1

解答　(1)　2　(2)　2　(3)　3　(4)　$\dfrac{1}{2}$　(5)　$\dfrac{2}{5}$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2-3x+4)=2^2-3\cdot2+4=2$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)=(-1)^2-(-1)+1=3$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to5}\frac{1}{x-5}\left(2-\frac{10}{x}\right)=\lim_{x\to5}\frac{1}{x-5}\cdot\frac{2x-10}{x}=\lim_{x\to5}\frac{1}{x-5}\cdot\frac{2(x-5)}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to5}\frac{2}{x}=\frac{2}{5}$

2

解答　(1)　12　(2)　12

解説

(1)　求める平均変化率は

$$\frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}=\frac{(3\cdot5^2-5)-\{3\cdot(-1)^2-5\}}{6}=\frac{72}{6}=12$$

(2)　$\displaystyle f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\{3(2+h)^2-5\}-(3\cdot2^2-5)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{3\{(2+h)^2-2^2\}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3(4h+h^2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{3h(4+h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}3(4+h)=12$

3

解答　(1)　-3　(2)　$2x-3$　(3)　$3x^2-3$

解説

(1)　$\displaystyle y'=\lim_{h\to0}\frac{\{-3(x+h)+4\}-(-3x+4)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{-3h}{h}=\lim_{h\to0}(-3)=-3$

(2)　$\displaystyle y'=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^2-3(x+h)+5\}-(x^2-3x+5)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{(2x-3)h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x-3+h)=2x-3$

(3)　$\displaystyle y'=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^3-3(x+h)\}-(x^3-3x)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{(3x^2-3)h+3xh^2+h^3}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}(3x^2-3+3xh+h^2)=3x^2-3$

4

解答　(1)　$f'(x)=6x-5$　(2)　$f'(x)=3x^2-8x$　(3)　$f'(x)=4x^3-4x+7$

(4)　$f'(x)=9x^2+6x-2$　(5)　$f'(x)=72x^2+72x+18$

解説

(1)　$f'(x)=3(x^2)'-5(x)'+(6)'=3\cdot2x-5\cdot1+0=6x-5$

(2)　$f'(x)=(x^3)'-4(x^2)'-(1)'=3x^2-4\cdot2x-0=3x^2-8x$

(3)　$f'(x)=(x^4)'-2(x^2)'+7(x)'-(3)'=4x^3-2\cdot2x+7\cdot1-0=4x^3-4x+7$

(4)　$f(x)=3x^3+3x^2-2x-2$ であるから

$f'(x)=3(x^3)'+3(x^2)'-2(x)'-(2)'=3\cdot3x^2+3\cdot2x-2\cdot1-0=9x^2+6x-2$

(5)　$f(x)=3(8x^3+12x^2+6x+1)=24x^3+36x^2+18x+3$ であるから

$f'(x)=24(x^3)'+36(x^2)'+18(x)'+(3)'=24\cdot3x^2+36\cdot2x+18\cdot1+0=72x^2+72x+18$

別解　積や累乗の形の関数の微分の公式を利用すると

(4)　$f'(x)=(x+1)'(3x^2-2)+(x+1)(3x^2-2)'$

$=1\cdot(3x^2-2)+(x+1)\cdot6x=9x^2+6x-2$

(5)　$f'(x)=3\cdot3(2x+1)^{3-1}\cdot(2x+1)'$

$=9(2x+1)^2\cdot2=18(2x+1)^2$

5

解答　$f(x)=-3x^2+2x+15$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと　$f'(x)=2ax+b$

$f'(1)=-4$ より　$2a+b=-4$　……①

$f'(-1)=8$ より　$-2a+b=8$　……②

$f(3)=-6$ より　$9a+3b+c=-6$　……③

①，② を解くと　$a=-3$，$b=2$

$a=-3$，$b=2$ を ③ に代入して　$-27+6+c=-6$　よって　$c=15$

したがって　$f(x)=-3x^2+2x+15$

6

解答　$f(x)=-2x^2+2x-5$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると　$f'(x)=2ax+b$

与えられた等式に代入すると

$2(ax^2+bx+c)+x(2ax+b)=-8x^2+6x-10$

整理して　$4ax^2+3bx+2c=-8x^2+6x-10$

これが x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$4a=-8$，$3b=6$，$2c=-10$

よって　$a=-2$，$b=2$，$c=-5$

したがって　$f(x)=-2x^2+2x-5$

1

解答　(1)　3　(2)　4　(3)　3　(4)　$\dfrac{7}{5}$　(5)　$\dfrac{1}{6}$　(6)　$-\dfrac{1}{3}$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to1}(x^2+2x)=1^2+2\cdot1=3$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2-3x}{x+2}=\frac{(-1)^2-3\cdot(-1)}{-1+2}=4$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=1^2+1+1=3$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x^2-x-6}=\lim_{x\to3}\frac{(x+4)(x-3)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x+4}{x+2}=\frac{3+4}{3+2}=\frac{7}{5}$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$

(6)　$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{1}{x+3}\left(\frac{12}{x-3}+2\right)=\lim_{x\to-3}\frac{1}{x+3}\cdot\frac{2(x+3)}{x-3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-3}\frac{2}{x-3}=\frac{2}{-3-3}=-\frac{1}{3}$

2

解答　(1)　4　(2)　①　2　②　10

解説

(1)　$\displaystyle\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\frac{\{4(1+h)-1\}-(4\cdot1-1)}{h}=\frac{4h}{h}=4$

(2)　①　$\displaystyle f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{\{2(1+h)+3\}-5}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to0}2=2$

②　$\displaystyle f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^3-2(2+h)-(2^3-2\cdot2)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{h^3+6h^2+10h}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}(h^2+6h+10)=10$

3

解答　(1)　$y'=0$　(2)　$y'=3x^2+2$　(3)　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$　(4)　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

解説

(1)　$\displaystyle y'=\lim_{h\to0}\frac{5-5}{h}=\lim_{h\to0}0=0$

(2)　$\displaystyle y'=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)^3+2(x+h)\}-(x^3+2x)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3+2h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2+2)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2+2)=3x^2+2$

(3)　$\displaystyle\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}=\frac{-h}{(x+h)x}$ であるから

$$y'=\lim_{h\to0}\left\{\frac{-h}{(x+h)x}\cdot\frac{1}{h}\right\}=\lim_{h\to0}\frac{-1}{(x+h)x}=-\frac{1}{x^2}$$

(4)　$y'=\lim_{h\to0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$y'=x^2-x$　(2)　$y'=-5x^4+3x^2$　(3)　$y'=4x+8$

(4)　$y'=6x^2+2x$　(5)　$y'=3x^2+12x+12$

解説

(1)　$y'=\dfrac{1}{3}\cdot3x^2-\dfrac{1}{2}\cdot2x=x^2-x$

(2)　$y'=-5x^4+3x^2$

(3)　$y=2x^2+8x-10$ であるから　$y'=2\cdot2x+8=4x+8$

(4)　$y=2x^3+x^2+1$ であるから　$y'=2\cdot3x^2+2x=6x^2+2x$

(5)　$y=x^3+6x^2+12x+8$ であるから　$y'=3x^2+6\cdot2x+12=3x^2+12x+12$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$f(x)=x^2+2x-2$　(2)　$f(x)=-2x^2+3x+2$

解説

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ とすると　$f'(x)=2ax+b$

$f'(0)=2$ より　$b=2$

$f'(1)=4$ より　$2a+b=4$

$f(2)=6$ より　$4a+2b+c=6$

よって　$a=1$，$b=2$，$c=-2$ （これは $a\neq0$ を満たす）

したがって　$f(x)=x^2+2x-2$

(2)　$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ とすると　$f'(x)=2ax+b$

$f'(2)=-5$ より　$4a+b=-5$

$f'(-1)=7$ より　$-2a+b=7$

$f(1)=3$ より　$a+b+c=3$

よって　$a=-2$，$b=3$，$c=2$ （これは $a\neq0$ を満たす）

したがって　$f(x)=-2x^2+3x+2$

$\boxed{6}$

解答　$f(x)=x^2+x$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと　$f'(x)=2ax+b$

これらを与えられた等式に代入して

$$x(2ax+b)+x^2+2x=3(ax^2+bx+c)$$

整理すると　$(a-1)x^2+2(b-1)x+3c=0$

これが x についての恒等式であるから　$a-1=0$，$2(b-1)=0$，$3c=0$

よって　$a=1$，$b=1$，$c=0$　　したがって　$f(x)=x^2+x$

$\boxed{1}$

解答　（ア）　14　（イ）　$\dfrac{2}{3}$

解説

$$f(2)=2^3+5\cdot2^2+6\cdot2+7=47,$$

$$f(-1)=(-1)^3+5\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+7=5$$

よって，$x=-1$ から $x=2$ までの平均変化率は

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{47-5}{3}={}^{ア}14\quad\cdots\cdots①$$

また　$f'(x)=3x^2+10x+6$

ゆえに，$x=a$ $(-1<a<2)$ における微分係数 $f'(a)$ が ① の値に等しいとすると

$$3a^2+10a+6=14$$

整理して　$3a^2+10a-8=0$　　よって　$(a+4)(3a-2)=0$

$-1<a<2$ であるから　$a={}^{イ}\dfrac{2}{3}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\dfrac{dy}{dt}=4t$　(2)　$\dfrac{dS}{dr}=2\pi r$　(3)　$\dfrac{dV}{dt}=0.02V_0$　(4)　$\dfrac{dt}{dx}=k(1-12x)$

解説

(1)　$\dfrac{dy}{dt}=2\cdot2t=4t$

(2)　$\dfrac{dS}{dr}=\pi\cdot2r=2\pi r$

(3)　$\dfrac{dV}{dt}=0.02V_0$

(4)　$t=k(2+x-6x^2)$

よって　$\dfrac{dt}{dx}=k(1-6\cdot2x)=k(1-12x)$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$y'=9x^2-2x$　(2)　$y'=3x^2-5$　(3)　$y'=3x^2+12x+12$

(4)　$y'=4x^3-6x^2+6x-2$　(5)　$y'=6x^5-16x^3+8x$

(6)　$y'=27x^2+42x+16$

解説

(1)　$y=3x^3-x^2$　よって　$y'=9x^2-2x$

(2)　$y=x^3-5x+4$　よって　$y'=3x^2-5$

(3)　$y=x^3+6x^2+12x+8$　よって　$y'=3x^2+12x+12$

(4)　$y=(x^2)^2+x^2+1^2+2x^2\cdot(-x)+2(-x)\cdot1+2\cdot1\cdot x^2$

$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

よって　$y'=4x^3-6x^2+6x-2$

(5)　$y=(x^3)^2-2x^3\cdot2x+(2x)^2=x^6-4x^4+4x^2$

よって　$y'=6x^5-16x^3+8x$

(6)　$y=(9x^2+12x+4)(x+1)=9x^3+21x^2+16x+4$

よって　$y'=27x^2+42x+16$

別解　(1)　$y'=(x^2)'(3x-1)+x^2(3x-1)'$

$=2x(3x-1)+x^2\cdot3=9x^2-2x$

(2)　$y'=(x-1)'(x^2+x-4)+(x-1)(x^2+x-4)'$

$=x^2+x-4+(x-1)(2x+1)=x^2+x-4+2x^2-x-1=3x^2-5$

(3)　$y'=\{(x+2)^3\}'=3(x+2)^2\cdot1=3(x+2)^2$

(4)　$y'=\{(x^2-x+1)^2\}'=2(x^2-x+1)(x^2-x+1)'$

$=2(x^2-x+1)(2x-1)$

(5)　$y'=\{(x^3-2x)^2\}'=2(x^3-2x)(x^3-2x)'=2(x^3-2x)(3x^2-2)=2x(x^2-2)(3x^2-2)$

(6)　$y'=\{(3x+2)^2\}'(x+1)+(3x+2)^2(x+1)'$

$=\{2(3x+2)\cdot3\}(x+1)+(3x+2)^2$

$=(3x+2)\{6(x+1)+(3x+2)\}=(3x+2)(9x+8)$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$n=2$　(2)　$f(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+1$

解説

(1)　$k\neq0$ から，右辺の次数は　3

$n=0$ のとき，左辺の次数は 0 となり，右辺の次数 3 と一致しないから不適。

$n\geqq1$ のとき，$f'(x)$ は $(n-1)$ 次式であるから，$x^2f'(x)$ は $(n+1)$ 次式である。

よって，左辺の次数は　$n+1$

ゆえに，$n+1=3$ から　$n=2$

(2)　$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$ とすると　$f'(x)=2ax+b$

与えられた等式に代入すると

$$(ax^2+bx+c)+x^2(2ax+b)=kx^3+k^2x+1$$

整理して　$2ax^3+(a+b)x^2+bx+c=kx^3+k^2x+1$

この等式が常に成り立つとき

$$2a=k\ \cdots\cdots①,\quad a+b=0\ \cdots\cdots②,\quad b=k^2\ \cdots\cdots③,\quad c=1$$

①，③ から　$b=4a^2$　……④

②，④ から　$a+4a^2=0$　すなわち　$a(4a+1)=0$

$a\neq0$ であるから　$a=-\dfrac{1}{4}$　② から　$b=\dfrac{1}{4}$

よって　$f(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+1$

第１講　レベルB

1

解答　$a=2,\ b=-7$

解説

$\lim_{x\to3}(x^2-2x-3)=0$ であるから　　$\lim_{x\to3}(ax^2+bx+3)=0$

ゆえに　　$3a+b+1=0$　　　よって　　$b=-3a-1$　……①

ゆえに　　$ax^2+bx+3=ax^2-(3a+1)x+3$

$$=(x-3)(ax-1)$$

このとき　　$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{ax^2+bx+3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(ax-1)}{(x-3)(x+1)}$

$$=\lim_{x\to3}\frac{ax-1}{x+1}=\frac{3a-1}{4}$$

$\dfrac{3a-1}{4}=\dfrac{5}{4}$ から　　$a=2$　　　① から　　$b=-7$

2

解答　(1)　$2f'(a)$　　(2)　$5f'(a)$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}=2f'(a)$

(2)　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)-\{f(a-2h)-f(a)\}}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\left\{3\cdot\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}+2\cdot\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\right\}$$

$$=3f'(a)+2f'(a)=5f'(a)$$

3

解答　$nx-n$

解説

x^n-1 を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $px+q$ とすると，次の恒等式が成り立つ。

$x^n-1=(x-1)^2Q(x)+px+q$　……①

両辺を x で微分すると

$nx^{n-1}=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+p$　……②

①，② に $x=1$ を代入すると　　$0=p+q,\ n=p$

よって　　$p=n,\ q=-n$

したがって，求める余りは　　$nx-n$

別解　$x-1=X$ とおくと　　$x=X+1$

二項定理により　　$x^n-1=(X+1)^n-1$

$$=X^n+{}_nC_1X^{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_{n-2}X^2+{}_nC_{n-1}X+1-1$$

これを $(x-1)^2$ すなわち X^2 で割ると，余りは　　${}_nC_{n-1}X=n(x-1)$

第２講　例題

1

解答　(1)　$y=2x+2$　　(2)　$y=-4x+6\sqrt{3}$，$y=-4x-6\sqrt{3}$

解説

$f(x)=-x^3+5x$ とすると　　$f'(x)=-3x^2+5$

(1)　$f'(1)=-3\cdot1^2+5=2$ であるから，求める接線の方程式は

$y-4=2(x-1)$　すなわち　$y=2x+2$

(2)　接点の座標を $(a,\ -a^3+5a)$ とすると，傾きが -4 であるから

$f'(a)=-4$　すなわち　$-3a^2+5=-4$　　　これを解くと　$a=\pm\sqrt{3}$

よって，接点の座標は　　$(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$，$(-\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$

したがって，求める接線の方程式は

$y-2\sqrt{3}=-4(x-\sqrt{3})$，$y+2\sqrt{3}=-4(x+\sqrt{3})$

すなわち　　$y=-4x+6\sqrt{3}$，$y=-4x-6\sqrt{3}$

2

解答　(1)　$y=2x-2$，$y=-6x+22$　　(2)　$y=4$，$y=9x-14$

解説

(1)　$f(x)=-x^2+4x-3$ とすると　　$f'(x)=-2x+4$

放物線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$y-(-a^2+4a-3)=(-2a+4)(x-a)$

すなわち　　$y=-2(a-2)x+a^2-3$　……①

この直線が点 $(3,\ 4)$ を通るから　　$4=-2(a-2)\cdot3+a^2-3$

整理すると　　$a^2-6a+5=0$

ゆえに　　$(a-1)(a-5)=0$　　　よって　　$a=1,\ 5$

求める接線の方程式は，a の値を ① に代入して

$a=1$ のとき　$y=2x-2$，　$a=5$ のとき　$y=-6x+22$

(2)　$f(x)=x^3-3x+2$ とすると　$f'(x)=3x^2-3$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$y-(a^3-3a+2)=(3a^2-3)(x-a)$

すなわち　　$y=(3a^2-3)x-2a^3+2$　……①

この直線が点 $(2,\ 4)$ を通るから　　$4=(3a^2-3)\cdot2-2a^3+2$

整理すると　$a^3-3a^2+4=0$　　ゆえに　　$(a+1)(a-2)^2=0$

よって　　$a=-1,\ 2$

求める接線の方程式は，a の値を ① に代入して

$a=-1$ のとき　$y=4$，　$a=2$ のとき　$y=9x-14$

3

解答　$y=2x+1$，$y=-4x+4$

解説

$y=-x^2$ に対して　$y'=-2x$

よって，放物線 $y=-x^2$ 上の点 $(a,\ -a^2)$ における接線の方程式は

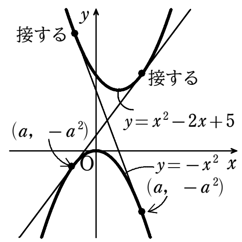
$y-(-a^2)=-2a(x-a)$

すなわち　　$y=-2ax+a^2$　……①

この直線が放物線 $y=x^2-2x+5$ にも接するための条件は，2 次方程式

$x^2-2x+5=-2ax+a^2$　すなわち

$x^2+2(a-1)x-a^2+5=0$　……② が重解をもつことである。



ゆえに，② の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-1\cdot(-a^2+5)=2a^2-2a-4=2(a+1)(a-2)$$

$D=0$ から　　$(a+1)(a-2)=0$　　よって　　$a=-1,\ 2$

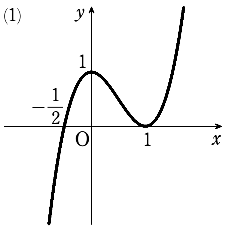
この値を ① に代入して，求める共通接線の方程式は　$y=2x+1$，$y=-4x+4$

4

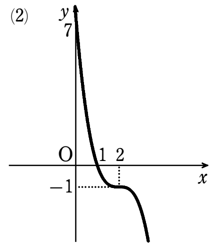
解答　(1)　$x=0$ で極大値 1，$x=1$ で極小値 0，[図]

(2)　極値をもたない，[図]

(1)



(2)



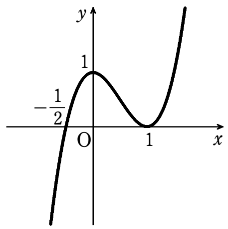
解説

(1)　$y'=6x^2-6x=6x(x-1)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 1$

y の増減表は次のようになる。

x	……	0	……	1	……
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大 1	↘	極小 0	↗



よって，y は $x=0$ で極大値 1，$x=1$ で極小値 0 をとる。

また，グラフは図のようになる。

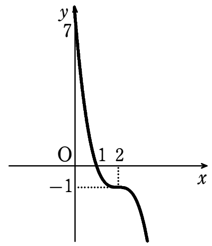
(2)　$y'=-3x^2+12x-12=-3(x^2-4x+4)$

$=-3(x-2)^2$

$y'=0$ とすると　　$x=2$

y の増減表は次のようになる。

x	……	2	……
y'	−	0	−
y	↘	−1	↘



よって，y は常に減少し，極値をもたない。

また，グラフは図のようになる。

$\boxed{5}$

解答　(1)　$a<3,\ 6<a$　　(2)　$0\leqq k\leqq 6$

解説

(1)　$f'(x)=3x^2+2ax+3a-6$

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は，$f'(x)$ の符号が変化することである。

ゆえに，$f'(x)=0$ すなわち $3x^2+2ax+3a-6=0$ ……① が異なる２つの実数解をもつ。

① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-3(3a-6)>0 \qquad 整理して \qquad (a-3)(a-6)>0$$

これを解いて　$a<3,\ 6<a$

(2)　$f'(x)=6x^2+2kx+k$

$f(x)$ が極値をもたないための必要十分条件は，$f'(x)$ の符号が変化しないことである。

ゆえに，$f'(x)=0$ すなわち $6x^2+2kx+k=0$ …… ② が重解をもつか実数解をもたない。

② の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=k^2-6k\leqq 0$

ゆえに　$k(k-6)\leqq 0$　　これを解いて　$0\leqq k\leqq 6$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$y=19x-45$　　(2)　$y=9x-5,\ y=9x+27$

解説

(1)　$f(x)=x^3-x^2-2x$ とすると　$f'(x)=3x^2-2x-2$

ゆえに　$f'(3)=3\cdot 3^2-2\cdot 3-2=19$

よって，点 $(3,\ 12)$ における接線の方程式は

$$y-12=19(x-3) \quad すなわち \quad y=19x-45$$

(2)　$f(x)=x^3+3x^2$ とすると　$f'(x)=3x^2+6x$

点 $(a,\ a^3+3a^2)$ における接線の方程式は

$$y-(a^3+3a^2)=(3a^2+6a)(x-a)$$

すなわち　$y=(3a^2+6a)x-2a^3-3a^2$ ……①

この直線の傾きが 9 であるとすると　$3a^2+6a=9$

整理して　$a^2+2a-3=0$　　ゆえに　$(a-1)(a+3)=0$

したがって　$a=1,\ -3$

① から　$a=1$ のとき　$y=9x-5$，　$a=-3$ のとき　$y=9x+27$

よって，求める直線の方程式は　$y=9x-5,\ y=9x+27$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$y=7x,\ (2,\ 14)$；$y=-x,\ (-2,\ 2)$

(2)　$y=5x-6,\ (3,\ 9)$；$y=-3x+2,\ (-1,\ 5)$

(3)　$y=3x-1,\ (1,\ 2)$；$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4},\ \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{8}\right)$

(4)　$y=0,\ (-1,\ 0)$；$y=6x-10,\ (3,\ 8)$

解説

(1)　$y'=2x+3$

接点の座標を $(a,\ a^2+3a+4)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(a^2+3a+4)=(2a+3)(x-a)$$

すなわち　$y=(2a+3)x-a^2+4$ ……①

これが点 $(0,\ 0)$ を通るから

$$0=(2a+3)\cdot 0-a^2+4$$

これを解いて $a=\pm 2$

$a=2$ のとき，接点の座標は $(2,\ 14)$　また，① から，接線の方程式は $y=7x$

$a=-2$ のとき，接点の座標は $(-2,\ 2)$　また，① から，接線の方程式は $y=-x$

(2)　$y'=2x-1$

接点の座標を $(a,\ a^2-a+3)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(a^2-a+3)=(2a-1)(x-a)$$

すなわち　$y=(2a-1)x-a^2+3$ ……①

これが点 $(1,\ -1)$ を通るから

$$-1=(2a-1)\cdot 1-a^2+3$$

よって　$a^2-2a-3=0$　これを解いて　$a=3,\ -1$

$a=3$ のとき，接点の座標は $(3,\ 9)$　また，① から，接線の方程式は $y=5x-6$

$a=-1$ のとき，接点の座標は $(-1,\ 5)$　また，① から，接線の方程式は $y=-3x+2$

(3)　$y'=3x^2$

接点の座標を $(a,\ a^3+1)$ とすると，接線の方程式は

$$y-(a^3+1)=3a^2(x-a)$$

すなわち　$y=3a^2x-2a^3+1$ ……①

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから

$$2=3a^2\cdot 1-2a^3+1$$

よって　$2a^3-3a^2+1=0$

左辺を因数分解すると　$(a-1)^2(2a+1)=0$

したがって　$a=1,\ -\dfrac{1}{2}$

$a=1$ のとき，接点の座標は $(1,\ 2)$　また，① から，接線の方程式は $y=3x-1$

$a=-\dfrac{1}{2}$ のとき，接点の座標は $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{8}\right)$

また，① から，接線の方程式は　$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$

(4)　$y'=\dfrac{3}{8}(x+1)^2$

接点の座標を $\left(a,\ \dfrac{1}{8}(a+1)^3\right)$ とすると，接線の方程式は

$$y-\frac{1}{8}(a+1)^3=\frac{3}{8}(a+1)^2(x-a)$$

すなわち　$y=\dfrac{3}{8}(a+1)^2x+\dfrac{1}{8}(a+1)^2(-2a+1)$ ……①

これが点 $\left(\dfrac{5}{3},\ 0\right)$ を通るから

$$0=\frac{3}{8}(a+1)^2\cdot\frac{5}{3}+\frac{1}{8}(a+1)^2(-2a+1)$$

よって　$5(a+1)^2+(a+1)^2(-2a+1)=0$

ゆえに　$(a+1)^2(a-3)=0$　したがって　$a=-1,\ 3$

$a=-1$ のとき，接点の座標は $(-1,\ 0)$　また，① から，接線の方程式は $y=0$

$a=3$ のとき，接点の座標は $(3,\ 8)$　また，① から，接線の方程式は $y=6x-10$

$\boxed{3}$

解答　$y=2x-1,\ y=4x-4$

解説

$y=x^2$ から　$y'=2x$

$y=-x^2+6x-5$ から　$y'=-2x+6$

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$$y-a^2=2a(x-a) \quad すなわち \quad y=2ax-a^2 \ \cdots\cdots ①$$

また，放物線 $y=-x^2+6x-5$ 上の点 $(b,\ -b^2+6b-5)$ における接線の方程式は

$$y-(-b^2+6b-5)=(-2b+6)(x-b)$$

すなわち　$y=(-2b+6)x+b^2-5$ ……②

①，② が一致するとき　$2a=-2b+6$ ……③，　$-a^2=b^2-5$ ……④

③ から　$a=-b+3$ ……⑤

これを ④ に代入して　$-(-b+3)^2=b^2-5$

整理すると　$b^2-3b+2=0$　　これを解いて　$b=1,\ 2$

⑤ から　$b=1$ のとき $a=2$，　$b=2$ のとき $a=1$

求める共通接線の方程式は，① から，$a=1$ のとき　$y=2x-1$

$a=2$ のとき　$y=4x-4$

別解　$y=x^2$ から　$y'=2x$

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$y-a^2=2a(x-a)$　すなわち　$y=2ax-a^2$　……⑥

これが放物線 $y=-x^2+6x-5$ にも接するとき，方程式

$2ax-a^2=-x^2+6x-5$　すなわち　$x^2+2(a-3)x-a^2+5=0$

の判別式 D について，$D=0$ が成り立つ。

すなわち　$\dfrac{D}{4}=(a-3)^2-(-a^2+5)=0$

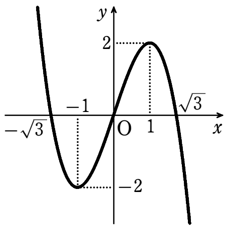
よって　$a^2-3a+2=0$　　これを解いて　$a=1,\ 2$

求める共通接線の方程式は，⑥ から，$a=1$ のとき　$y=2x-1$

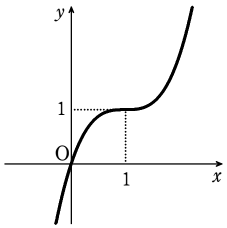
$a=2$ のとき　$y=4x-4$

4

解答　(1)



(2)



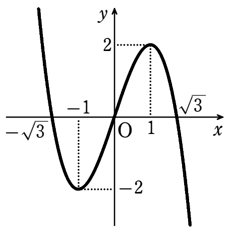
解説

(1)　$y'=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm 1$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-2	↗	2	↘



よって，区間 $-1\leqq x\leqq 1$ で単調に増加し，

区間 $x\leqq -1,\ 1\leqq x$ で単調に減少する。

また，$x=1$ で極大値 2 をとり，

$x=-1$ で極小値 -2 をとる。

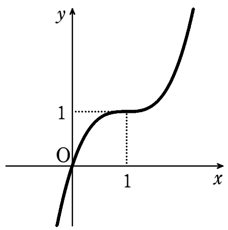
ゆえに，グラフは[図]のようになる。

(2)　$y'=3x^2-6x+3$

$y'=0$ とすると　$x=1$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$
y	↗	1	↗



よって，すべての実数の範囲で

$y'\geqq 0$ であるから，

y は単調に減少する。

よって，極値はない。

ゆえに，グラフは[図]のようになる。

5

解答　(1)　$a<-1,\ 2<a$　　(2)　$-9\leqq a\leqq 0$

解説

(1)　$f'(x)=3x^2+6ax+3(a+2)$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，2 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。すなわち，$f'(x)=0$ の判別式 D について　$D>0$

よって　$\dfrac{D}{4}=(3a)^2-3\cdot 3(a+2)>0$　　ゆえに　$a^2-a-2>0$

これを解いて　$a<-1,\ 2<a$

(2)　$f'(x)=3x^2+2ax-3a$

$f(x)$ が単調に増加するための条件は，$f'(x)\geqq 0$

すなわち，2 次方程式 $f'(x)=0$ が実数解をもたないか，重解をもつことである。

よって，$f'(x)=0$ の判別式 D について　$D\leqq 0$

ゆえに　$\dfrac{D}{4}=a^2-3\cdot(-3a)\leqq 0$　　よって　$a^2+9a\leqq 0$

これを解いて　$-9\leqq a\leqq 0$

1

解答　(1)　$y=x$　　(2)　$(1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}),\ (1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$

解説

(1)　$f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ とすると　$f'(x)=3x^2-6x+2$

よって，点 $(1,\ 1)$ における接線の傾きは

$f'(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1+2=-1$

ゆえに，法線の傾きは 1 である。

したがって，求める法線の方程式は

$y-1=1\cdot(x-1)$　すなわち　$y=x$

(2)　求める共有点の x 座標は，次の方程式の $x=1$ 以外の実数解である。

$x^3-3x^2+2x+1=x$

整理して　$x^3-3x^2+x+1=0$

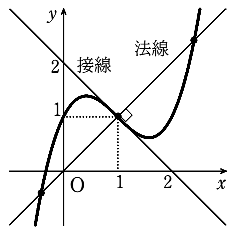
よって　$(x-1)(x^2-2x-1)=0$

したがって，求める点の x 座標は，

$x^2-2x-1=0$ を解いて　$x=1\pm\sqrt{2}$

ゆえに，求める共有点の座標は

$(1+\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}),\ (1-\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2})$



2

解答　$a=\pm 2$

解説

$f(x)=x^2+2,\ g(x)=x^2+ax+3$ とおくと

$f'(x)=2x,\ g'(x)=2x+a$

P の x 座標を p とすると，条件から

$f(p)=g(p),\ f'(p)g'(p)=-1$

$f(p)=g(p)$ から

$p^2+2=p^2+ap+3$　すなわち　$ap=-1$　……①

$f'(p)g'(p)=-1$ から

$2p(2p+a)=-1$　すなわち　$4p^2+2ap=-1$　……②

① を ② に代入して　$4p^2+2\cdot(-1)=-1$

よって　$p^2=\dfrac{1}{4}$　ゆえに　$p=\pm\dfrac{1}{2}$

① から　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき　$a=-2$，$p=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$a=2$

したがって　$a=\pm 2$

3

解答　$a=2,\ b=3,\ c=-8,\ d=-1$

解説

$f(x)=ax^2+bx+c,\ g(x)=x^3+dx$ とおくと　$f'(x)=2ax+b,\ g'(x)=3x^2+d$

放物線 $y=f(x)$ が点 $(1,\ -3)$ を通るから　$f(1)=-3$

放物線 $y=f(x)$ が点 $(2,\ 6)$ で曲線 $y=g(x)$ と共通の接線をもつから

$f(2)=6,\ g(2)=6,\ f'(2)=g'(2)$

$f(1)=-3$ から　$a+b+c=-3$　……①

$f(2)=6$ から　$4a+2b+c=6$　……②

$g(2)=6$ から　$8+2d=6$　……③

$f'(2)=g'(2)$ から　$4a+b=12+d$ ……④

③から　$d=-1$　これを④に代入すると　$4a+b=11$ ……⑤

②−①から　$3a+b=9$ ……⑥

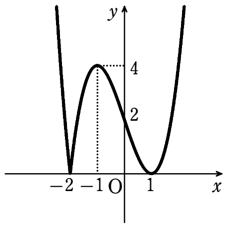
⑤，⑥を連立して解くと　$a=2$，$b=3$

$a=2$，$b=3$ を①に代入して c の値を求めると　$c=-8$

以上から　$a=2$，$b=3$，$c=-8$，$d=-1$

$\boxed{4}$

解答 ［図］



解説

[1] $x<-2$ のとき　$y=-(x+2)(x-1)^2=-x^3+3x-2$

ゆえに　$y'=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$x<-2$ では，常に $y'<0$ であるから，y は単調に減少する。

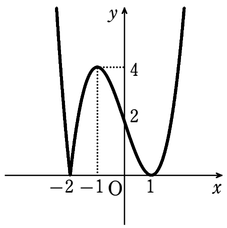
[2] $x\geqq -2$ のとき　$y=(x+2)(x-1)^2=x^3-3x+2$

ゆえに　$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm1$

$x\geqq -2$ における y の増減表は次のようになる。

x	-2	…	-1	…	1	…
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	0	↗	極大 4	↘	極小 0	↗



以上から，グラフは右の図のようになる。

$\boxed{1}$

解答　$y=-x+2$

解説

$y=\frac{1}{4}x^2$ から　$y'=\frac{1}{2}x$

放物線上の点 $\left(t,\ \frac{1}{4}t^2\right)$ における接線の方程式は

$y-\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{2}t(x-t)$　すなわち　$y=\frac{1}{2}tx-\frac{1}{4}t^2$

これが点 $(-2,\ -2)$ を通るとき　$-2=\frac{1}{2}t\cdot(-2)-\frac{1}{4}t^2$

よって　$t^2+4t-8=0$ ……①

2次方程式①の2つの解を α，β とすると，α，β は2本の接線の接点の x 座標である。

解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-4$，$\alpha\beta=-8$ ……②

ゆえに，2接点 $\left(\alpha,\ \frac{1}{4}\alpha^2\right)$，$\left(\beta,\ \frac{1}{4}\beta^2\right)$ を結ぶ直線の方程式は

$$y-\frac{1}{4}\alpha^2=\frac{\frac{1}{4}\beta^2-\frac{1}{4}\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

すなわち　$y=\frac{1}{4}(\alpha+\beta)x-\frac{1}{4}\alpha\beta$

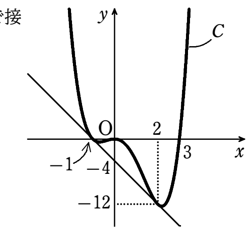
②を代入して　$y=-x+2$

$\boxed{2}$

解答　$y=-4x-4$

解説

曲線 C と直線 $y=mx+n$ が $x=a$，$x=b$ $(a\neq b)$ の点で接するとすると，次の x の恒等式が成り立つ。



$x^4-2x^3-3x^2-(mx+n)=(x-a)^2(x-b)^2$

(左辺)$=x^4-2x^3-3x^2-mx-n$

(右辺)$=\{(x-a)(x-b)\}^2=\{x^2-(a+b)x+ab\}^2$

$=x^4+(a+b)^2x^2+a^2b^2-2(a+b)x^3$
$\quad -2(a+b)abx+2abx^2$

$=x^4-2(a+b)x^3+\{(a+b)^2+2ab\}x^2$
$\quad -2(a+b)abx+a^2b^2$

両辺の係数を比較して

$-2=-2(a+b)$ ……①，　$-3=(a+b)^2+2ab$ ……②，

$-m=-2(a+b)ab$ ……③，　$-n=a^2b^2$ ……④

①から　$a+b=1$　これと②から　$ab=-2$

③から　$m=-4$　④から　$n=-4$

a，b は $t^2-t-2=0$ の解で，これを解くと　$t=-1$，2

よって，曲線 C と $x=-1$，$x=2$ の点で接する直線があり，その方程式は

$y=-4x-4$

別解　$y=x^4-2x^3-3x^2$ から　$y'=4x^3-6x^2-6x$

点 $(a,\ a^4-2a^3-3a^2)$ における接線の方程式は

$y-(a^4-2a^3-3a^2)=(4a^3-6a^2-6a)(x-a)$

すなわち　$y=(4a^3-6a^2-6a)x-3a^4+4a^3+3a^2$ ……①

この直線が $x=b$ $(b\neq a)$ の点で曲線 C と接するための条件は，方程式

$x^4-2x^3-3x^2=(4a^3-6a^2-6a)x-3a^4+4a^3+3a^2$ ……②

が a と異なる重解 b をもつことである。②を変形すると

$x^4-2x^3-3x^2-(4a^3-6a^2-6a)x+3a^4-4a^3-3a^2=0$

$(x-a)^2\{x^2+2(a-1)x+3a^2-4a-3\}=0$

ゆえに，2次方程式 $x^2+2(a-1)x+3a^2-4a-3=0$ ……③

が a と異なる重解 b をもてばよい。

よって，③の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(3a^2-4a-3)=-2(a^2-a-2)$

$D=0$ のとき，$a^2-a-2=0$ を解いて　$a=-1$，2

$a=-1$ のとき，③の重解は　$b=2$

$a=2$ のとき，③の重解は　$b=-1$

したがって，$b\neq a$ である。

①から，接線の方程式は　$y=-4x-4$

$\boxed{3}$

解答　(1) $x>1$　(2) $0<a<1$

解説

$y=x^3-3x^2+3ax$ ……①　とする。

(1) $y'=3(x^2-2x+a)$

①が極値をもつから，方程式 $y'=0$ すなわち

$x^2-2x+a=0$ ……②

が異なる2つの実数解をもつ。

よって，②の判別式を D とすると　$\frac{D}{4}=1-a>0$

ゆえに　$a<1$ ……③

このとき，②の異なる2つの実数解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，①の増減表は右のようになる。

x	…	α	…	β	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

よって，①は $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとる。

$f(x)=x^2-2x+a$ とすると，放物線 $y=f(x)$ の軸は直線 $x=1$ であり，点 $(\alpha,\ 0)$ と点 $(\beta,\ 0)$ は軸に関して対称で　$\alpha<1<\beta$

したがって，極小値を与える x の値の範囲は　$x>1$

(2) 方程式②の解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=a$

求める条件は　$D>0$　かつ　$\alpha\beta>0$

すなわち　$a<1$　かつ　$a>0$

したがって　$0<a<1$

別解　$f(x)$ の x^2 の係数は正であるから，求める条件は

$D>0$　かつ　$f(0)>0$　すなわち　$a<1$ かつ $a>0$

したがって　$0<a<1$

$\boxed{4}$

解答　(1) $a>-1$　(2) $a=-\frac{1}{2}$

解説

(1) $f'(x)=x^2-2(a+1)x+a(a+1)$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，2次方程式 $f'(x)=0$ すなわち

$x^2-2(a+1)x+a(a+1)=0$ ……①

が異なる２つの実数解をもつことである。

ゆえに，２次方程式①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=\{-(a+1)\}^2-a(a+1)=a+1>0$$

したがって　$a>-1$

(2)　$a>-1$ のとき，①の異なる２つの実数解を α，β ($\alpha<\beta$) とすると，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となるから

$$f(\alpha)-f(\beta)=\frac{\sqrt{2}}{3}\quad ……②$$

ここで，$f(\alpha)-f(\beta)$ を計算すると

$$f(\alpha)-f(\beta)=\frac{1}{3}(\alpha^3-\beta^3)-(a+1)(\alpha^2-\beta^2)+a(a+1)(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{1}{3}(\alpha-\beta)\{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3(a+1)(\alpha+\beta)+3a(a+1)\}\quad ……③$$

①において，解と係数の関係により　$\alpha+\beta=2(a+1)$，$\alpha\beta=a(a+1)$

ゆえに　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4(a+1)^2-4a(a+1)=4(a+1)$

$\alpha<\beta$ であるから　$\alpha-\beta=-2\sqrt{a+1}$

また　$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=4(a+1)^2-a(a+1)=(a+1)(3a+4)$

したがって，③から

$$f(\alpha)-f(\beta)=\frac{1}{3}(-2\sqrt{a+1})\{(a+1)(3a+4)-3(a+1)\cdot 2(a+1)+3a(a+1)\}$$

$$=\frac{4}{3}(a+1)\sqrt{a+1}$$

これと②から　$4(a+1)\sqrt{a+1}=\sqrt{2}$

両辺は正であるから，平方して整理すると　$(a+1)^3=\frac{1}{8}$

ゆえに　$a+1=\frac{1}{2}$　　よって　$a=-\frac{1}{2}$

これは $a>-1$ を満たす。

$\boxed{1}$

解答　$b=-1$，$c=-1$

解説

$f'(x)=3x^2+2bx+c$

$x=1$ で極値 0 をとるから　$f'(1)=0$，$f(1)=0$

よって　$3+2b+c=0$，$1+b+c+1=0$

ゆえに　$2b+c=-3$，$b+c=-2$　　これを解いて　$b=-1$，$c=-1$

このとき　$f(x)=x^3-x^2-x+1$

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-\frac{1}{3}$，1

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{32}{27}$	↘	極小 0	↗

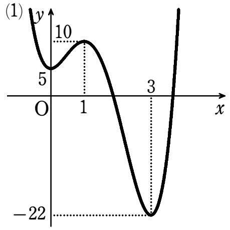
よって，$f(x)$ は $x=1$ で極値 0 をとり，条件を満たす。

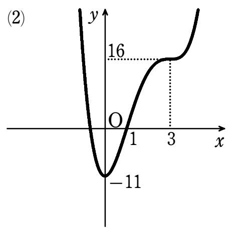
したがって　$b=-1$，$c=-1$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$x=0$ で極小値 5，$x=1$ で極大値 10，$x=3$ で極小値 -22；[図]

(2)　$x=0$ で極小値 -11；[図]

(1)


(2)


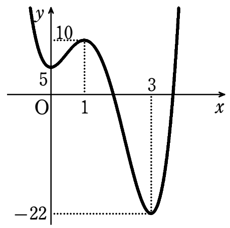
解説

(1)　$y'=12x^3-48x^2+36x=12x(x^2-4x+3)=12x(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=0$，1，3

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 5	↗	極大 10	↘	極小 -22	↗



よって　$x=0$ で極小値 5，$x=1$ で極大値 10，

$x=3$ で極小値 -22 をとる。

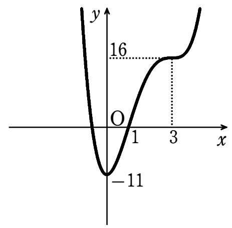
また，グラフは右の図のようになる。

(2)　$y'=4x^3-24x^2+36x=4x(x^2-6x+9)=4x(x-3)^2$

$y'=0$ とすると　$x=0$，3

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↘	極小 -11	↗	16	↗



よって　$x=0$ で極小値 -11 をとる。

また，グラフは右の図のようになる。

$\boxed{3}$

解答　$x=0$，1 のとき最大値 0，$x=-1$ のとき最小値 -2

解説

$y'=3x^2-2x=x(3x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0$，$\frac{2}{3}$

$-1\leqq x\leqq 1$ における y の増減表は，右のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗	0

よって，$x=0$，1 のとき最大値 0，

$x=-1$ のとき最小値 -2　をとる。

$\boxed{4}$

解答　$x=\frac{\pi}{3}$，π，$\frac{5}{3}\pi$ で最大値 3；$x=0$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$ で最小値 1

解説

$$y=2\sin x\cdot 2\sin x\cos x-\cos x+2$$

$$=4\sin^2 x\cos x-\cos x+2=4(1-\cos^2 x)\cos x-\cos x+2$$

$$=-4\cos^3 x+3\cos x+2$$

$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq 1$

y を t の式で表すと，$y=-4t^3+3t+2$ であり

$$y'=-12t^2+3=-3(4t^2-1)$$

$$=-3(2t+1)(2t-1)$$

$y'=0$ とすると　$t=\pm\frac{1}{2}$

$-1\leqq t\leqq 1$ における y の増減表は右のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	↘	極小 1	↗	極大 3	↘	1

よって

$t=-1$，$\frac{1}{2}$ のとき最大値 3

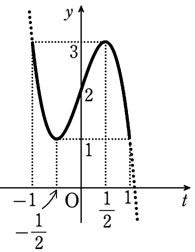
$t=-\frac{1}{2}$，1 のとき最小値 1

$t=-1$ のとき　$x=\pi$；　$t=\frac{1}{2}$ のとき　$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$；

$t=-\frac{1}{2}$ のとき　$x=\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$；　$t=1$ のとき　$x=0$

したがって　$x=\frac{\pi}{3}$，π，$\frac{5}{3}\pi$ で最大値 3

$x=0$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$ で最小値 1



5

解答 (1) $0<a<1$ のとき　$x=a$ で最小値 $-2a^3$，
$1\leqq a$ のとき　$x=1$ で最小値 $1-3a^2$

(2) $0<a<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　$x=1$ で最大値 $1-3a^2$，

$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　$x=0$，1 で最大値 0，

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}<a$ のとき　$x=0$ で最大値 0

解説

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm a$

また　　$f(0)=0$，　$f(1)=1-3a^2$，　$f(a)=-2a^3$

(1) [1] $0<a<1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-2a^3$	↗	$1-3a^2$

よって，$f(x)$ は $x=a$ で最小値 $-2a^3$ をとる。

[2] $1\leqq a$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f'(x)=3(x+a)(x-a)\leqq 0$ であるから，$f(x)$ は単調に減少する。

よって，$f(x)$ は　$x=1$ で最小値 $1-3a^2$　をとる。

(2) $x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-2a^3$	↗

よって，$0\leqq x\leqq 1$ において，最大値は $f(0)$ または $f(1)$ である。

$$f(0)-f(1)=0-(1-3a^2)$$
$$=3a^2-1=3\left(a+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

[1] $0<a<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　　$f(0)<f(1)$

よって，$f(x)$ は　$x=1$ で最大値 $1-3a^2$　をとる。

[2] $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき　　$f(0)=f(1)$

よって，$f(x)$ は　$x=0$，1 で最大値 0　をとる。

[3] $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<a$ のとき　　$f(0)>f(1)$

よって，$f(x)$ は　$x=0$ で最大値 0　をとる。

1

解答　$a=-6$，$b=9$，$c=-5$

解説

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ が $x=1$ で極大値をとるとき　　$f'(1)=0$

よって　　$3+2a+b=0$　……①

また，$f(x)$ が $x=3$ で極小値 -5 をとるとき　　$f'(3)=0$，$f(3)=-5$

よって　　$27+6a+b=0$　……②，　　$27+9a+3b+c=-5$　……③

①，②，③ を解くと　　$a=-6$，$b=9$，$c=-5$

このとき　$f(x)=x^3-6x^2+9x-5$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

したがって，右の増減表が得られ，条件を満たす。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 -1	↘	極小 -5	↗

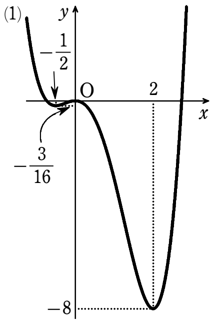
よって　　$a=-6$，$b=9$，$c=-5$

2

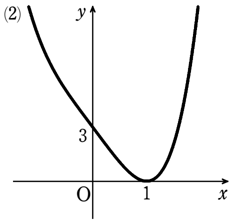
解答 (1)　$x=-\dfrac{1}{2}$ で極小値 $-\dfrac{3}{16}$，$x=0$ で極大値 0，$x=2$ で極小値 -8，[図]

(2)　$x=1$ で極小値 0，[図]　　(3)　$x=-2$ で極大値 17；[図]

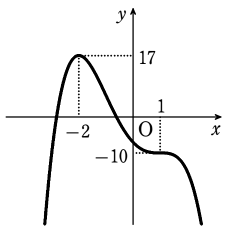
(1)



(2)



(3)



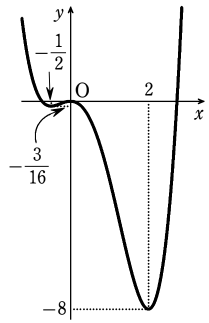
解説

(1)　$y'=4x^3-6x^2-4x$
$=2x(2x^2-3x-2)$
$=2x(2x+1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=-\dfrac{1}{2}$，0，2

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 $-\frac{3}{16}$	↗	極大 0	↘	極小 -8	↗



よって，y は $x=-\dfrac{1}{2}$ で極小値 $-\dfrac{3}{16}$，$x=0$ で極大値 0，

$x=2$ で極小値 -8 をとる。

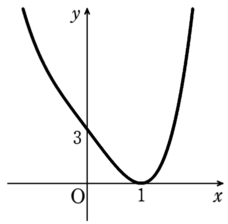
また，グラフは 図 のようになる。

(2)　$y'=4x^3-4=4(x^3-1)$
$=4(x-1)(x^2+x+1)$

$y'=0$ とすると　$x=1$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小 0	↗



よって，y は $x=1$ で極小値 0 をとる。

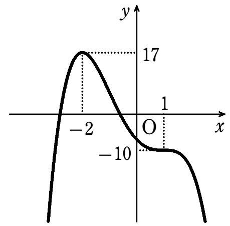
また，グラフは 図 のようになる。

(3)　$y'=-4x^3+12x-8=-4(x^3-3x+2)=-4(x-1)^2(x+2)$

$y'=0$ とすると　　$x=1$，-2

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	↗	極大 17	↘	-10	↘



よって，$x=-2$ で極大値 17 をとる。

したがって，グラフは[図]

注意　$x=1$ のとき極値をとらないことに注意。

グラフ上の点 $(1,\ -10)$ における接線の傾きは 0 である。

3

解答 (1)　$x=-4$ で最大値 21，$x=2$ で最小値 -15

(2)　$x=0$ で最大値 4，$x=-2$ で最小値 -16

解説

(1)　$y'=-3x^2-6x=-3x(x+2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0$，-2

$-4\leqq x\leqq 2$ において，y の増減表は，次のようになる。

x	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	21	↘	1	↗	5	↘	-15

よって，$x=-4$ で最大値 21，$x=2$ で最小値 -15 をとる。

(2)　$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 2$

$-2\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は，右のようになる。

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0
y	-16	↗	4	↘	0

よって，$x=0$ で最大値 4,

$x=-2$ で最小値 -16　をとる。

$\boxed{4}$

解答　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ で最大値 14；$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 $\dfrac{1}{2}$

解説

$f(\theta)=8\sin^3\theta-3\cos2\theta-12\sin\theta+7$

$=8\sin^3\theta-3(1-2\sin^2\theta)-12\sin\theta+7$

$=8\sin^3\theta+6\sin^2\theta-12\sin\theta+4$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq2\pi$ であるから　　$-1\leqq t\leqq 1$

$g(t)=8t^3+6t^2-12t+4$ とすると

$g'(t)=24t^2+12t-12$

$=12(t+1)(2t-1)$

$g'(t)=0$ とすると　$t=-1,\ \dfrac{1}{2}$

$-1\leqq t\leqq 1$ における $g(t)$ の増減表は右のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	14	↘	$\frac{1}{2}$	↗	6

よって，$g(t)$ は $t=-1$ で最大値 14,

$t=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

$0\leqq\theta\leqq2\pi$ であるから

$t=-1$ のとき $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$；　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

したがって，$f(\theta)$ は $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ で最大値 14；

$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

$\boxed{5}$

解答　$0<a<\dfrac{3}{4},\ 3<a$ のとき　$M(a)=a^2-2a+1$

$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき　$M(a)=\dfrac{4}{27}a^3$

解説

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2$

$=(3x-a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{a}{3},\ a$

$a>0$ であるから，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

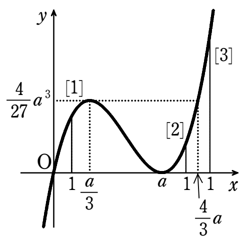
x	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{4}{27}a^3$	↘	極小 0	↗

ここで，$x=\dfrac{a}{3}$ 以外に $f(x)=\dfrac{4}{27}a^3$ を満たす

x の値を求めると，$f(x)=\dfrac{4}{27}a^3$ から　　$x^3-2ax^2+a^2x-\dfrac{4}{27}a^3=0$

ゆえに　　$\left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2\left(x-\dfrac{4}{3}a\right)=0$　　　$x\fallingdotseq\dfrac{a}{3}$ であるから　　$x=\dfrac{4}{3}a$

したがって，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最大値 $M(a)$ は



[1]　$1<\dfrac{a}{3}$　すなわち　$a>3$ のとき

$M(a)=f(1)$

[2]　$\dfrac{a}{3}\leqq 1\leqq\dfrac{4}{3}a$　すなわち　$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき

$M(a)=f\left(\dfrac{a}{3}\right)$

[3]　$0<\dfrac{4}{3}a<1$　すなわち　$0<a<\dfrac{3}{4}$ のとき

$M(a)=f(1)$

以上から　　$0<a<\dfrac{3}{4},\ 3<a$ のとき　　$M(a)=a^2-2a+1$

$\dfrac{3}{4}\leqq a\leqq 3$ のとき　　　$M(a)=\dfrac{4}{27}a^3$

$\boxed{1}$

解答　$a=1,\ x=-1$ で極小値 0

解説

$f'(x)=-3x^2+2ax+a(a+4)$

$f(x)$ は $x=-1$ で極値をとるから　　$f'(-1)=0$

よって　　$-3\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)+a(a+4)=0$

ゆえに　　$a^2+2a-3=0$　　　よって　$(a+3)(a-1)=0$

したがって　　　$a=-3,\ 1$

[1]　$a=-3$ のとき

$f'(x)=-3x^2-6x-3$

$=-3(x+1)^2$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	4	↘

$f(x)$ の増減表は右のようになり，$x=-1$ で極小とはならない。

[2]　$a=1$ のとき

$f'(x)=-3x^2+2x+5$

$=-(x+1)(3x-5)$

$f'(x)=0$ とすると

$x=-1,\ \dfrac{5}{3}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$f(x)$ の増減表は右のようになり，$x=-1$ で極小値 0 をとる。

以上から　　$a=1,\ x=-1$ で極小値 0

$\boxed{2}$

解答　$(a,\ b)=(3,\ 5),\ (-3,\ -7)$

解説

$f(x)=ax^2(x-3)+b=ax^3-3ax^2+b$ であるから

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ 2$

また　　$f(-1)=-4a+b,\ f(0)=b,\ f(1)=-2a+b$

[1]　$a>0$ のとき

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-4a+b$	↗	極大 b	↘	$-2a+b$

最小値の候補として，$f(-1)$ と $f(1)$ を比較すると，$a>0$ であるから

$-4a+b<-2a+b$

よって，最小値は　　$f(-1)=-4a+b$

また，最大値は　　$f(0)=b$

ゆえに　　$b=5$ ……①,　　$-4a+b=-7$ ……②

① を ② に代入して　　$-4a+5=-7$

したがって　　$a=3$　　　これは $a>0$ を満たす。

[2]　$a<0$ のとき

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	……	0	……	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-4a+b$	↘	極小 b	↗	$-2a+b$

最大値の候補として，$f(-1)$ と $f(1)$ を比較すると，$a<0$ であるから

$-4a+b>-2a+b$

よって，最大値は　$f(-1)=-4a+b$

また，最小値は　$f(0)=b$

ゆえに　$-4a+b=5$ ……③，　$b=-7$ ……④

④を③に代入して　$-4a-7=5$

したがって　$a=-3$　これは $a<0$ を満たす。

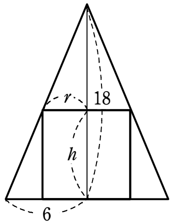
以上から　$(a,\ b)=(3,\ 5),\ (-3,\ -7)$

3

解答　底面の半径 4，高さ 6

解説

直円すいを，頂点と底面の直径を通る平面で切断すると，右の図のようになる。



直円柱の底面の半径を r，高さを h とすると，図より

$6:r=18:(18-h)$　よって　$18r=6(18-h)$

ゆえに　$h=18-3r$ ……①

また　$0<r<6$

$V=\pi r^2h=\pi r^2(18-3r)=3\pi(-r^3+6r^2)$

よって　$V'=3\pi(-3r^2+12r)=-9\pi r(r-4)$

$V'=0$ とすると　$r=0,\ 4$

$0<r<6$ における V の増減表は，次のようになる。

r	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

よって，V は $r=4$ のとき極大かつ最大となる。

①から，$r=4$ のとき　$h=6$

したがって，V が最大となるときの直円柱の底面の半径は 4，高さは 6 である。

4

解答　(1)　$1<a<2$ のとき $x=a$ で最小値 $2a^3-9a^2+12a$，

$2\leqq a$ のとき $x=2$ で最小値 4

(2)　$1<a<\dfrac{5}{2}$ のとき $x=1$ で最大値 5；$a=\dfrac{5}{2}$ のとき $x=1,\ \dfrac{5}{2}$ で最大値 5；

$\dfrac{5}{2}<a$ のとき $x=a$ で最大値 $2a^3-9a^2+12a$

解説

$y'=6x^2-18x+12$

$=6(x-1)(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=1,\ 2$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 5	↘	極小 4	↗

(1)　[1]　$1<a<2$ のとき　グラフは図①のようになる。

よって　$x=a$ で最小値 $2a^3-9a^2+12a$

[2]　$2\leqq a$ のとき　グラフは図②，③，④のようになる。

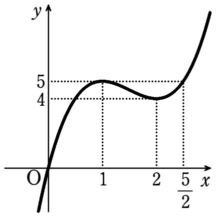
よって　$x=2$ で最小値 4

(2)　$2x^3-9x^2+12x=5$ とすると

$2x^3-9x^2+12x-5=0$

ゆえに　$(x-1)^2(2x-5)=0$

これを解いて　$x=1,\ \dfrac{5}{2}$



[1]　$1<a<\dfrac{5}{2}$ のとき

グラフは図①，②のようになる。

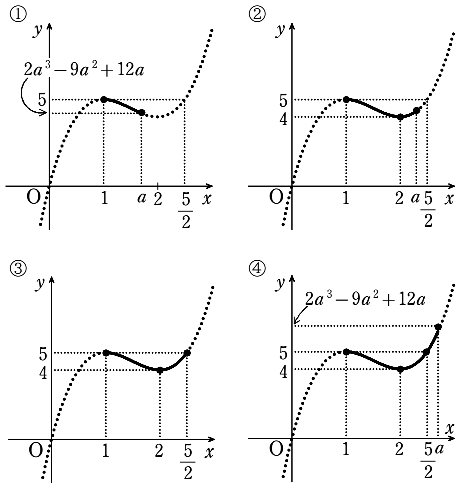
よって　$x=1$ で最大値 5

[2]　$a=\dfrac{5}{2}$ のとき　グラフは図③のようになる。

よって　$x=1,\ \dfrac{5}{2}$ で最大値 5

[3]　$\dfrac{5}{2}<a$ のとき　グラフは図④のようになる。

よって　$x=a$ で最大値 $2a^3-9a^2+12a$



5

解答　(ア)　0　(イ)　2　(ウ)　$-1+\log_2(3\pm\sqrt{5})$　(エ)　-10

解説

$2^x>0,\ 2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$f(x)=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

等号は $2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のとき成り立つ。

よって，$f(x)$ は $x={}^{\text{ア}}0$ のとき最小値 ${}^{\text{イ}}2$ をとる。

ゆえに，$2^x+2^{-x}=t$ とおくと　$t\geqq 2$

また　$g(x)=8^x+8^{-x}-4(4^x+4^{-x})=(2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})-4\{(2^x+2^{-x})^2-2\}$

$g(x)$ を t で表した式を $h(t)$ とおくと

$h(t)=t^3-3t-4(t^2-2)=t^3-4t^2-3t+8$

よって　$h'(t)=3t^2-8t-3=(3t+1)(t-3)$

$h'(t)=0$ とすると　$t=-\dfrac{1}{3},\ 3$

$t\geqq 2$ における $h(t)$ の増減表は右のようになる。

t	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	-6	↘	-10	↗

したがって，$h(t)$ すなわち $g(x)$ は $t=3$ のとき

最小値 ${}^{\text{エ}}-10$ をとる。

このとき，$2^x+2^{-x}=3$ であるから

$(2^x)^2-3\cdot 2^x+1=0$

よって　$2^x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　ゆえに　$x={}^{\text{ウ}}-1+\log_2(3\pm\sqrt{5})$

1

解答　$0 \leqq a < 1$ のとき　$x=-2$ で極小値 $-16a$，$x=0$ で極小値 0

$a=1$ のとき　　$x=-2$ で極小値 -16

$a>1$ のとき　　$x=-2$ で極小値 $-16a$，$x=a-1$ で極小値 $-(a-1)^3(a+3)$

解説

$f'(x)=12x^3+12(3-a)x^2+24(1-a)x=12x\{x^2+(3-a)x+2(1-a)\}$

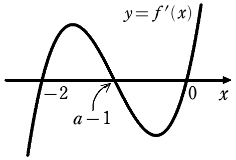
$\quad =12x(x+2)(x+1-a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-2,\ 0,\ a-1$

[1]　$0 \leqq a < 1$ のとき　　$-1 \leqq a-1 < 0$

増減表は次のようになる。

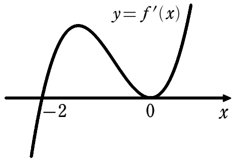
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗



[2]　$a=1$ のとき　　$a-1=0$

増減表は次のようになる。

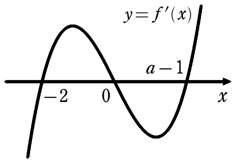
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	0	↗



[3]　$1<a$ のとき　　$0<a-1$

増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$a-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗



$f(x)=x^2\{3x^2+4(3-a)x+12(1-a)\}$

$\quad =x^2\{3(x+2)^2-4a(x+3)\}$　であるから

$\quad f(-2)=(-2)^2\cdot(-4a\cdot 1)=-16a,\quad f(0)=0$

$\quad f(a-1)=(a-1)^2\{3(a+1)^2-4a(a+2)\}=-(a-1)^2(a^2+2a-3)$

$\quad\quad =-(a-1)^3(a+3)$

以上から

$0 \leqq a < 1$ のとき　$x=-2$ で極小値 $-16a$，$x=0$ で極小値 0

$a=1$ のとき　　$x=-2$ で極小値 -16

$a>1$ のとき　　$x=-2$ で極小値 $-16a$，$x=a-1$ で極小値 $-(a-1)^3(a+3)$

2

解答　$a=-6,\ b=9,\ c=-1$

解説

$f'(x)=3x^2+2ax+b$，$f(1)=1+a+b+c$ である。

点 $(2,\ 1)$ に関して点 $(1,\ a+b+c+1)$ と対称な点の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$$\frac{1+X}{2}=2,\quad \frac{a+b+c+1+Y}{2}=1$$

よって　　$X=3,\ Y=-a-b-c+1$　……①

点 $(X,\ Y)$ は $y=f(x)$ のグラフ上にあるから

$$Y=X^3+aX^2+bX+c$$

① を代入して　　$-a-b-c+1=3^3+a\cdot 3^2+b\cdot 3+c$

整理して　　$5a+2b+c+13=0$　……②

また，点 $(2,\ 1)$ は $y=f(x)$ のグラフ上にあり，$x=1$ で極大値をとるから

$\quad f(2)=1,\ f'(1)=0$

ゆえに　$8+4a+2b+c=1$　……③

$\quad 3+2a+b=0$　……④

②，③，④ を解いて　　$a=-6,\ b=9,\ c=-1$

逆に，このとき

$\quad f(x)=x^3-6x^2+9x-1$

$\quad f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f(x)$ の増減表は右のようになり，$x=1$ で極大値をとるから，条件に適する。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって　　$a=-6,\ b=9,\ c=-1$

3

解答　(1)　$-3 \leqq x \leqq 3$　　(2)　$x=3,\ y=-6,\ z=-6$ のとき最小値 18

解説

(1)　条件から　　$y+z=-4x,\ yz=6x^2-18$

よって，$y,\ z$ は t についての 2 次方程式 $t^2+4xt+6x^2-18=0$　……① の 2 つの解である。① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2x)^2-(6x^2-18)=-2(x+3)(x-3)$$

$y,\ z$ は実数であるから，$D \geqq 0$ より　　$-3 \leqq x \leqq 3$

(2)　$-2x^3+y^2+z^2=-2x^3+(y+z)^2-2yz$

$\quad =-2x^3+(-4x)^2-2(6x^2-18)=-2x^3+4x^2+36$

この式を $f(x)$ とすると　　$f'(x)=-6x^2+8x=-2x(3x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ \dfrac{4}{3}$

$-3 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	36	↗	極大	↘	18

したがって，$x=3$ のとき最小値 18 をとる。

このとき，① は　　$t^2+12t+36=0$　　すなわち　$(t+6)^2=0$

$y,\ z$ はこの方程式の解であるから　　$y=-6,\ z=-6$

以上から，$x=3,\ y=-6,\ z=-6$ のとき最小値 18 をとる。

4

解答　$a<-2$ のとき $g(a)=a^3-a^2-16a+32$，$-2 \leqq a < 1$ のとき $g(a)=52$

$1 \leqq a < 4$ のとき $g(a)=a^3-10a^2+17a+44$，

$4 \leqq a$ のとき $g(a)=a^3-a^2-16a+32$

解説

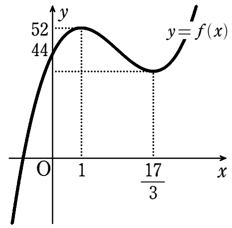
$f'(x)=3x^2-20x+17$

$\quad =(x-1)(3x-17)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1,\ \dfrac{17}{3}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{17}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

増減表から，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



[1]　$a+3<1$　すなわち　$a<-2$ のとき

$\quad g(a)=f(a+3)=(a+3)^3-10(a+3)^2+17(a+3)+44$

$\quad\quad =a^3-a^2-16a+32$

[2]　$a+3 \geqq 1$ かつ $a<1$　すなわち　$-2 \leqq a < 1$ のとき

$\quad g(a)=f(1)=52$

$a \geqq 1$ のとき，$f(a)=f(a+3)$ とすると

$a^3-10a^2+17a+44=a^3-a^2-16a+32$ から

$\quad 9a^2-33a-12=0$

よって　　$(3a+1)(a-4)=0$　　ゆえに　　$a=-\dfrac{1}{3},\ 4$

$a \geqq 1$ から　　$a=4$

[3]　$1 \leqq a < 4$ のとき　$g(a)=f(a)=a^3-10a^2+17a+44$

[4]　$4 \leqq a$ のとき　　$g(a)=f(a+3)=a^3-a^2-16a+32$

1

解答　(1)　3個　　(2)　1個

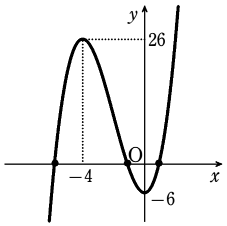
解説

(1)　$f(x)=x^3+6x^2-6$ とおくと　　$f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ -4$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	…	-4	…	0	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	26	↘	-6	↗



よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになり，
このグラフと x 軸の共有点の個数は　3個
ゆえに，方程式の異なる実数解の個数は　3個

(2)　$f(x)=2x^3+6x+1$ とおくと　　$f'(x)=6x^2+6=6(x^2+1)$

$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調に増加する。

また　　$f(-1)=-7,\ f(0)=1$

よって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は　1個
ゆえに，方程式の異なる実数解の個数は　1個

2

解答　$a<-3,\ 24<a$ のとき1；$a=-3,\ 24$ のとき2；$-3<a<24$ のとき3

解説

方程式を変形すると　　$2x^3+9x^2-3=a$

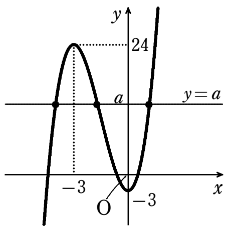
よって，$f(x)=2x^3+9x^2-3$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の異なる実数の解の個数に一致する。

$$f'(x)=6x^2+18x=6x(x+3)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ -3$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	…	-3	…	0	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	24	↘	-3	↗



よって，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。
したがって，右のグラフから，求める解の個数は

$a<-3,\ 24<a$ のとき　1(個)
$a=-3,\ 24$　のとき　2(個)
$-3<a<24$　のとき　3(個)

3

解答　略

解説

$f(x)=(x^3+12)-9x$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-9=3(x^2-3)=3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{3}$

$x\geqq0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	…	$\sqrt{3}$	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	12	↘	$12-6\sqrt{3}$	↗

よって，$x\geqq0$ における $f(x)$ の最小値は

$$f(\sqrt{3})=12-6\sqrt{3}=6(2-\sqrt{3})>0$$

ゆえに，$x\geqq0$ のとき　　$f(x)>0$　　　したがって　　$x^3+12>9x$

4

解答　$-3<a<5$

解説

$y'=3x^2+6x+1$ であるから，曲線 C 上の点 $(t,\ t^3+3t^2+t)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3+3t^2+t)=(3t^2+6t+1)(x-t)$$

すなわち　　$y=(3t^2+6t+1)x-2t^3-3t^2$

この接線が点 $(1,\ a)$ を通るとすると

$$-2t^3+6t+1=a \quad \cdots\cdots ①$$

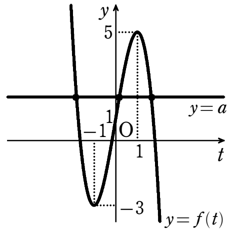
$f(t)=-2t^3+6t+1$ とすると

$$f'(t)=-6t^2+6=-6(t+1)(t-1)$$

$f'(t)=0$ とすると　　$t=\pm1$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	…	-1	…	1	…
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	極小 -3	↗	極大 5	↘



3次関数のグラフでは，接点が異なると接線が異なるから，t の3次方程式①が異なる3個の実数解をもつとき，点Aから曲線 C に3本の接線が引ける。

したがって，曲線 $y=f(t)$ と直線 $y=a$ が異なる3点で交わる条件を求めて

$$-3<a<5$$

5

解答　$a<0,\ 2<a$

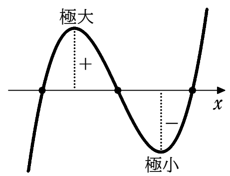
解説

$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax-2a$ とおく。

方程式 $f(x)=0$ が異なる3個の実数解をもつための必要十分条件は，$f(x)$ が極値をもち，更に極大値と極小値が異符号であること，すなわち

(極大値)×(極小値)<0

となることである。



$$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6\{x^2-(a+1)x+a\}$$
$$=6(x-1)(x-a)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1,\ a$

よって，$f(x)=0$ が異なる3個の実数解をもつのは

$$a\neq1 \ \cdots\cdots ① \quad かつ \quad f(1)f(a)<0$$

のときである。

$f(1)f(a)<0$ から　　$(a-1)(-a^3+3a^2-2a)<0$

よって　　$a(a-1)(a^2-3a+2)>0$　　　すなわち　　$a(a-1)^2(a-2)>0$

①より $(a-1)^2>0$ であるから　　$a(a-2)>0$

ゆえに　　$a<0,\ 2<a$　　（これは①を満たす）

したがって，求める a の値の範囲は　　$a<0,\ 2<a$

1

解答　(1)　2個　　(2)　1個

解説

(1)　$y=-x^3-3x^2+4$ ……① とすると

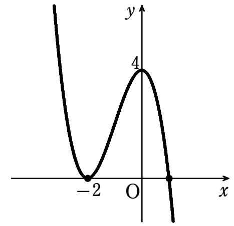
$$y'=-3x^2-6x=-3x(x+2)$$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ -2$

y の増減表は右のようになる。

x	…	-2	…	0	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 0	↗	極大 4	↘

よって，関数①のグラフは右の図のようになり，
グラフと x 軸の共有点は2個である。
したがって，方程式 $-x^3-3x^2+4=0$ の実数解は2個である。



(2)　$y=2x^3+3x^2+1$ ……① とすると

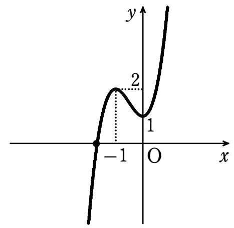
$$y'=6x^2+6x=6x(x+1)$$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ -1$

y の増減表は右のようになる。

x	…	-1	…	0	…
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 2	↘	極小 1	↗

よって，関数①のグラフは右の図のようになり，
グラフと x 軸の共有点は1個である。
したがって，方程式 $2x^3+3x^2+1=0$ の実数解は1個である。



2

解答　$a<-2,\ 2<a$ のとき1個；　$a=\pm2$ のとき2個；
$-2<a<2$ のとき3個

解説

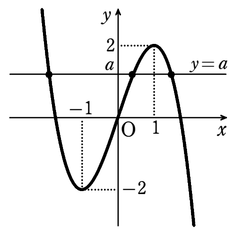
方程式を変形すると　　$-x^3+3x=a$

$f(x)=-x^3+3x$ とおくと　　$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘



関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，
方程式の異なる実数解の個数に一致する。
よって，右の図より　　$a<-2,\ 2<a$ のとき 1個；
$a=\pm2$ のとき 2個；$-2<a<2$ のとき 3個

3

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　$f(x)=\left(2x^3+\dfrac{1}{27}\right)-x^2$ とすると　　$f'(x)=6x^2-2x=2x(3x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ \dfrac{1}{3}$

$x\geqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	…	$\frac{1}{3}$	…
$f'(x)$	0	−	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{27}$	↘	0	↗

よって，$x\geqq 0$ において，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}$ で最小値 0 をとる。

したがって，$x\geqq 0$ のとき，$f(x)\geqq 0$ であるから

$$\left(2x^3+\frac{1}{27}\right)-x^2\geqq 0\quad すなわち\quad 2x^3+\frac{1}{27}\geqq x^2$$

参考　等号が成り立つのは，$x=\dfrac{1}{3}$ のときである。

(2)　$f(x)=(x^3+16)-12x$ とすると

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm 2$

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，$x>2$ のとき　　$f(x)>0$

したがって　　$x^3+16>12x$

x	2	…
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	↗

別解　$x>2$ のとき　　$f'(x)>0$

ゆえに，$x>2$ のとき $f(x)$ は単調に増加する。

よって，$x>2$ のとき　　$f(x)>f(2)=0$　すなわち　$f(x)>0$

$x=2$ で最小値 0

をとる。

よって，$x\geqq 0$ のとき　　$f(x)\geqq 0$

したがって　　$x^4-16\geqq 32(x-2)$

4

解答　$k<-1$，$0<k$ のとき 1 本；$k=-1$，0 のとき 2 本；$-1<k<0$ のとき 3 本

解説

$y'=-3x^2+6x$ であるから，曲線 C 上の点 $(t,\ -t^3+3t^2)$ における接線の方程式は

$y-(-t^3+3t^2)=(-3t^2+6t)(x-t)$

この直線が点 $(0,\ k)$ を通るとき　　$k+t^3-3t^2=3t^3-6t^2$

よって　　$2t^3-3t^2=k$　……①

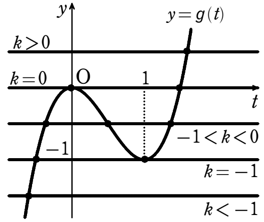
3 次関数のグラフでは，接点が異なると接線が異なるから，t の 3 次方程式 ① の実数解の個数が，求める接線の本数に等しい。

つまり，$g(t)=2t^3-3t^2$ のグラフと直線 $y=k$ との共有点の個数が接線の本数いに等しい。

$g'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$

$g(t)$ の増減表は，次のようになる。

t	…	0	…	1	…
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	極大 0	↘	極小 −1	↗



よって，$y=g(t)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数を調べると，求める接線の本数は

$k<-1$，$0<k$ のとき　1 本

$k=-1$，0 のとき　2 本

$-1<k<0$ のとき　3 本

5

解答　$p>\dfrac{1}{4}$

解説

$f(x)=x^3-3px+p$ とおく。

方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつための条件は，

$f(x)$ が極値をもち，さらに，極大値と極小値が異符号であること

すなわち　　(極大値)×(極小値)<0

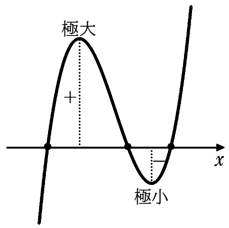
となることである。

$f'(x)=3x^2-3p=3(x^2-p)$

$f(x)$ が極値をもつ条件は　$p>0$

このとき，$f'(x)=0$ から　　$x=\pm\sqrt{p}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。



x	…	$-\sqrt{p}$	…	$\sqrt{p}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって　　$f(-\sqrt{p})\cdot f(\sqrt{p})<0$

すなわち　　$p(2\sqrt{p}+1)\cdot p(-2\sqrt{p}+1)<0$

ゆえに　　$p^2(1-4p)<0$

$p>0$ より $p^2>0$ であるから　$1-4p<0$

したがって　　$p>\dfrac{1}{4}$

1

解答　1 個

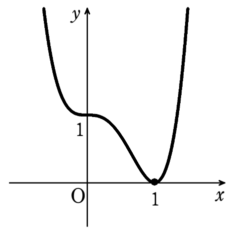
解説

$y=3x^4-4x^3+1$ とおくと　　$y'=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 1$

y の増減表は次のようになる。

x	…	0	…	1	…
y'	−	0	−	0	+
y	↘	1	↘	0	↗



よって，この関数のグラフは右の図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は　1 個

ゆえに，方程式の異なる実数解の個数は　1 個

2

解答　略

解説

$f(x)=2x^3+x^2-5x+1$ とおくと　　$f(0)=1,\ f(1)=-1$

よって　　$f(0)f(1)<0$

ゆえに，方程式 $f(x)=0$ は区間 $0<x<1$ に実数解をもつ。

3

解答　(1)　$-1<k<3$　　(2)　$0<c<4\sqrt{2}$

解説

(1)　$x^3-2x+1=x+k$ とすると　　$x^3-3x+1=k$

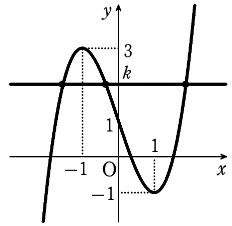
曲線 $y=x^3-2x+1$ と直線 $y=x+k$ が異なる 3 点を共有するための条件は，曲線 $y=x^3-3x+1$ ……① と直線 $y=k$ が異なる 3 点を共有することである。

① から　　$y'=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm 1$

$y=x^3-3x+1$ の増減表は次のようになる。

x	…	−1	…	1	…
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大 3	↘	極小 −1	↗



よって，曲線 ① の概形は図のようになる。

曲線 ① と直線 $y=k$ が異なる 3 つの共有点をもつような k の値の範囲は，図から　　$-1<k<3$

(2)　方程式を変形して　　$-x^3+6x=c$　……①

$y=-x^3+6x$ とすると

$y'=-3x^2+6=-3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$y'=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{2}$

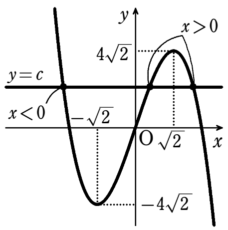
y の増減表は右のようになり，更に $x=0$ の

x	…	$-\sqrt{2}$	…	$\sqrt{2}$	…
y'	−	0	+	0	−
y	↘	極小 $-4\sqrt{2}$	↗	極大 $4\sqrt{2}$	↘

とき $y=0$ であるから，$y=-x^3+6x$ のグラフは右図のようになる。

方程式①が，２つの異なる正の解と１つの負の解をもつための条件は，このグラフと直線 $y=c$ が，$x>0$ の範囲で２個，$x<0$ の範囲で１個の共有点をもつことである。

よって，図から　　$0<c<4\sqrt{2}$



4

解答　(1)　$-2<x<0$，$2<x$　　(2)　$x=-1$，$2\leqq x$

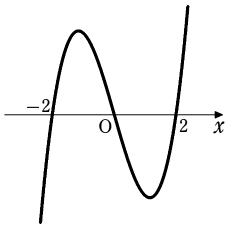
解説

(1)　$y=x^3-4x$　……① とおくと　$y=x(x+2)(x-2)$

$y=0$ の解から，x 軸との共有点の x 座標は $x=-2$，0，2 で，x^3 の係数が正。

よって，① のグラフは右図のようになる。

求める不等式の解は，① のグラフの $y>0$ となる x の値の範囲であるから　　$-2<x<0$，$2<x$



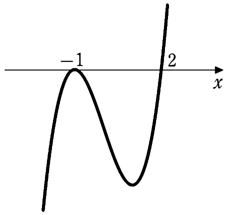
(2)　$y=x^3-3x-2$　……① とおくと

$y=(x+1)^2(x-2)$

$y=0$ の解から，x 軸との共有点の x 座標は $x=-1$，2 で，x^3 の係数が正。

よって，① のグラフは右図のようになる。

求める不等式の解は，① のグラフの $y\geqq0$ となる x の値の範囲であるから　　$x=-1$，$2\leqq x$



5

解答　(ア)　2　　(イ)　$\dfrac{1}{2}$　　(ウ)　4

解説

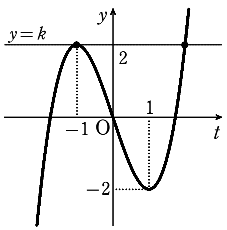
$\log_2 x=t$ とおくと，t の値１つに対して，x の値が必ず１つ対応する。

ゆえに，方程式 $t^3-3t=k$ がちょうど２つの異なる解をもつときを考える。

$f(t)=t^3-3t$ とすると　　$f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$

$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	…	-1	…	1	…
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↗	2	↘	-2	↗



よって，$y=f(t)$ のグラフは右の図のようになる。

このグラフと直線 $y=k$ $(k>0)$ がちょうど２つの共有点をもつような k の値は　　$k={}^{ア}2$

このとき，t の方程式は　　$t^3-3t=2$

ゆえに　　$(t+1)^2(t-2)=0$　　　　よって　$t=-1$，2

すなわち　$\log_2 x=-1$，2　　　　したがって　$x={}^{イ}\dfrac{1}{2}$，${}^{ウ}4$

1

解答　6

解説

$f(x)=x^3+32-px^2$ とおく。

$x\geqq0$ のとき $f(x)\geqq0$ が成り立つような定数 p の条件を求める。

$f(x)=x^3-px^2+32$ から　$f'(x)=3x^2-2px=x(3x-2p)$

$f'(x)=0$ となる x の値は　$x=0$，$\dfrac{2}{3}p$

[1]　$p\leqq0$ のとき

$x\geqq0$ において $f'(x)\geqq0$ であるから，$f(x)$ は $x\geqq0$ で単調に増加する。

$f(0)=32$ より，$x\geqq0$ のとき $f(x)\geqq0$ が成り立つ。

[2]　$p>0$ のとき

$x\geqq0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	…	$\dfrac{2}{3}p$	…
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	32	↘	$-\dfrac{4}{27}p^3+32$	↗

よって，$x\geqq0$ のとき $f(x)\geqq0$ が成り立つ条件は　$-\dfrac{4}{27}p^3+32\geqq0$

整理すると　$p^3\leqq8\cdot27$

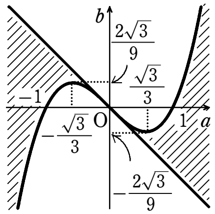
$p>0$ であるから　$0<p\leqq6$

[1]，[2] から，$x\geqq0$ のとき $f(x)\geqq0$ が成り立つような p の条件は　$p\leqq6$

ゆえに，求める p の最大値は　6

2

解答　[図] 境界線を含まない。



解説

$y=x^3-x$ から　　$y'=3x^2-1$

よって，曲線上の点 $(t,\ t^3-t)$ における接線の方程式は

$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$

すなわち　　$y=(3t^2-1)x-2t^3$

この直線が点 $(a,\ b)$ を通るとき　　$b=(3t^2-1)a-2t^3$

整理して　　$2t^3-3at^2+a+b=0$　……①

３次関数のグラフでは，接点が異なると接線も異なるから，点 $(a,\ b)$ から３本の相異なる接線が引けるための必要十分条件は，t の３次方程式 ① が異なる３つの実数解をもつことである。

よって，$f(t)=2t^3-3at^2+a+b$ とすると，$f(t)$ は極値をもち，極大値と極小値の積が負となる。

$f'(t)=6t(t-a)$ であるから，求める条件は

$a\neq0$ かつ $f(0)f(a)<0$

すなわち　　$(a+b)(b-a^3+a)<0$　……②

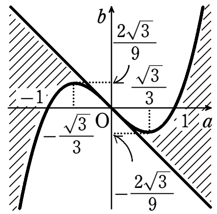
② で $a=0$ とすると $b^2<0$ となり，これを満たす実数 b は存在しない。ゆえに，条件 $a\neq0$ は ② に含まれるから，求める条件は ② である。

② から　$\begin{cases} a+b>0 \\ b-a^3+a<0 \end{cases}$

または　$\begin{cases} a+b<0 \\ b-a^3+a>0 \end{cases}$

すなわち　$\begin{cases} b>-a \\ b<a^3-a \end{cases}$

または　$\begin{cases} b<-a \\ b>a^3-a \end{cases}$



よって，求める範囲は図の斜線部分。

ただし，境界線を含まない。

3

解答　(1)　$-4<c<\dfrac{17}{27}$

(2)　$-4<c<-1$，$\dfrac{-5-\sqrt{33}}{4}<\alpha<-2$，$\dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}<\gamma<\dfrac{1}{2}$

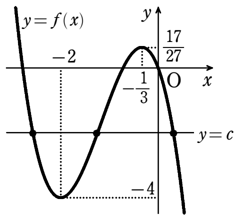
解説

(1)　$2x^3+7x^2+4x+c=0$ から　　$-2x^3-7x^2-4x=c$

$f(x)=-2x^3-7x^2-4x$ とおくと　　$f'(x)=-6x^2-14x-4=-2(3x+1)(x+2)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

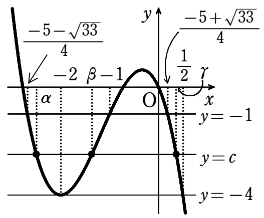
x	…	-2	…	$-\dfrac{1}{3}$	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4	↗	$\dfrac{17}{27}$	↘



ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。

求める条件は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=c$ が異なる３個の共有点をもつことであるから　　$-4<c<\dfrac{17}{27}$

(2)　$f(-1)=-1$ であるから，$\alpha<\beta<\gamma$ に注意すると，右の図より，$\beta<-1$ となる c の値の範囲は　　$-4<c<-1$



また，$c=-1$ とすると

$2x^3+7x^2+4x-1=0$

すなわち　　$(x+1)(2x^2+5x-1)=0$

よって　　$x=-1$，$\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$

さらに，$c=-4$ とすると

$2x^3+7x^2+4x-4=0$

すなわち　　$(x+2)^2(2x-1)=0$　　　　よって　$x=-2$，$\dfrac{1}{2}$

したがって，図より，α，γ の値の範囲は

$\dfrac{-5-\sqrt{33}}{4}<\alpha<-2$，$\dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}<\gamma<\dfrac{1}{2}$

1

解答　(1)　略　　(2)　$f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$，$\frac{1}{4}x^2+x+1$

解説

(1)　$f(x)=(x+2)f'(x)-\{f'(x)\}^2$ から　　$\{f'(x)\}^2=(x+2)f'(x)-f(x)$　……①

$f(x)$ が n 次式 $(n\geqq3)$ であるとすると，$f'(x)$ は $(n-1)$ 次式であるから，① の左辺は $2(n-1)$ 次式となる。

一方，$(x+2)f'(x)$，$f(x)$ がともに n 次式であることから，① の右辺は n 次以下の多項式または 0 である。

よって，① の両辺の次数が等しくなるための条件は　$2(n-1)\leqq n$

これを解くと　$n\leqq2$　　　　これは，$n\geqq3$ と矛盾する。

したがって，$f(x)$ は 3 次以上にならない。

(2)　(1) より，$f(x)$ は 2 次以下の多項式で表されるから，$f(x)=ax^2+bx+c$ （a，b，c は実数）とおける。

このとき　$f'(x)=2ax+b$

よって，① から　　$(2ax+b)^2=(x+2)(2ax+b)-(ax^2+bx+c)$

展開して整理すると　　$(4a^2-a)x^2+(4ab-4a)x+b^2-2b+c=0$

これが x についての恒等式であるから

$4a^2-a=0$ ……②，　$4ab-4a=0$ ……③，　$b^2-2b+c=0$　……④

また，$f'(1)=\frac{3}{2}$ から　$2a\cdot1+b=\frac{3}{2}$　　　すなわち　$b=-2a+\frac{3}{2}$　……⑤

② から　$a(4a-1)=0$　　ゆえに　$a=0$，$\frac{1}{4}$

[1]　$a=0$ のとき

⑤ から，$b=\frac{3}{2}$ であり，これは ③ を満たす。

また，④ から　　$c=-b^2+2b=-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

よって　$f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$

[2]　$a=\frac{1}{4}$ のとき

⑤ から，$b=1$ であり，これは ③ を満たす。

また，④ から　$c=-b^2+2b=-1^2+2\cdot1=1$

よって　$f(x)=\frac{1}{4}x^2+x+1$

2

解答　(1)　$b=4-a$，$(2,\ 1)$　　(2)　$a=3$　　(3)　$\frac{2\sqrt{26}}{13}$

解説

(1)　$f(x)=x^3-6x^2+4x+9$ から　　$f'(x)=3x^2-12x+4$

接線 ℓ と接線 m が平行になるとき，$f'(a)=f'(b)$ であるから

$3a^2-12a+4=3b^2-12b+4$

ゆえに　　$3(a^2-b^2)-12(a-b)=0$

よって　　$3(a-b)(a+b-4)=0$

$a\neq b$ であるから　　$a+b-4=0$　すなわち　$b=4-a$

次に，線分 AB の中点の座標は　$\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$

ここで，$a+b-4=0$ から　　$a+b=4$

また　　$f(a)+f(b)=(a^3+b^3)-6(a^2+b^2)+4(a+b)+9\cdot2$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)-6\{(a+b)^2-2ab\}+4(a+b)+18$

$=4^4-3ab\cdot4-6(4^2-2ab)+4\cdot4+18=2$

したがって，線分 AB の中点の座標は　$\left(\frac{4}{2},\ \frac{2}{2}\right)$　すなわち　$(2,\ 1)$

(2)　接線 ℓ の方程式は　　$y-(a^3-6a^2+4a+9)=(3a^2-12a+4)(x-a)$

すなわち　　　$y=(3a^2-12a+4)x-2a^3+6a^2+9$　……①

この直線が点 $(2,\ -1)$ を通るとき

$-1=2(3a^2-12a+4)-2a^3+6a^2+9$

よって　　$2a^3-12a^2+24a-18=0$

$a^3-6a^2+12a-9=0$

$(a-3)(a^2-3a+3)=0$

a は実数であるから　　$a=3$

(3)　① に $a=3$ を代入して　　$y=-5x+9$

また，(1) から，$a=3$ のとき　　$b=4-a=1$

$f(1)=1^3-6\cdot1+4\cdot1+9=8$ であるから　　B$(1,\ 8)$

$\ell /\!/ m$ であるから，2 接線 ℓ，m 間の距離は，直線 m 上の点 B と直線 ℓ すなわち $5x+y-9=0$ の距離を求めればよい。

よって　　$\frac{|5\cdot1+8-9|}{\sqrt{5^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{26}}=\frac{2\sqrt{26}}{13}$

3

解答　(1)　$a=-1$，$b=-1$，$c=1$；$y=2x+2$

(2)　$a=6$ のとき $y=-7x+2$，$a=-21$ のとき $y=-4x-13$

解説

(1)　$f(x)=x^3+ax$，$g(x)=bx^2+c$ とすると

$f'(x)=3x^2+a$，$g'(x)=2bx$

2 曲線が点 $(-1,\ 0)$ を通り，この点で共通な接線をもつから

$f(-1)=g(-1)=0$，　$f'(-1)=g'(-1)$

よって　　$-1-a=0$，$b+c=0$，$3+a=-2b$

これを解くと　　$a=-1$，$b=-1$，$c=1$

このとき，$f'(x)=3x^2-1$ から　　$f'(-1)=2$

ゆえに，点 $(-1,\ 0)$ における共通の接線の方程式は

$y=2(x+1)$　すなわち　$y=2x+2$

(2)　$f(x)=x^3-x^2-12x-1$，$g(x)=-x^3+2x^2+a$ とすると

$f'(x)=3x^2-2x-12$，$g'(x)=-3x^2+4x$

2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $x=p$ の点で接するための条件は

$f(p)=g(p)$，$f'(p)=g'(p)$

よって　　$p^3-p^2-12p-1=-p^3+2p^2+a$，$3p^2-2p-12=-3p^2+4p$

それぞれ整理して　　$a=2p^3-3p^2-12p-1$ ……①，

$p^2-p-2=0$　　　　……②

② から　　$(p+1)(p-2)=0$　　　ゆえに　　$p=-1$，2

① から　　$p=-1$ のとき　$a=6$，　$p=2$ のとき　$a=-21$

曲線 $y=x^3-x^2-12x-1$ 上の点 $x=p$ における接線の方程式は

$y-(p^3-p^2-12p-1)=(3p^2-2p-12)(x-p)$

すなわち　$y=(3p^2-2p-12)x-2p^3+p^2-1$

求める接線の方程式は

$a=6$ $(p=-1)$ のとき　　$y=-7x+2$，

$a=-21$ $(p=2)$ のとき　　$y=-4x-13$

4

解答　曲線 $y=-2x^3-3x^2+1$ の $x<-1$，$0<x$ の部分

解説

$f(x)=x^3+3px^2+3px+1$ とおくと

$f'(x)=3x^2+6px+3p=3(x^2+2px+p)$

曲線 $y=f(x)$ が極大，極小となる点をもつための条件は，

方程式 $f'(x)=0$　　すなわち　　$x^2+2px+p=0$　……①

が異なる 2 つの実数解をもつことである。

よって，① の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=p^2-p>0$　　これを解いて　　$p<0$，$1<p$　……②

① の 2 つの解を α，β とすると，α，β は 2 点 A，B の x 座標を表す。

解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=-2p$，$\alpha\beta=p$

線分 AB の中点 M の座標を $(X,\ Y)$ とおくと

$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=-p$　……③

$Y=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

ここで　　$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^3+\beta^3)+3p(\alpha^2+\beta^2)+3p(\alpha+\beta)+2$

$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+3p\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+3p(\alpha+\beta)+2$

$=(-2p)^3-3p(-2p)+3p\{(-2p)^2-2p\}+3p(-2p)+2$

$=4p^3-6p^2+2$

よって　　$Y=2p^3-3p^2+1$　……④

③ から　　$p=-X$　……⑤

これを ④ に代入して

$Y=2(-X)^3-3(-X)^2+1$　　ゆえに　　$Y=-2X^3-3X^2+1$

また，⑤ を ② に代入して

$-X<0$，$1<-X$　　よって　　$X<-1$，$0<X$

よって，点 M は，曲線 $y=-2x^3-3x^2+1$ の $x<-1$，$0<x$ の部分にある。

逆に，この図形上の任意の点は，条件を満たす。

したがって，点 M の軌跡は　　曲線 $y=-2x^3-3x^2+1$ の $x<-1$，$0<x$ の部分

5

解答　$(a,\ b)=(3,\ 5)$，$(-3,\ 1)$

解説

$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$，$\frac{2}{3}a$

[1]　$a=0$ のとき　　$f'(x)=3x^2\geqq0$

よって，$f(x)$ は単調に増加するから，極値をもたない。

したがって，この場合は不適。

[2]　$a>0$ のとき

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，求める条件は

$$f(0)=5,\ f\left(\frac{2}{3}a\right)=1$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f(0)=5$ から　　$b=5$　　……①

$f\left(\frac{2}{3}a\right)=1$ から　　$-\frac{4}{27}a^3+b=1$　……②

①を②に代入して整理すると　　$a^3=27$

a は実数であるから　　$a=3$

これは $a>0$ を満たす。

[3]　$a<0$ のとき

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，求める条件は

$$f\left(\frac{2}{3}a\right)=5,\ f(0)=1$$

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f\left(\frac{2}{3}a\right)=5$ から　　$-\frac{4}{27}a^3+b=5$　……③

$f(0)=1$ から　　$b=1$　　……④

④を③に代入して整理すると　　$a^3=-27$

a は実数であるから　　$a=-3$

これは $a<0$ を満たす。

以上から　　$a=3$，$b=5$　または　$a=-3$，$b=1$

6

解答　(1)　$a<2$，$2<a$

(2)　$a<2$ のとき　$x=a$ で極大値 $-a^3+6a^2$，$x=2$ で極小値 $12a-8$

$a>2$ のとき　$x=2$ で極大値 $12a-8$，$x=a$ で極小値 $-a^3+6a^2$

(3)　$a=\frac{2}{3}$，6

解説

(1)　$f'(x)=6x^2-6(a+2)x+12a=6\{x^2-(a+2)x+2a\}$

$=6(x-2)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=2$，a

$f(x)$ が極値をもつための必要十分条件は，2 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

よって　　$a\neq 2$　　　すなわち　　$a<2$，$2<a$

(2)　[1]　$a<2$ のとき，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $-a^3+6a^2$	↘	極小 $12a-8$	↗

よって，$f(x)$ は　$x=a$ で極大値 $-a^3+6a^2$，$x=2$ で極小値 $12a-8$　をとる。

[2]　$a>2$ のとき，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $12a-8$	↘	極小 $-a^3+6a^2$	↗

よって，$f(x)$ は　$x=2$ で極大値 $12a-8$，$x=a$ で極小値 $-a^3+6a^2$　をとる。

(3)　(2) の結果を利用する。

[1]　$a<2$ のとき

極小値が 0 であるとき　　$12a-8=0$

これを解いて　　$a=\frac{2}{3}$　($a<2$ を満たす)

[2]　$a>2$ のとき

極小値が 0 であるとき　　$-a^3+6a^2=0$

よって　　$a^2(a-6)=0$　　　$a>2$ であるから　　$a=6$

したがって　　$a=\frac{2}{3}$，6

7

解答　(1)　$y=-\frac{t^3}{2}+\frac{3}{2}t$　　(2)　$x=\frac{\pi}{2}$，π で最大値 1；$x=0$ で最小値 -1

解説

(1)　$y=\sin^3 x-\cos^3 x$

$=(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)$

ここで，$t=\sin x-\cos x$ の両辺を 2 乗すると　　$t^2=1-2\sin x\cos x$

よって　　$\sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$

したがって　　$y=t\left(1+\frac{1-t^2}{2}\right)=-\frac{t^3}{2}+\frac{3}{2}t$

(2)　$t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ であるから　　$-\frac{\pi}{4}\leqq x-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$

よって，$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから　　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(1) から　　$\frac{dy}{dt}=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$

$\frac{dy}{dt}=0$ とすると　　$t=\pm 1$

$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における y の増減表は右のようになる。

t	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	極大 1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに，y は $t=1$ で極大かつ最大，

$t=-1$ で最小となる。

$0\leqq x\leqq\pi$ であるから

$t=1$ となるのは，$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$ から　　$x=\frac{\pi}{2}$，π

$t=-1$ となるのは，$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ から　　$x=0$

よって，y は $x=\frac{\pi}{2}$，π で最大値 1；$x=0$ で最小値 -1 をとる。

8

解答　(1)　$t^3-3t+a=0$

(2)　$a\leqq 0$，$a=2$ のとき　1 個，　$0<a<2$ のとき　2 個，　$a>2$ のとき　なし

解説

(1)　$t=2^x$ から　$f(x)=8^x-3\cdot 2^x+a=(2^x)^3-3\cdot 2^x+a=t^3-3t+a$

よって　$t^3-3t+a=0$

(2)　$t=2^x$ から　$t>0$

また，$t^3-3t+a=0$ から　$-t^3+3t=a$

よって，$t^3-3t+a=0$ の異なる実数解の個数は

曲線 $y=-t^3+3t$ ……① と直線 $y=a$

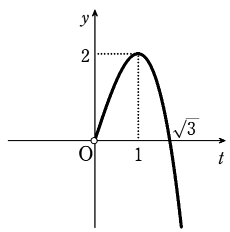
の共有点の個数と等しい。

① において　$y'=-3t^2+3=-3(t+1)(t-1)$

ゆえに，$t>0$ における $y=-t^3+3t$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		↗	2	↘

よって，曲線①は右の図のようになる。



ゆえに，$t^3-3t+a=0$ の異なる実数解の個数は

$a\leqq 0$，$a=2$ のとき　1 個

$0<a<2$ のとき　　2 個

$a>2$ のとき　　　なし

$t>0$ を満たす 1 つの t に対して，x が 1 つ決まるから，$f(x)=0$ の解の個数は

$a\leqq 0$，$a=2$ のとき　1 個

$0<a<2$ のとき　　2 個

$a>2$ のとき　　　なし

1

解答 (1) $xf'(a)+f(a)-af'(a)$ (2) $a=n$，$b=-n-1$

解説

(1) $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $px+q$ とすると，次の等式が成り立つ。

$f(x)=(x-a)^2Q(x)+px+q$ (p，q は定数) ……①

この $f(x)$ を微分すると

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+p$ ……②

①，② に $x=a$ を代入すると

$f(a)=pa+q$，$f'(a)=p$

よって　$p=f'(a)$，$q=f(a)-af'(a)$

したがって，求める余りは　$xf'(a)+f(a)-af'(a)$

(2) $f(x)=ax^{n+1}+bx^n+1$ から　$f'(x)=a(n+1)x^n+bnx^{n-1}$

(1) から，$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは

$xf'(1)+f(1)-f'(1)$

と表される。$f(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるための条件は

$f'(1)=0$　かつ　$f(1)-f'(1)=0$

すなわち　$f(1)=0$　かつ　$f'(1)=0$

$f(1)=a+b+1=0$ ……③

$f'(1)=(n+1)a+nb=0$ ……④

④−③×n から　$a-n=0$　すなわち　$a=n$

これを ① に代入して　$b=-n-1$

2

解答 (1) $\mathrm{Q}(-2a,\ -8a^3+2ka)$ (2) $k\geqq\dfrac{4}{3}$

解説

(1) $y'=3x^2-k$ から，接線 ℓ の方程式は

$y-(a^3-ka)=(3a^2-k)(x-a)$

すなわち　$y=(3a^2-k)x-2a^3$

接線 ℓ と曲線 C の交点 Q の x 座標については，y を消去して

$x^3-kx=(3a^2-k)x-2a^3$　よって　$(x-a)^2(x+2a)=0$

$x\neq a$ であるから　$\mathrm{Q}(-2a,\ -8a^3+2ka)$

(2) 点 Q における接線の傾きは　$3\cdot(-2a)^2-k=12a^2-k$

接線が直交するための条件は　$(3a^2-k)(12a^2-k)=-1$

ゆえに　$36(a^2)^2-15ka^2+k^2+1=0$ ……①

$a^2=t$ $(t>0)$ とおくと　$36t^2-15kt+k^2+1=0$ ……①′

① を満たす実数 a $(\neq 0)$ が存在するから，①′ は少なくとも 1 つの正の解をもつ。

①′ の判別式を D とすると

$D=(-15k)^2-4\cdot36(k^2+1)=9(9k^2-16)=9(3k+4)(3k-4)\geqq0$

①′ の解を α，β とすると　$\alpha\beta=\dfrac{k^2+1}{36}>0$

よって，α と β はともに正で　$\alpha+\beta=\dfrac{15k}{36}>0$

ゆえに　$\left(k\leqq-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3}\leqq k\right)$ かつ $k>0$　　したがって　$k\geqq\dfrac{4}{3}$

3

解答 (1) $y=-\dfrac{1}{2a}(x-\sqrt{a})$ (2) $a=\sqrt{2}$

解説

(1) $y=x^3-ax=x(x^2-a)$

$=x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$

$y=0$ とすると　$x=0,\ \pm\sqrt{a}$

よって　$\mathrm{A}(\sqrt{a},\ 0)$

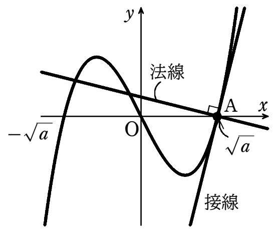
また　$y'=3x^2-a$

ゆえに，点 A における接線の傾きは

$3(\sqrt{a})^2-a=2a$

ゆえに，点 A における法線の方程式は

$y=-\dfrac{1}{2a}(x-\sqrt{a})$



(2) $y=x^3-ax$ と $y=-\dfrac{1}{2a}(x-\sqrt{a})$ から，y を消去すると

$x^3-ax=-\dfrac{1}{2a}(x-\sqrt{a})$

ゆえに　$x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})+\dfrac{1}{2a}(x-\sqrt{a})=0$

よって　$(x-\sqrt{a})\left(x^2+\sqrt{a}\,x+\dfrac{1}{2a}\right)=0$

ゆえに，題意を満たすための条件は，2 次方程式 $x^2+\sqrt{a}\,x+\dfrac{1}{2a}=0$ ……① が $x\neq\sqrt{a}$ である重解をもつことである。

ここで，$a>0$ であるから

$(\sqrt{a})^2+\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}+\dfrac{1}{2a}=2a+\dfrac{1}{2a}>0$

よって，① は $x=\sqrt{a}$ を解にもたないから，① の判別式 D について

$D=(\sqrt{a})^2-4\cdot1\cdot\dfrac{1}{2a}=0$

ゆえに　$a=\dfrac{2}{a}$　　よって　$a^2=2$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{2}$

4

解答 (1) 略 (2) $a=1$，$m=3$

解説

(1) $f(x)=x^3-3ax^2$ とすると　$f'(x)=3x^2-6ax$

傾きが m である 2 本の接線が存在するから，方程式 $3x^2-6ax=m$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

接点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とすると，これらは方程式 $3x^2-6ax-m=0$ の実数解である。

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=-\dfrac{m}{3}$ ……①

線分 AB の中点 C の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$X=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=a$

$Y=\dfrac{1}{2}\{(\alpha^3-3a\alpha^2)+(\beta^3-3a\beta^2)\}=\dfrac{1}{2}\{\alpha^3+\beta^3-3a(\alpha^2+\beta^2)\}$

ここで　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4a^2+\dfrac{2}{3}m$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=8a^3+2am$

よって　$Y=\dfrac{1}{2}\left\{8a^3+2am-3a\left(4a^2+\dfrac{2}{3}m\right)\right\}=-2a^3$

ここで，$-2a^3=a^3-3a\cdot a^2$ であるから，$\mathrm{C}(a,\ -2a^3)$ は曲線 $y=x^3-3ax^2$ 上にある。

(2) 2 次方程式 $3x^2-6ax-m=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-3a)^2-3\cdot(-m)>0$

よって　$3a^2+m>0$ ……②

$\mathrm{C}(a,\ -2a^3)$ は線分 AB の中点であるから，$y=-x-1$ 上にある。

$-2a^3=-a-1$ から　$(a-1)(2a^2+2a+1)=0$

a は実数であるから　$a=1$

直線 AB の傾きは　$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{(\beta^3-3a\beta^2)-(\alpha^3-3a\alpha^2)}{\beta-\alpha}$

$=\dfrac{(\beta^3-\alpha^3)-3a(\beta^2-\alpha^2)}{\beta-\alpha}$

$=(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3a(\beta+\alpha)$

$=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3a(\alpha+\beta)$

$=(2a)^2-\left(-\dfrac{m}{3}\right)-3a\cdot2a=\dfrac{m}{3}-2a^2$

この傾きが -1 であるとき　$\dfrac{m}{3}-2a^2=-1$，$a=1$

ゆえに　$m=3$　　これは ② を満たす。

別解 [m の求め方]

A，B，C はすべて曲線 $y=f(x)$ 上にも直線 $y=-x-1$ 上にもあるから，α，β，1 は方程式 $f(x)=-x-1$ の 3 つの実数解である。

$x^3-3x^2=-x-1$ から　$(x-1)(x^2-2x-1)=0$

よって，α，β は $x^2-2x-1=0$ の解であるから　$\alpha\beta=-1$

したがって，① から　$m=-3\alpha\beta=3$

5

解答 $a<0$，$0<a<\dfrac{9}{4}$

解説

$f'(x)=4x^3+12x^2+4ax=4x(x^2+3x+a)$

$f(x)$ が極大値と極小値をもつ条件は，$f'(x)$ の符号が正から負に変わる x の値と，負から正に変わる x の値が存在することである。

$f'(x)$ は 3 次関数であるから，このことは，$y=f'(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点を共有すること，すなわち，3 次方程式 $f'(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつことと同値である。

よって，2 次方程式 $x^2+3x+a=0$ が，$x=0$ 以外の異なる 2 個の実数解をもてばよい。

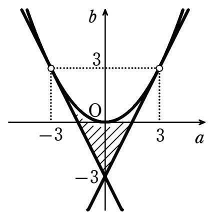
ゆえに　$D>0$　かつ　$0^2+3\cdot0+a\neq0$

すなわち　$9-4a>0$　かつ　$a\neq0$

したがって　$a<0$，$0<a<\frac{9}{4}$

6

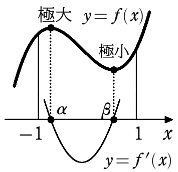
解答　［図］境界線は放物線を含まず，他は含む



解説

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$ が極大値と極小値をもち，それらが $-1\leqq x\leqq 1$ 内にあるための条件は，$f'(x)$ の符号が正から負に，また負から正に変わる x の値がともに $-1\leqq x\leqq 1$ 内にあること，すなわち，2次方程式 $f'(x)=0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ に異なる2つの実数解をもつことである。



よって，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると

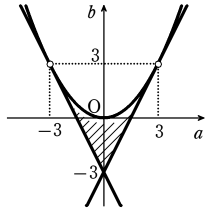
$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=a^2-3b>0 \\ f'(-1)=3-2a+b\geqq 0 \\ f'(1)=3+2a+b\geqq 0 \\ -1\leqq -\dfrac{a}{3}\leqq 1 \end{cases}$$

ゆえに　$b<\frac{a^2}{3}$，$b\geqq 2a-3$，

$b\geqq -2a-3$，$-3\leqq a\leqq 3$

これらを満たす点 $(a,\ b)$ の存在範囲は，図の斜線部分。

ただし，境界線は放物線を含まず，他は含む。



7

解答　(1)　$t\leqq -40$　　(2)　$t\leqq -\frac{189}{4}$

解説

(1)　$F(x)=f(x)-g(x)$ とすると　　$F(x)=x^3+6x^2-36x-t$

$x\geqq 0$ を満たす任意の x に対して $F(x)\geqq 0$ となる t の値の範囲を求めればよい。

$F'(x)=3x^2+12x-36=3(x^2+4x-12)$

$=3(x-2)(x+6)$

$F'(x)=0$ とすると　　$x=2,\ -6$

$x\geqq 0$ における $F(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$	$-t$	↘	$-40-t$	↗

よって，$F(x)$ は $x\geqq 0$ において，$x=2$ のとき最小値 $-40-t$ をとる。

ゆえに，求める t の値の範囲は，$-40-t\geqq 0$ を解いて　　$t\leqq -40$

(2)　条件を満たすのは，$x\geqq 0$ において，

［$f(x)$ の最小値］≧［$g(x)$ の最大値］

となるときである。

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1,\ 3$

$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	-27	↗

よって，$f(x)$ は $x\geqq 0$ において，$x=3$ のとき最小値 -27 をとる。

また　　$g(x)=-9x^2+27x+t=-9\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+t+\frac{81}{4}$

よって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ において，$x=\frac{3}{2}$ のとき最大値 $t+\frac{81}{4}$ をとる。

ゆえに，求める t の値の範囲は，$-27\geqq t+\frac{81}{4}$ を解いて　　$t\leqq -\frac{189}{4}$

8

解答　(1)　$u^2-v=1$，u の最大値 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，最小値 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(2)　最大値 2，最小値 $\frac{2}{3}$　　(3)　最大値 $\sqrt{2}$，最小値 $-\sqrt{2}$

解説

(1)　$x^2+xy+y^2=1$ から　　$(x+y)^2-xy=1$

よって，u，v の満たす関係式は　　$u^2-v=1$　……①

また，x，y を2解にもつ2次方程式は $t^2-ut+v=0$ であり，x，y は実数であるから，

判別式を D とすると　　$D\geqq 0$　すなわち　$u^2-4v\geqq 0$　……②

① から　　$v=u^2-1$

これを ② に代入すると　　$u^2-4(u^2-1)\geqq 0$

整理して　　$3u^2-4\leqq 0$　　　　ゆえに　$-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$　……③

よって，u の最大値は $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，最小値は $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(2)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v=u^2-2(u^2-1)$

$=-u^2+2$

u の値の範囲は ③ であるから，x^2+y^2 は

$u=0$ のとき最大値 2，　$u=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $\frac{2}{3}$　をとる。

(3)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=u^3-3vu$

$=u^3-3u(u^2-1)=-2u^3+3u$

$f(u)=-2u^3+3u$ とすると　　$f'(u)=-6u^2+3=-6\left(u^2-\frac{1}{2}\right)$

$f'(u)=0$ とすると　　$u=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ における $f(u)$ の増減表は次のようになる。

u	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$f'(u)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(u)$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$

よって，x^3+y^3 は $u=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$，$u=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $-\sqrt{2}$ をとる。

9

解答　$x+y\leqq 5-3\log_2 3$

解説

$x+y=k$ とおく。

条件式から　　$(2^x)^2-2\cdot 2^x+2^{k-x}\leqq 0$

$2^x>0$ であるから　　$(2^x)^3-2(2^x)^2+2^k\leqq 0$

$t=2^x$ とおくと　　$2^k\leqq -t^3+2t^2$　……①

$t>0$ で ① を満たす t が存在するような k の値の範囲を求める。

$f(t)=-t^3+2t^2$ とおくと　　$f'(t)=-3t^2+4t=-t(3t-4)$

$f'(t)=0$ とすると　　$t=0,\ \frac{4}{3}$

$t>0$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

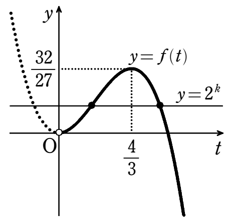
t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	$\frac{32}{27}$	↘

よって，$t>0$ における $y=f(t)$ のグラフは右下の図の実線部分である。

$y=f(t)$ のグラフと直線 $y=2^k$ が共有点をもつとき，① を満たす t が存在する。

ゆえに，$t>0$ において $y=f(t)$ と $y=2^k$ が共有点をもつ条件は　　$2^k\leqq \frac{32}{27}$

よって　　$k=x+y\leqq \log_2\frac{32}{27}=5-3\log_2 3$



10

解答　(1)　(ア)　1　　(イ)　$\frac{4\sqrt{6}}{9}$　　(2)　$x=-\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{6}}{3}$，$-\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(3)　4 個

解説

(1)　① から　　$|x^3-x|-x=k$

$f(x)=|x^3-x|-x$ とする。

$x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$ であるから

$$|x^3-x|=\begin{cases} x^3-x & (-1\leqq x\leqq 0,\ 1\leqq x) \\ -x^3+x & (x<-1,\ 0<x<1) \end{cases}$$

［1］　$-1\leqq x\leqq 0$，$1\leqq x$ のとき

$f(x)=x^3-x-x=x^3-2x$，　　$f'(x)=3x^2-2$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

$-1 \leqq x \leqq 0$, $1 \leqq x$ から　$x=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

[2]　$x<-1$, $0<x<1$ のとき

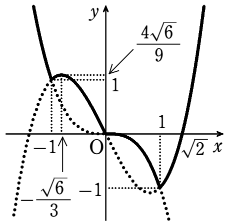
$f(x)=-x^3+x-x=-x^3$,　$f'(x)=-3x^2<0$

[1], [2] から, $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$-$		$+$
$f(x)$	↘	1	↗	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	↘	0	↘	-1	↗

よって, $y=f(x)$ のグラフは, 右の図のようになる。
方程式 ① が異なる 3 個の実数解をもつのは, このグラフと直線 $y=k$ が共有点を 3 個もつときである。
したがって, 求める k の値は

$k_1=$ ア 1　または　$k_2=$ イ $\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$



(2)　$k=\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$ のとき, ① は

$$|x^3-x|-x-\frac{4\sqrt{6}}{9}=0 \quad \cdots\cdots ②$$

[1]　$-1 \leqq x \leqq 0$, $1 \leqq x$ のとき

② から　$x^3-2x-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}=0$

ゆえに　$\left(x+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\left(x-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)=0$

よって　$x=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

[2]　$x<-1$, $0<x<1$ のとき

② から　$-x^3-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}=0$

ゆえに　$x^3=-2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3$

よって　$x=\sqrt[3]{-2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{6}}{3}$

[1], [2] から, 求める 3 個の実数解は

$x=-\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{6}}{3}$, $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

(3)　$1<k<\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$ のとき, ① の実数解の個数は, (1) のグラフから 4 個である。

$\boxed{11}$

解答　2 個

解説

$\sin x+\cos x=t$ とおく。

両辺を 2 乗すると　$1+2\sin x\cos x=t^2$　　よって　$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

また　$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　$0 \leqq x<2\pi$ のとき　$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

与えられた方程式から　$2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)+3\sin x\cos x=0$

よって　$2\sqrt{2}\,t\left(1-\dfrac{t^2-1}{2}\right)+3\cdot\dfrac{t^2-1}{2}=0$

整理すると　$2\sqrt{2}\,t^3-3t^2-6\sqrt{2}\,t+3=0$

$f(t)=2\sqrt{2}\,t^3-3t^2-6\sqrt{2}\,t+3$ とおくと

$f'(t)=6\sqrt{2}\,t^2-6t-6\sqrt{2}=6(\sqrt{2}\,t^2-t-\sqrt{2})=6(\sqrt{2}\,t+1)(t-\sqrt{2})$

$f'(t)=0$ とすると　$t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$

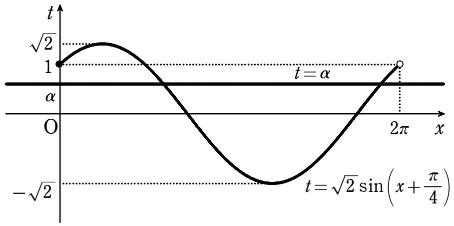
$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	1	↗	極大	↘	-7

$f(0)=3>0$, $f(1)=-4\sqrt{2}<0$ であるから, $f(t)=0$ となる t の値は $0<t<1$ の範囲に 1 つだけ存在する。

その値を α とすると, 方程式を満たす x の個数は $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $(0 \leqq x<2\pi)$ のグラフと直線 $t=\alpha$ の共有点の個数に等しい。

したがって, 求める x の個数は 2 である。



$\boxed{1}$

解答　(1)　$f'(0)=-3f(0)+4f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(1)$　　(2)　略

(3)　$f(x)=8x^2-8x+1$, $-8x^2+8x-1$

解説

(1)　$f'(x)=2ax+b$ であるから　$f'(0)=b$

また　$f(0)=c$ ……①, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c$ ……②, $f(1)=a+b+c$ ……③

②×4−③ から　$b+3c=4f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(1)$

これに ① を代入すると　$b+3f(0)=4f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(1)$

したがって　$f'(0)=b=-3f(0)+4f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(1)$

(2)　$|f(0)| \leqq 1$, $\left|f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right| \leqq 1$, $|f(1)| \leqq 1$　であるから

$-1 \leqq f(0) \leqq 1$, $-1 \leqq f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqq 1$, $-1 \leqq f(1) \leqq 1$

よって　$-3 \leqq -3f(0) \leqq 3$, $-4 \leqq 4f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqq 4$, $-1 \leqq -f(1) \leqq 1$

ゆえに　$-8 \leqq -3f(0)+4f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(1) \leqq 8$

すなわち　$-8 \leqq f'(0) \leqq 8$

したがって　$|f'(0)| \leqq 8$

(3)　$|f'(0)|=8$ から　$f'(0)=\pm 8$

$f'(0)=-8$ のとき　$f(0)=1$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$, $f(1)=1$

すなわち　$c=1$, $\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c=-1$, $a+b+c=1$

これを解くと　$a=8$, $b=-8$, $c=1$

$f'(0)=8$ のとき　$f(0)=-1$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$, $f(1)=-1$

すなわち　$c=-1$, $\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c=1$, $a+b+c=-1$

これを解くと　$a=-8$, $b=8$, $c=-1$

したがって　$f(x)=8x^2-8x+1$　または　$f(x)=-8x^2+8x-1$

$\boxed{2}$

解答　$a=105$, -3

解説

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$　　$f'(x)=0$ とすると　$x=0$, $2a$

[1]　$2a=0$ すなわち $a=0$ のとき　$f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2 \geqq 0$ であるから, $f(x)$ は単調に増加する。

よって, $x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値は $f(2)=8$ となり, 条件を満たさない。

[2]　$0<2a<2$ すなわち $0<a<1$ のとき

$x \leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は, 次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗	$f(2)$

よって，$f(x)$ の最大値は　　$f(0)=a$　または　$f(2)=8-11a$

$0<a<1$ のとき　　$0<f(0)<1$，$-3<f(2)<8$

したがって，最大値が 105 になることはない。

[3]　$2\leqq 2a$　すなわち　$a\geqq 1$ のとき

$x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	↗	極大 $f(0)$	↘	$f(2)$

よって，$f(x)$ の最大値は　　$f(0)=a$

最大値が 105 となるとき　　$a=105$

これは $a\geqq 1$ を満たす。

[4]　$2a<0$　すなわち　$a<0$ のとき

$x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	極大 $f(2a)$	↘	極小 $f(0)$	↗	$f(2)$

よって，$f(x)$ の最大値は　　$f(2a)=-4a^3+a$　または　$f(2)=8-11a$

ここで　　$f(2a)-f(2)=(-4a^3+a)-(8-11a)=-4(a^3-3a+2)$

$=-4(a-1)^2(a+2)$

したがって，$a\leqq -2$ のとき　　$f(2a)\geqq f(2)$

$-2<a<0$ のとき　$f(2a)<f(2)$

(i)　$a\leqq -2$ のとき

最大値 $f(2a)$ が 105 となるとき　　$-4a^3+a=105$

よって　　$4a^3-a+105=0$　　　ゆえに　　$(a+3)(4a^2-12a+35)=0$

$4a^2-12a+35=4\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2+26>0$ であるから　$a+3=0$

これを解いて　　$a=-3$　　これは $a\leqq -2$ を満たす。

(ii)　$-2<a<0$ のとき

最大値 $f(2)$ が 105 となるとき　　$8-11a=105$

これを解いて　$a=-\dfrac{97}{11}$　　これは $-2<a<0$ を満たさない。

以上から，求める a の値は　　$a=105$，-3

$\boxed{3}$

解答　(1)　$a=2(s^2+st+t^2)$　　(2)　(ア)　$a=2s^2$　　(イ)　$y=bx-\dfrac{a^2}{4}$

(3)　$b^2<\dfrac{8}{27}a^3$

解説

(1)　$f'(x)=4x^3-2ax+b$

条件から　　$f'(s)=f'(t)$

よって　　$4s^3-2as+b=4t^3-2at+b$

整理すると　$2(s^3-t^3)-a(s-t)=0$

左辺を因数分解すると　　$(s-t)\{2(s^2+st+t^2)-a\}=0$

$s\neq t$ であるから　　　$a=2(s^2+st+t^2)$

(2)　(ア)　$x=s$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-(s^4-as^2+bs)=(4s^3-2as+b)(x-s)$$

よって　　$y=(4s^3-2as+b)x-3s^4+as^2$　……①

接点の x 座標のもう 1 つを t とする。

$x=t$ における接線 ℓ の方程式は　　$y=(4t^3-2at+b)x-3t^4+at^2$

ゆえに，この 2 つの接線が一致するから

$4s^3-2as+b=4t^3-2at+b$　……②

$-3s^4+as^2=-3t^4+at^2$　　……③

(1) から，② は　　　$a=2(s^2+st+t^2)$

③ を整理すると　　$(s+t)(s-t)\{3(s^2+t^2)-a\}=0$

$a=2(s^2+st+t^2)$ を代入し，整理すると　$(s+t)(s-t)^3=0$

$s\neq t$ であるから　　$t=-s$

$a=2(s^2+st+t^2)$ であるから　　$a=2s^2$

(イ)　① に $a=2s^2$ を代入し，整理すると　　$y=bx-s^4$

$s^2=\dfrac{a}{2}$ であるから　　$y=bx-\dfrac{a^2}{4}$

(3)　$f(x)$ が極大値をもつための必要十分条件は，x を増加させていくとき，$f'(x)$ の値が正から負に変わるような x が存在することである。

$g(x)=f'(x)=4x^3-2ax+b$ とおくと　$g'(x)=12x^2-2a=2(6x^2-a)$

[1]　$a\leqq 0$ のとき

このとき，常に $g'(x)\geqq 0$ となるから，$g(x)$ は単調に増加する。よって，$f'(x)$ の値が正から負に変わるような x は存在しない。

[2]　$a>0$ のとき

$g'(x)=0$ とすると　　$x=\pm\sqrt{\dfrac{a}{6}}$

$g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{a}{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a}{6}}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f'(x)$ すなわち $g(x)$ の値が正から負に変わるような x が存在するためには，極大値と極小値が異符号であればよい。

すなわち　　$g\left(-\sqrt{\dfrac{a}{6}}\right)\cdot g\left(\sqrt{\dfrac{a}{6}}\right)<0$

よって　　$\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{9}a\sqrt{a}+b\right)\left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{9}a\sqrt{a}+b\right)<0$

ゆえに　　$b^2<\dfrac{8}{27}a^3$

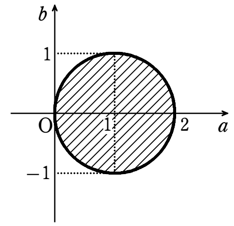
[1]，[2] から，求める条件は　$a>0$ かつ $b^2<\dfrac{8}{27}a^3$　　よって　$b^2<\dfrac{8}{27}a^3$

$\boxed{4}$

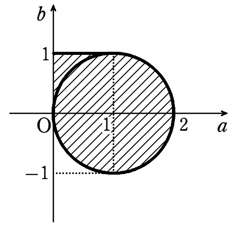
解答　(1)　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$；[図]　境界線を含む　　(2)　$0\leqq b\leqq 1$

(3)　$0\leqq a\leqq b\leqq 1$　または　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$；[図]　境界線を含む

(1)



(3)



解説

(1)　$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1$

関数 $f(x)$ が常に増加するための必要十分条件は，

すべての x に対して $f'(x)\geqq 0$ ……[A]

が成り立つことである。

[1]　$a=0$ の場合

$f'(x)=2bx+b+1$

[A] を満たすのは，$b=0$ のとき。

[2]　$a\neq 0$ の場合

$a>0$ ならば $y=f'(x)$ は下に凸な放物線を表す。

$a<0$ ならば $y=f'(x)$ は上に凸な放物線を表す。

よって，[A] を満たす条件は，$f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$a>0$　かつ　$D\leqq 0$

$\dfrac{D}{4}=(a+b)^2-2a(b+1)\leqq 0$ から

$a^2+b^2-2a\leqq 0$

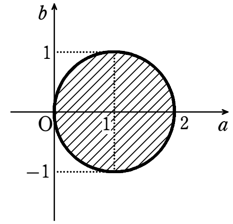
ゆえに　　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

ただし，$a>0$ であるから　　$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$

[1]，[2] から，求める条件は　　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

よって，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。



(2)　$f(x)$ が $x>-1$ において常に増加する条件は，

$x>-1$ において常に $f'(x)\geqq 0$ ……[B]

が成り立つことである。

$a=0$ であるから　　$f'(x)=2bx+b+1$

[1]　$b=0$ のとき

常に　　$f'(x)=1$　　　　よって，[B] を満たす。

[2]　$b\neq 0$ のとき

$y=f'(x)$ は，傾きが $2b$ の直線を表す。

よって，[B] を満たす条件は　　$b>0$　かつ　$f'(-1)\geqq 0$

$f'(-1)=-2b+b+1\geqq 0$ から　　$b\leqq 1$　　　ゆえに　　$0<b\leqq 1$

[1]，[2] から　　$0\leqq b\leqq 1$

(3)　[1]　$a=0$ の場合

(2) から　　$0\leqq b\leqq 1$

[2]　$a\neq 0$ の場合

(i)　$f(x)$ が常に増加するとき

(1) から　　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$　　　ただし，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$

(ii)　$f(x)$ が常には増加しないとき

$$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1=2a\left(x+\frac{a+b}{2a}\right)^2-\frac{(a+b)^2}{2a}+b+1$$

よって，$x\leqq -1$ において常には $f'(x)\geqq 0$ でないとき，[B] を満たす条件は

$$\begin{cases} a>0 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{D}{4}=(a+b)^2-2a(b+1)>0 & \cdots\cdots ② \\ -\dfrac{a+b}{2a}\leqq -1 & \cdots\cdots ③ \\ f'(-1)\geqq 0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

② から　$(a-1)^2+b^2>1$　……⑤

③ の両辺に $-2a$ (<0) を掛けて　$a+b\geqq 2a$　　ゆえに　$b\geqq a$　……⑥

④ から　$f'(-1)=2a-2(a+b)+b+1\geqq 0$

すなわち　$b\leqq 1$　……⑦

よって，①，⑤，⑥，⑦ から

$(a-1)^2+b^2>1$ かつ $0<a\leqq b\leqq 1$

したがって，(i)，(ii) より，

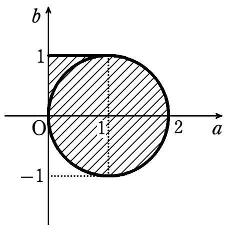
$0<a\leqq b\leqq 1$　または　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

[1]，[2] から，求める条件は

$0\leqq a\leqq b\leqq 1$　または　$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

よって，右の図の斜線部分のようになる。

ただし，境界線を含む。



$\boxed{5}$

解答　$a\leqq 1$ のとき，$x=0$ で最小値 $-6a+8$；

$a>1$ のとき，$x=\log_2\left(a\pm\sqrt{a^2-1}\right)$ で最小値 $-4a^3+6a$

解説

$f(x)=8^x+8^{-x}-3a(4^x+4^{-x})+3(2^x+2^{-x})$

$=(2^x)^3+(2^{-x})^3-3a\{(2^x)^2+(2^{-x})^2\}+3(2^x+2^{-x})$

$=\{(2^x+2^{-x})^3-3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x+2^{-x})\}-3a\{(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}\}+3(2^x+2^{-x})$

ここで，$2^x+2^{-x}=t$ とおくと，(相加平均)≧(相乗平均) により

$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$　すなわち　$t\geqq 2$

$f(x)$ を t の式で表すと

$f(x)=(t^3-3t)-3a(t^2-2)+3t=t^3-3at^2+6a$

$g(t)=t^3-3at^2+6a$ $(t\geqq 2)$ とすると　$g'(t)=3t^2-6at=3t(t-2a)$

$g'(t)=0$ とすると　$t=0,\ 2a$

[1]　$2a\leqq 2$ すなわち $a\leqq 1$ のとき

$t\geqq 2$ における $g(t)$ の増減表は，右のようになる。

t	2	…
$g'(t)$		+
$g(t)$	$-6a+8$	↗

よって，$g(t)$ は $t=2$ すなわち $x=0$ で最小値 $-6a+8$ をとる。

[2]　$2<2a$ すなわち $1<a$ のとき

$t\geqq 2$ における $g(t)$ の増減表は，右のようになる。

t	2	…	$2a$	…
$g'(t)$		−	0	+
$g(t)$	$-6a+8$	↘	$-4a^3+6a$	↗

よって，$g(t)$ は $t=2a$ で最小値 $-4a^3+6a$ をとる。

$t=2a$ のとき　$2^x+2^{-x}=2a$

$2^x=X$ $(X>0)$ とおくと　$X+\dfrac{1}{X}=2a$

ゆえに　$X^2-2aX+1=0$

$a>1$ であるから　$X=a\pm\sqrt{a^2-1}$　　このとき　$a+\sqrt{a^2-1}>0$

また，$a^2>a^2-1$ であるから　$a-\sqrt{a^2-1}>0$

したがって，ともに $X>0$ を満たす。

よって，$2^x=a\pm\sqrt{a^2-1}$ から　$x=\log_2\left(a\pm\sqrt{a^2-1}\right)$

[1]，[2] から，$f(x)$ は

$a\leqq 1$ のとき，$x=0$ で最小値 $-6a+8$；

$a>1$ のとき，$x=\log_2\left(a\pm\sqrt{a^2-1}\right)$ で最小値 $-4a^3+6a$

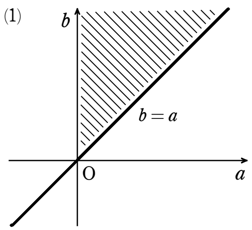
をとる。

$\boxed{6}$

解答　(1)　[図] 境界線を含まない

(2)　$b=a$，$a>\sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}$

(1)



解説

(1)　C 上の点 $(t,\ t^3-a^2t+a^3)$ における接線の方程式は，$y'=3x^2-a^2$ であるから

$y-(t^3-a^2t+a^3)=(3t^2-a^2)(x-t)$

すなわち　$y=(3t^2-a^2)x-2t^3+a^3$

この直線が点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を通るから　$0=(3t^2-a^2)b-2t^3+a^3$

よって　$2t^3-3bt^2=a^2(a-b)$　……①

① を t の方程式とみると，点 P を通る接線の本数は，① の異なる実数解の個数と等しい。

$f(t)=2t^3-3bt^2$ とすると　$f'(t)=6t^2-6bt=6t(t-b)$

$f'(t)=0$ とすると　$t=0,\ b$

$b>0$ であるから，$f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	…	0	…	b	…
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗	0	↘	$-b^3$	↗

点 P から曲線 C に接線が 3 本引けるための条件は，方程式 $f(t)=a^2(a-b)$ が異なる 3 個の実数解をもつことである。

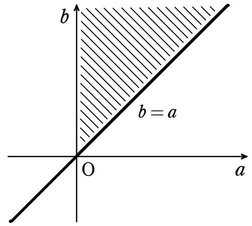
すなわち　$-b^3<a^2(a-b)<0$

$a^2(a-b)<0$ と $a>0$ から　$0<a<b$

このとき　$a^2(a-b)+b^3=a^3+b(b^2-a^2)>0$

は常に成り立つ。

したがって，求める条件は，$0<a<b$ であり，点 $(a,\ b)$ の存在する領域は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線は含まない。



(2)　点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるための条件は，方程式 $f(t)=a^2(a-b)$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

よって　$a^2(a-b)=0$　または　$a^2(a-b)=-b^3$

[1]　$a^2(a-b)=0$ のとき

$a>0$ であるから　$a-b=0$　すなわち　$b=a$

このとき，① から　$2t^3-3at^2=0$　すなわち　$t^2(2t-3a)=0$

ゆえに　$t=0,\ \dfrac{3}{2}a$　　これが接点の x 座標となる。

よって，$\mathrm{A}(0,\ a^3)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{2}a,\ \dfrac{23}{8}a^3\right)$ とすると，$\mathrm{P}(a,\ 0)$ から

$\mathrm{AB}^2=\dfrac{9}{4}a^2+\left(\dfrac{15}{8}\right)^2a^6$，　$\mathrm{AP}^2=a^2+a^6$，　$\mathrm{BP}^2=\dfrac{a^2}{4}+\left(\dfrac{23}{8}\right)^2a^6$

$\angle\mathrm{APB}<90^\circ$ であるための条件は　$\mathrm{AB}^2<\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$

ゆえに　$a^6\left\{1+\left(\dfrac{23}{8}\right)^2-\left(\dfrac{15}{8}\right)^2\right\}-a^2>0$

$a^2>0$ であるから　$\dfrac{23}{4}a^4-1>0$　すなわち　$a^4>\dfrac{4}{23}$

$a>0$ であるから　$a>\sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}$

したがって　$b=a$，$a>\sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}$

[2]　$a^2(a-b)=-b^3$ のとき　$a^3-a^2b+b^3=0$

ところが，$0<b<a$ のとき　$a^2(a-b)+b^3>0$

$0<a\leqq b$ のとき　$b(b-a)(b+a)+a^3>0$

ゆえに，$a>0$，$b>0$ に対して常に $a^3-a^2b+b^3>0$ となり，$-b^3=a^2(a-b)$ を満たす a，b は存在しない。

[1]，[2] から　$b=a$，$a>\sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}$

$\boxed{7}$

解答　V の体積を V_0 で表すとき　(1)　$V_0=\dfrac{1}{4}(\pi a^2+4ac+\pi c^2)b$

(2)　$0<V_0<\dfrac{\pi}{27}$

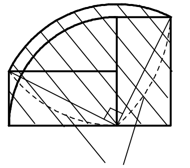
解説

(1)　V は，底面が右の図の斜線部分の図形で高さが b の立体である。

V の体積を V_0 とすると

$V_0=\left\{2\cdot\dfrac{1}{2}ac+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right\}b$

$=\dfrac{1}{4}(\pi a^2+4ac+\pi c^2)b$



(2)　$c=1-(a+b)$ であるから，(1) より

$V_0=\dfrac{1}{4}[\pi a^2+4a\{1-(a+b)\}+\pi\{1-(a+b)\}^2]b$

$=\dfrac{1}{4}[\pi a^2+4a\{(1-b)-a\}+\pi\{(1-b)-a\}^2]b$

$=\dfrac{\pi-2}{2}b\{a^2-(1-b)a\}+\dfrac{\pi}{4}b(1-b)^2$

$=\dfrac{\pi-2}{2}b\left\{\left(a-\dfrac{1-b}{2}\right)^2-\dfrac{(1-b)^2}{4}\right\}+\dfrac{\pi}{4}b(1-b)^2$

$c=1-(a+b)>0$ より，$0<a<1-b$ であるから

$-\dfrac{(1-b)^2}{4}\leqq\left(a-\dfrac{1-b}{2}\right)^2-\dfrac{(1-b)^2}{4}<0$

$\frac{\pi-2}{2}b>0$ であるから

$$-\frac{\pi-2}{8}b(1-b)^2+\frac{\pi}{4}b(1-b)^2\leqq V_0<\frac{\pi}{4}b(1-b)^2$$

すなわち　$\frac{\pi+2}{8}b(1-b)^2\leqq V_0<\frac{\pi}{4}b(1-b)^2$

$f(b)=b(1-b)^2=b^3-2b^2+b$　$(0<b<1)$ とすると

$$f'(b)=3b^2-4b+1=(3b-1)(b-1)$$

$f'(b)=0$ とすると

$$b=\frac{1}{3},\ 1$$

$0<b<1$ における $f(b)$ の増減表は，右のようになる。

b	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		↗	極大	↘	

また，$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$ であるから

$$0<f(b)\leqq\frac{4}{27}$$

ゆえに　$0<\frac{\pi+2}{8}f(b)\leqq V_0<\frac{\pi}{4}f(b)\leqq\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{27}$

したがって　$0<V_0<\frac{\pi}{27}$

$\boxed{8}$

解答　(1)　$x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

(2)　$k=0$ のとき $x=-1,\ 0,\ 4$；$k=12$ のとき $x=-2,\ 2,\ 3$

解説

(1)　$f(x)=x^3-3x^2-4x+k$ から　$f'(x)=3x^2-6x-4$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$f(x)$ が極値をとるときの x の値は　$x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

(2)　$x^3-3x^2-4x+k=0$ ……① から　$-x^3+3x^2+4x=k$

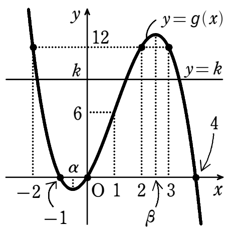
$g(x)=-x^3+3x^2+4x$ とすると　$g'(x)=-3x^2+6x+4$

$g'(x)=0$ とすると　$x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{3}$

$g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって，$y=g(x)$ のグラフは，右の図のようになる。



方程式 $f(x)=0$ の実数解は，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の x 座標と一致する。

ゆえに，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が3つの共有点をもち，かつその共有点の x 座標がすべて整数であるような k の値を求めればよい。

ここで，$\alpha=\frac{3-\sqrt{21}}{3}$，$\beta=\frac{3+\sqrt{21}}{3}$ とおくと，

$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が3つの共有点をもつための条件は　$g(\alpha)<k<g(\beta)$

また，$4<\sqrt{21}<5$ であるから　$-1<\alpha<0$，$2<\beta<3$

よって，$\alpha<x<\beta$ を満たす整数 x は　$x=0,\ 1,\ 2$

$g(x)=k$ であり，$g(0)=0$，$g(1)=6$，$g(2)=12$ であるから，求める k の値の候補は $k=0,\ 6,\ 12$

[1]　$k=0$ のとき

①は　$x^3-3x^2-4x=0$　よって　$x(x^2-3x-4)=0$

すなわち　$x(x+1)(x-4)=0$　ゆえに　$x=0,\ -1,\ 4$

したがって，$f(x)=0$ は3つの整数解をもつ。

[2]　$k=6$ のとき

①は　$x^3-3x^2-4x+6=0$　すなわち　$(x-1)(x^2-2x-6)=0$

よって　$x=1,\ 1\pm\sqrt{7}$

ゆえに，$f(x)=0$ の整数解は1つだけであり，不適。

[3]　$k=12$ のとき

①は　$x^3-3x^2-4x+12=0$　よって　$(x-3)(x^2-4)=0$

すなわち　$(x+2)(x-2)(x-3)=0$　ゆえに　$x=-2,\ 2,\ 3$

したがって，$f(x)=0$ は3つの整数解をもつ。

[1]～[3]より，求める k の値は　$k=0,\ 12$

また，3つの整数解は，$k=0$ のとき　$x=-1,\ 0,\ 4$

$k=12$ のとき　$x=-2,\ 2,\ 3$