6－2確認テスト　氏名（　　　　　　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$

$y=3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-6\sin x+2\sqrt{3}\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=t$ として，y を t で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) y の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{2}$

(1) $x+y=\pi$ を満たす実数 x，y に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sin x+\sin y=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}$$

(2) $x+y+z=\pi$ を満たす実数 x，y，z に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sin x+\sin y+\sin z=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}$$

$\boxed{3}$

座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周上の点を P とおき，線分 OP と x 軸の正の向きとのなす角を θ $\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とする。また，2 点 A$(0,\ -1)$，B$(\sqrt{3},\ -1)$ をとり，四角形 POAB の面積を S とする。

(1) S を θ を用いて表せ。

(2) θ が変化するとき，S の最大値と最小値を求めよ。

解説

$\boxed{1}$

(解説)

$y=3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-6\sin x+2\sqrt{3}\cos x$

(1)　$y=(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2-2\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)$

よって　$y=t^2-2\sqrt{3}t$　……①

(2)　$t=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

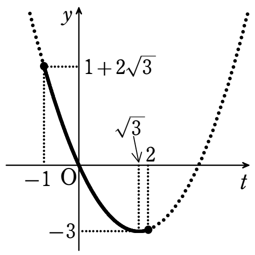
$0\leqq x\leqq\pi$ から　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$　　よって　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

ゆえに　$-1\leqq t\leqq 2$　……②

(3)　①を変形すると　$y=(t-\sqrt{3})^2-3$

②の範囲で，y は　$t=-1$ で最大値 $1+2\sqrt{3}$，

$t=\sqrt{3}$ で最小値 -3　をとる。



$t=-1$ のとき　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$

よって　$x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}$　　ゆえに　$x=0$

$t=\sqrt{3}$ のとき　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$　　ゆえに　$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$

したがって　$x=0$ で最大値 $1+2\sqrt{3}$，$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 -3

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$x+y=\pi$ から　$y=\pi-x$

よって　$(\text{左辺})=\sin x+\sin(\pi-x)=\sin x+\sin x=2\sin x$

$(\text{右辺})=4\cos\dfrac{x}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)=4\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}=2\sin x$

ゆえに　$(\text{左辺})=(\text{右辺})$

(2)　$\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

また，$x+y+z=\pi$ より $z=\pi-(x+y)$ であるから

$\sin z=\sin\{\pi-(x+y)\}=\sin(x+y)=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

したがって

$$(\text{左辺})=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$=2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\right)=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{-y}{2}$$

$$=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}\right)\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}=4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}=(\text{右辺})$$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ -1)$ から

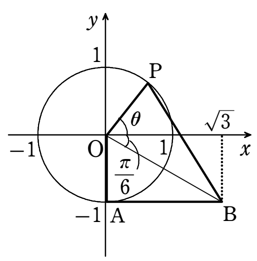
$\mathrm{OB}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

$\angle\mathrm{POB}=\theta+\dfrac{\pi}{6}$

$S=\triangle\mathrm{OBP}+\triangle\mathrm{OAB}$ であり

$\triangle\mathrm{OBP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{POB}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$



$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OA}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$S=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ から　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$

したがって，S は

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で最大値 $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$，

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\theta=0$ で最小値 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　をとる。