

$AC > 0$ であるから $AC = \sqrt{10}$

(2) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle D = 180^\circ - \angle B = 135^\circ$$

したがって $\triangle ACD$ に余弦定理を適用して

$$(\sqrt{10})^2 = AD^2 + 2^2 - 2 \cdot AD \cdot 2 \cos 135^\circ$$

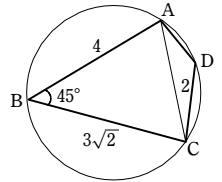
$$\text{よって} \quad AD^2 + 2\sqrt{2}AD - 6 = (AD - \sqrt{2})(AD + 3\sqrt{2}) = 0$$

$AD > 0$ であるから $AD = \sqrt{2}$

(3) 四角形 ABCD の面積を S とする。

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \sin 135^\circ = 7$$



2

解答 $6\sqrt{3}$

解説

$AD = x$ とおく。

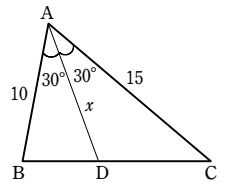
$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot x \sin 30^\circ$$

よって $\frac{75\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2}x + \frac{15}{4}x$

これを解くと $x = 6\sqrt{3}$

したがって $AD = 6\sqrt{3}$



3

解答 (1) $AD = 1$ のとき最小値 1 (2) $AD = 1$ のとき最小値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

解説

$AD = CE = x$ とすると $0 < x < 2 \quad \dots\dots ①$

(1) $\triangle ADE$ において、余弦定理により

$$DE^2 = x^2 + (2-x)^2 - 2x(2-x)\cos 60^\circ$$

$$= x^2 + 4 - 4x + x^2 - 2x + x^2$$

$$= 3x^2 - 6x + 4$$

$$= 3(x-1)^2 + 1$$

① の範囲において、 DE^2 は $x = 1$ のとき最小値 1 をとる。

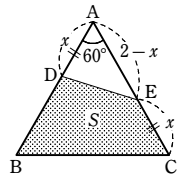
$DE > 0$ であるから、 DE は $AD = 1$ のとき最小値 1 をとる。

(2) $S = \triangle ABC - \triangle ADE$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 - \frac{1}{2}x(2-x)\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - x(2-x))$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - 2x + 4) = \frac{\sqrt{3}}{4}\{(x-1)^2 + 3\}$$

① の範囲において、 S は $AD = 1$ のとき最小値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。



4

【解答】 (ア) $-\frac{1}{2}$ (イ) 28 (ウ) 12π

【解説】

(1) 外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$\sin A = \frac{BC}{2R}, \sin B = \frac{CA}{2R}, \sin C = \frac{AB}{2R}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3 \text{ より } \frac{BC}{2R} : \frac{CA}{2R} : \frac{AB}{2R} = 7 : 5 : 3$$

ゆえに $BC : CA : AB = 7 : 5 : 3$

したがって、最大の辺は BC であるから、最大の角 θ は A である。

$BC = 7k, CA = 5k, AB = 3k$ ($k > 0$) とおくと、余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 3k \cdot 5k} = \frac{-15k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2}$$

(2) (1) より $\theta = A = 120^\circ$

$$\text{よって、三角形 } ABC \text{ の面積は } \frac{1}{2} CA \cdot AB \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5k \cdot 3k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} k^2$$

$$\text{ゆえに } \frac{15\sqrt{3}}{4} k^2 = 60\sqrt{3} \text{ よって } k^2 = 16$$

$k > 0$ であるから $k = 4$ したがって $BC = 7k = 28$

$$\text{三角形 } ABC \text{ の内接円の半径を } r \text{ とすると } \frac{1}{2} r(7 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4) = 60\sqrt{3}$$

よって $r = 2\sqrt{3}$

ゆえに、内接円の面積は $\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$

5

【解答】 (ア) $\frac{2\sqrt{7} + \sqrt{3}}{3}$ (イ) $\frac{5\sqrt{3}}{36}$

【解説】

$\triangle BCP$ において、余弦定理により

$$BP^2 = BC^2 + CP^2 - 2BC \cdot CP \cos \angle BCP$$

すなわち

$$\begin{aligned} BP^2 &= 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cos 60^\circ \\ &= 1 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$BP > 0 \text{ であるから } BP = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\triangle BCP \text{ と } \triangle BAQ \text{ は合同な三角形であるから } BQ = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$\triangle APQ$ において、余弦定理により

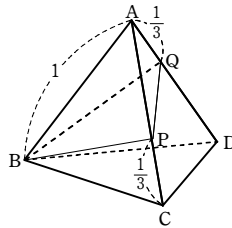
$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cos \angle PAQ$$

$$\text{すなわち } PQ^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cos 60^\circ$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{9}$$

$$PQ > 0 \text{ であるから } PQ = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって、 $\triangle BPQ$ の周りの長さは



$$BP + PQ + QB = \frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{7} + \sqrt{3}}{3}$$

また、線分 PQ の中点を M とすると

$$PM = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\triangle BPQ$ は $BP = BQ$ の二等辺三角形であるから

$$\angle BMP = 90^\circ$$

ゆえに $BM = \sqrt{BP^2 - PM^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

したがって、 $\triangle BPQ$ の面積は $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{36}$

6

【解答】 $\sqrt{7}a$

【解説】

右図のような展開図を考えると、四角形 $AOO'A'$ は平行四辺形であり、求める最短経路の長さは図の線分 OA' の長さである。

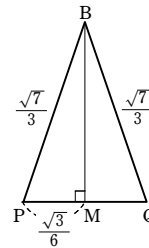
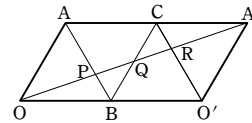
$\triangle OAA'$ で $OA = a, AA' = 2a,$

$\angle OAA' = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ であるから、余弦定理により

$$\begin{aligned} OA'^2 &= AA'^2 + OA^2 - 2AA' \cdot OA \cos 120^\circ \\ &= (2a)^2 + a^2 - 2 \cdot 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2 \end{aligned}$$

$a > 0, OA' > 0$ であるから $OA' = \sqrt{7}a$

よって、求める最短経路の長さは $\sqrt{7}a$



1

【解答】 (ア) $2\sqrt{2}$ (イ) 2 (ウ) $\sqrt{6}$ (エ) $-1 + \sqrt{3}$

(オ) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (カ) 2

【解説】

AD は円の直径であるから、外接円 O の半径を R とすると $AD = 2R$

$\triangle ABC$ において、正弦定理により

$$2R = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \sqrt{2} \div \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$$

ゆえに $AD = 2\sqrt{2}$

また、 $\triangle ABC$ において、正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin 135^\circ} = 2R$$

よって $BC = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$

$\angle ABD = 90^\circ$ であるから、三平方の定理により

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$$

$\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$2^2 = AC^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot AC \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ$$

すなわち $4 = AC^2 + 2 - 2\sqrt{2} AC \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

よって $AC^2 + 2AC - 2 = 0$

これを解くと $AC = -1 \pm \sqrt{3}$

$AC > 0$ であるから $AC = -1 + \sqrt{3}$

ゆえに、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (-1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

ここで、円周角の定理により

$$\angle BOC = 360^\circ - 135^\circ \times 2 = 90^\circ$$

よって、 $\triangle OBC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1$$

ゆえに、四角形 $ABOC$ の面積 S_1 は

$$S_1 = \triangle ABC + \triangle OBC = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

辺 BC と線分 AD の交点を E とする。

$\triangle ABC, \triangle OBC, \triangle DBC$ の底辺を BC と考えると

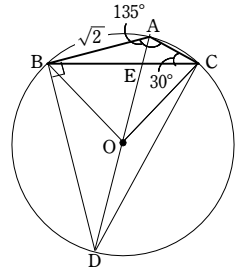
$$\triangle ABC : \triangle OBC : \triangle DBC = AE : OE : DE$$

よって $S_1 : S_2 = (\triangle ABC + \triangle OBC) : (\triangle ABC + \triangle DBC)$

$$\begin{aligned} &= (AE + OE) : (AE + DE) = AO : AD = \sqrt{2} : 2\sqrt{2} \\ &= 1 : 2 \end{aligned}$$

したがって $\frac{S_2}{S_1} = \frac{2}{1} = 2$

【別解】 $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ の値



第4講 レベルB

$\angle ACD = 90^\circ$ であるから、三平方の定理により

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (-1 + \sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{8 - (4 - 2\sqrt{3})} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

よって $S_2 = \triangle ABD + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + \frac{1}{2} \cdot (-1 + \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3} + 1$$

したがって $\frac{S_2}{S_1} = (\sqrt{3} + 1) \div \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 2$

2

【解答】 (1) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (2) $AE = \frac{\sqrt{33} - 3}{3}$

【解説】

(1) 点 P から正三角形 ABC に垂線 PH を引く。

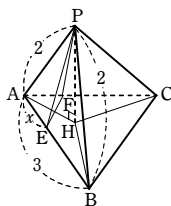
PA = PB = PC から HA = HB = HC

よって、点 H は $\triangle ABC$ の外心である。

ゆえに $AH = \frac{AB}{2\sin 60^\circ} = \frac{3}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$

したがって $PH = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$

ゆえに、求める体積は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3^2 \times \sin 60^\circ \times 1 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$



(2) $AE = AF$, $\angle EAF = 60^\circ$ から $EF = AE = AF$

また $PE = PF$

$AE = x$ ($0 < x < 3$) とおく。

余弦定理から $\cos \angle PAB = \frac{AP^2 + AB^2 - BP^2}{2AP \cdot AB} = \frac{2^2 + 3^2 - 2^2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{3}{4}$

よって $PE^2 = PF^2 = 4 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \cos \angle PAB$

$$= 4 + x^2 - 4x \times \frac{3}{4} = x^2 - 3x + 4$$

このとき $\cos \angle EPF = \frac{PE^2 + PF^2 - EF^2}{2 \cdot PE \cdot PF} = \frac{2(x^2 - 3x + 4) - x^2}{2(x^2 - 3x + 4)}$

ゆえに $\frac{2(x^2 - 3x + 4) - x^2}{2(x^2 - 3x + 4)} = \frac{4}{5}$

よって $8(x^2 - 3x + 4) = 10(x^2 - 3x + 4) - 5x^2$

したがって $3x^2 + 6x - 8 = 0$

$0 < x < 3$ から $x = \frac{-3 + \sqrt{33}}{3}$

ゆえに $AE = \frac{\sqrt{33} - 3}{3}$

3

【解答】 $\frac{\sqrt{41}}{2}$

【解説】

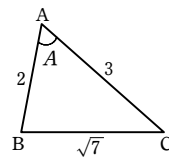
$\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$\cos A = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ であるから $A = 60^\circ$

よって、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



D から $\triangle ABC$ を含む平面に下ろした垂線を DH とし、 $DH = h$ とする。

直角三角形 DAH, DBH, DCH は、斜辺が等しく、DH が共通であるから

$$\triangle DAH \cong \triangle DBH \cong \triangle DCH$$

ゆえに $AH = BH = CH$

したがって、H は $\triangle ABC$ の外接円の中心である。

$\triangle ABC$ において、正弦定理により $\frac{BC}{\sin A} = 2AH$

よって $AH = \frac{\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$

$h^2 + AH^2 = 4^2$ であるから

$$h = \sqrt{4^2 - AH^2} = \sqrt{16 - \frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{41}{3}}$$

したがって $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{41}{3}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$

