# 高３物理総合Ｓ～夏期講習会第４回～＜解答＞◆コンデンサーと電場◆

## ＜予習用問題＞

【１】（１）

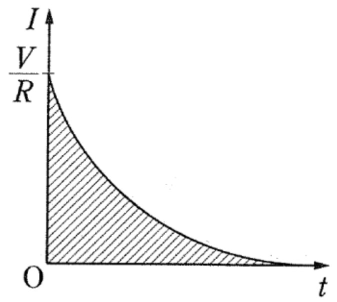
（ア）極板の面積は $a^2$ であるから $C = \varepsilon_0 \dfrac{a^2}{d}$

（イ）スイッチを閉じた直後，電荷のないコンデンサーは導線と同じなので，$I = \dfrac{V}{R}$

（ウ）十分時間がたちコンデンサーの充電が完了すると，コンデンサーには電流が流れこまなくなる。よって，電流は 0

（エ）電流が 0 だから抵抗による電圧降下は 0 である。よって，コンデンサーにかかる電圧は電源の起電力 $V$ と等しくなる。したがって，$Q = CV$

（オ）静電エネルギー$U = \dfrac{Q^2}{2C}$




問　時間とともにコンデンサーにたくわえられる電荷が増し，コンデンサーの電位差 $V_C$ が増加するから，抵抗にかかる電圧が減少し，流れる電流が減少していく。そして，十分時間がたつと電流値が 0 になる。右図が求めるグラフ。

電気量は $Q = It$ で表される。電流値が変化する場合は，$Q$ は $I-t$ グラフの面積で求められるから，右図の斜線部分の面積となる。

（２）導線が切れた後の状況を考えているから，極板の電荷 $Q_C$ は一定である。

（カ）極板が$\Delta d$ だけ移動した後のコンデンサーの電気容量 $C_1$ は $C_1 = \varepsilon_0 \dfrac{a^2}{d-\Delta d}$

よって，静電エネルギー$U_1 = \dfrac{Q_C{}^2}{2C_1} = \dfrac{Q_C{}^2}{2} \times \dfrac{d-\Delta d}{\varepsilon_0 a^2}$

また，はじめの静電エネルギー$U = \dfrac{Q_C{}^2}{2C} = \dfrac{Q_C{}^2}{2} \times \dfrac{d}{\varepsilon_0 a^2}$

∴静電エネルギーの変化量$\Delta U$ は$\Delta U = U_1 - U = \dfrac{Q_C{}^2}{2} \times \dfrac{d-\Delta d}{\varepsilon_0 a^2} - \dfrac{Q_C{}^2}{2} \times \dfrac{d}{\varepsilon_0 a^2} = -\dfrac{Q_C{}^2 \Delta d}{2\varepsilon_0 a^2}$

よって，減少量は$\dfrac{Q_C{}^2 \Delta d}{2\varepsilon_0 a^2}$

（キ）極板間引力 $F$ で$\Delta d$ 移動させるので $F\Delta d$

（ク）コンデンサーが $F\Delta d$ の仕事をしたからエネルギーが減少した。よって，

$$F\Delta d = \frac{Q_C{}^2 \Delta d}{2\varepsilon_0 a^2} \quad \text{となり，} F = \frac{Q_C{}^2}{2\varepsilon_0 a^2}$$

（ケ）力は一定である。極板 A の加速度を$\alpha$とすると$\dfrac{Q_C{}^2}{2\varepsilon_0 a^2} = m\alpha$　より$\alpha = \dfrac{Q_C{}^2}{2m\varepsilon_0 a^2}$

極板間の距離ははじめ $d$ であり，加速度$\alpha$で動くから，時刻 $t$ での間隔は

$d - \dfrac{1}{2}\alpha t^2 = d - \dfrac{Q_C{}^2}{4m\varepsilon_0 a^2}t^2$

（コ）衝突するときに間隔は 0 となるから $d - \dfrac{Q_C{}^2}{4m\varepsilon_0 a^2}T^2 = 0 \quad \therefore T = \dfrac{2a}{Q_C}\sqrt{m\varepsilon_0 d}$

（３）極板間に挿入された誘電体には，極板の電荷による電場によって誘電分極がおこり，逆向きの電場がつくられる。その結果，極板間の電場が弱められる。
そのため，極板間の電位差は減少する。電池がつながれたままならば，電池の起電力と等しくなる電位差となるまでさらに電荷が供給されることとなるから，電気容量は大きくなる。

【２】

＜解答＞

(1)　$C_{12}$ : $\varepsilon\dfrac{S}{a}$ [F]，$C_{23}$ : $\varepsilon\dfrac{S}{b}$ [F]，$C_{13}$ : $\varepsilon\dfrac{S}{a+b}$ [F]　(2)　$E_{23}$ : $\dfrac{Q}{\varepsilon S}$ [V/m]，$U_{23}$ : $\dfrac{Q^2 b}{2\varepsilon S}$ [J]

(3)　$W_1$ : $\dfrac{Q^2(d-b)}{2\varepsilon S}$ [J]，$F$ : $\dfrac{Q^2}{2\varepsilon S}$ [N]　　(4)　(a)　$\dfrac{Qd}{\varepsilon SR}$ [A]　　(b)　$\dfrac{Q^2 d}{8\varepsilon S}$ [J]

(5)　$Q_1$ : $\dfrac{d}{a+d}Q$ [C]，　$Q_3$ : $\dfrac{a}{a+d}Q$ [C]　　(6)　$\dfrac{Q^2a^2}{2\varepsilon S(a+d)}$ [J]

＜解説＞

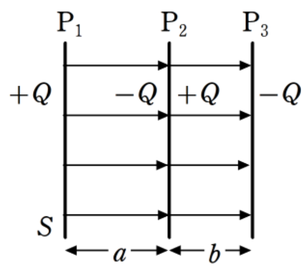
(1)　平行板コンデンサーの電気容量の式「$C=\varepsilon\dfrac{S}{d}$」より　$C_{12}=\boldsymbol{\varepsilon\dfrac{S}{a}}$ **[F]**，$C_{23}=\boldsymbol{\varepsilon\dfrac{S}{b}}$ **[F]**

$P_1P_3$ 間の電気容量は，$C_{12}$ と $C_{23}$ の直列接続と考えればよいから，「$\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}$」より

$$C_{13}=\frac{C_{12}\,C_{23}}{C_{12}+C_{23}}=\varepsilon S\frac{\dfrac{1}{ab}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\boldsymbol{\varepsilon\frac{S}{a+b}}\ \textbf{[F]}$$

別解　$P_1P_3$ 間の間隔が $a+b$ であるから　$C_{13}=\boldsymbol{\varepsilon\dfrac{S}{a+b}}$ **[F]**

(2)　$Q>0$ として考える。極板 $P_2$ の左側には $-Q$ [C]，右側には $+Q$ [C]の電気量が静電誘導される。$P_2P_3$ 間の電位差を $V_{23}$ [V]とする。コンデンサーの基本式



図ａ

「$Q=CV$」より　　$Q=C_{23}V_{23}=\varepsilon\dfrac{S}{b}V_{23}$　[C]

よって　$V_{23}=\dfrac{Qb}{\varepsilon S}$

一様な電場の式「$V=Ed$」を用いて　　$E_{23}=\dfrac{V_{23}}{b}=\boldsymbol{\dfrac{Q}{\varepsilon S}}$ **[V/m]**

静電エネルギーの式「$U=\dfrac{Q^2}{2C}$」より　　$U_{23}=\dfrac{Q^2}{2C_{23}}=\boldsymbol{\dfrac{Q^2 b}{2\varepsilon S}}$ **[J]**

(3)　$P_2P_3$ 間の電場の強さ $E_{23}$[V/m]は変化しないから，極板 $P_2$ が $P_2P_3$ 間につくる電場の強さ

は $\frac{1}{2}E_{23}$[V/m]で一定である。極板 $P_3$ の電気量$-Q$ [C]の電荷が $\frac{1}{2}E_{23}$[V/m]の電場によって力を受ける。よって，電場から受ける力の式「$F=qE$」より

$$F=Q\times\frac{1}{2}E_{23}=Q\times\frac{1}{2}\times\frac{Q}{\varepsilon S}=\boldsymbol{\frac{Q^2}{2\varepsilon S}}\ \textbf{[N]}$$

この力で，$d-b$ [m]だけ極板を移動したから，仕事の定義式「$W=Fx$」より

$$W_1=F(d-b)=\boldsymbol{\frac{Q^2(d-b)}{2\varepsilon S}}\ \textbf{[J]}$$

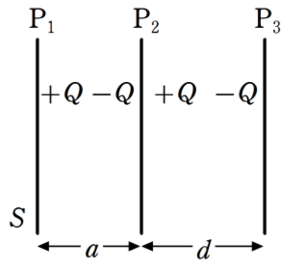
$\boxed{\text{別解}}$　移動後の $P_2P_3$ 間の電気容量 $C_{23}'$[F]は　$C_{23}'=\varepsilon\frac{S}{d}$ [F]

電気量は変化しないから，$P_2P_3$ 間の静電エネルギー$U_{23}'$[J]は

$$U_{23}'=\frac{Q^2}{2C_{23}'}=\frac{Q^2d}{2\varepsilon S}\ \text{[J]}$$

静電エネルギーの変化が外力のした仕事に等しいので

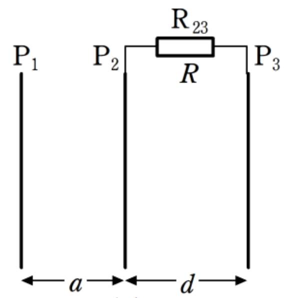
$$W_1=U_{23}'-U_{23}=\boldsymbol{\frac{Q^2(d-b)}{2\varepsilon S}}\ \textbf{[J]}$$



図b

極板間にはたらく大きさ $F$ [N]の力に逆らって移動させた仕事が $W_1$ [J]だから，仕事の定義式「$W=Fx$」より

$$F=\frac{W_1}{d-b}=\boldsymbol{\frac{Q^2}{2\varepsilon S}}\ \textbf{[N]}$$



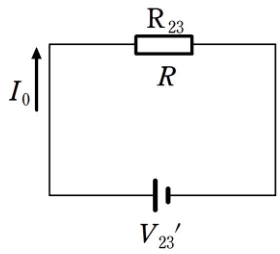
図c

(4)　$P_2P_3$ 間の電位差 $V_{23}'$ [V]は，「$V=Ed$」より

$$V_{23}'=E_{23}d=\frac{Q}{\varepsilon S}d\ \text{[V]}$$

(a)　キルヒホッフの法則IIより　　$V_{23}'=RI_0$

よって　$I_0=\frac{V_{23}'}{R}=\boldsymbol{\frac{Qd}{\varepsilon SR}}$ **[A]**



図d

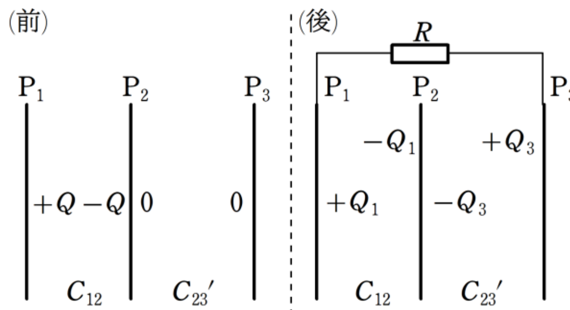
(b)　電流が $\frac{I_0}{2}$ [A]となったときの，$P_2P_3$ 間の電位差を $V_{23}''$ [V]とすると

$$V_{23}''=R\cdot\frac{I_0}{2}=\frac{Qd}{2\varepsilon S}\ \text{[V]}$$

静電エネルギーの式「$U=\frac{1}{2}CV^2$」より

$$U_{23}'=\frac{1}{2}C_{23}'V_{23}''^2=\frac{1}{2}\cdot\varepsilon\frac{S}{d}\left(\frac{Qd}{2\varepsilon S}\right)^2=\boldsymbol{\frac{Q^2d}{8\varepsilon S}}\ \textbf{[J]}$$

(5)　十分時間がたつと，$P_2P_3$ 間の電気量は完全に放電されている。$R_{23}$ をつなぐ前後で電気量は保存されている。



図e

電気量の保存(図 e)より $Q=Q_1+Q_3$

$P_1P_2$ 間と $P_2P_3$ 間の電位差は等しいから，「$Q=CV$」より $\dfrac{Q_1}{C_{12}}=\dfrac{Q_3}{C_{23}'}$ 　よって　$aQ_1=dQ_3$

以上 2 式より　$Q_1=\dfrac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{a+d}}\boldsymbol{Q}$ **[C]**　　$Q_3=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a+d}}\boldsymbol{Q}$ **[C]**

(6)　$R_{23}$ をつなぐ前の $P_1P_2$ 間の静電エネルギー $U_{12}$ [J]は　$U_{12}=\dfrac{Q^2}{2C_{12}}=\dfrac{Q^2a}{2\varepsilon S}$ [J]

$R_{23}$ をつないで十分時間が経過したときの全静電エネルギー $U'$ [J]は

$$U'=\frac{Q_1{}^2}{2C_{12}}+\frac{Q_3{}^2}{2C_{23}'}=\frac{Q^2ad}{2\varepsilon S(a+d)}\ \text{[J]}$$

静電エネルギーの変化が発熱量に等しいので

$$H=U_{12}-U'=\frac{Q^2a}{2\varepsilon S}\left(1-\frac{d}{a+d}\right)=\boldsymbol{\frac{Q^2a^2}{2\varepsilon S(a+d)}}\ \textbf{[J]}$$

$\boxed{\text{別解}}$　$C_{12}$ と $C_{23}'$ の並列接続のコンデンサーに電気量 $Q$ [C]が蓄えられているから

$$U'=\frac{Q^2}{2(C_{12}+C_{23}')}=\frac{Q^2ad}{2\varepsilon S(a+d)}\ \text{[J]}$$

## ＜演習問題＞

【１】（１）

イ：電気容量 $C=\varepsilon\dfrac{S}{d}$ より $C=\varepsilon\dfrac{al}{d}$ である。よって $U=\dfrac{Q^2}{2C}=\dfrac{Q^2d}{2\varepsilon al}$

ロ：スイッチが開かれているので，電気量は変化しない。よって極板を広げたときの

エネルギーは $U'=\dfrac{Q^2}{2C}=\dfrac{Q^2(d+\Delta d)}{2\varepsilon al}$ になるから，エネルギーの変化量は

$$\Delta U=U'-U=\frac{Q^2\Delta d}{2\varepsilon al}$$

ハ：外力の大きさを $F$ とすると，外力がした仕事は $W=F\Delta d$ だから，極板間の引力は

$$F=\frac{Q^2}{2\varepsilon al}$$

ニ：コンデンサー内部に出来る電界の大きさは $E=\dfrac{V}{d}$ で変化しない。また，

$Q=CV=\varepsilon\dfrac{al}{d}V$ であるから $Q=\varepsilon alE$ が成立する。よって，極板間の力は $F=\dfrac{1}{2}\varepsilon alE^2$

だから，単位面積あたりの力は $f=\dfrac{F}{S}=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$

（２）ホ：（１）と同様にして，$\Delta U=\dfrac{Q^2d}{2\varepsilon a(l+\Delta l)}-\dfrac{Q^2d}{2\varepsilon al}=-\dfrac{Q^2d\Delta l}{2\varepsilon al^2}$

へ：外力がした仕事は $W'=F'\Delta l$ である。よって，$F'=-\dfrac{Q^2d}{2\varepsilon al^2}$

ト：次に，スイッチを閉じたままであるとき，コンデンサーのエネルギーは最初が

$U=\dfrac{\varepsilon alV^2}{2d}$ から，$U'=\dfrac{\varepsilon a(l+\Delta l)V^2}{2d}$ になるから，$\Delta U=\dfrac{\varepsilon a\Delta lV^2}{2d}$

チ：このとき，コンデンサーの電気量の変化は $Q=\varepsilon\dfrac{al}{d}V$ ，$Q'=\varepsilon\dfrac{a(l+\Delta l)}{d}V$ より

$\Delta Q=\varepsilon\dfrac{a\Delta l}{d}V$ である。よって，電池から供給されたエネルギー$W=V\Delta Q=\varepsilon\dfrac{a\Delta l}{d}V^2$

リ：外力により加えられた仕事と電池から供給されたエネルギーの和がコンデンサー

に蓄えられたエネルギーになるから，$\dfrac{\varepsilon a\Delta lV^2}{2d}=\dfrac{\varepsilon a\Delta lV^2}{d}+F\Delta l$ なので，$F=-\dfrac{\varepsilon aV^2}{2d}$

ヌ：外力が負なので②右向き

ル：負なので②右向き

ヲ：$Q=\varepsilon alE$ を代入するとへより $F=\dfrac{1}{2}\varepsilon adE^2$ になり，$E=\dfrac{V}{d}$ を代入するとリも

$F=\dfrac{1}{2}\varepsilon adE^2$ になる。よって，単位面積あたりの力は$f=\dfrac{F}{S}=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$

ワ：横方向の力が生じるのは「極板内の電荷が互いに斥力を持ち，左右方向に広がろうとする力が存在すること」が原因である。なお，両極板間の引力は縦方向なので，左右方向の力にはならない。

【２】（１）

ア：$C=\varepsilon_0\dfrac{l^2}{d}$ より $C(x)=C_1+C_2=(1+k)\varepsilon_0\dfrac{lx}{d}+\varepsilon_0\dfrac{l(l-x)}{d}=\left(1+\dfrac{kx}{l}\right)C$

（２）イ：$I=\dfrac{V}{R}$　　　ウ：十分時間が経って電流が 0 のとき $Q=C(x)V=\left(1+\dfrac{kx}{l}\right)CV$

エ：$\dfrac{Q_1(x)}{Q_2(x)}=\dfrac{C_1V}{C_2V}=\dfrac{(1+k)x}{l-x}$

オ：電池のした仕事$\Delta Q\,V=C(\Delta x)V^2=\dfrac{k\Delta x}{l}CV^2$

カ：コンデンサーの静電エネルギーの変化$\dfrac{1}{2}C(x+\Delta x)V^2-\dfrac{1}{2}C(x)V^2=\dfrac{1}{2}C(\Delta x)V^2=\dfrac{k\Delta x}{2l}CV^2$

キ，ク：問題文より，（外力のした仕事）＋（電池のした仕事）＝（静電エネルギー）

であり，（静電気力のした仕事）＝ －（外力のした仕事）により静電気力のした仕事

を $F$ とすると以下が成り立つ。

$$\Delta Q\,V=\frac{1}{2}C(\Delta x)V^2+F\Delta x$$

$$\therefore F\Delta x=\Delta Q\,V-\frac{1}{2}C(\Delta x)V^2=\frac{V^2}{2}\cdot\frac{kC}{l}\cdot\Delta x$$　　よって $F=\dfrac{kCV^2}{2l}$－（ク）

答えが正なので①右向き－（キ）

（３）ケ：エネルギーは保存し，（静電エネルギーの変化）＋（静電気力のした仕事）＝0

なので $\frac{1}{2}\mathit{\Delta}\left(\frac{q^2}{C(x)}\right)+F\mathit{\Delta}x=0$

$$\therefore\ F\mathit{\Delta}x=-\mathit{\Delta}\left(\frac{q^2}{2C(x)}\right)=-\left[\frac{(CV)^2}{2\left\{1+\frac{k(x+\mathit{\Delta}x)}{l}\right\}C}-\frac{(CV)^2}{2\left(1+\frac{kx}{l}\right)C}\right]=\frac{klCV^2}{2\{l+k(x+\mathit{\Delta}x)\}(l+kx)}\mathit{\Delta}x$$

$$=\frac{klCV^2}{2\left\{l+kx\left(1+\frac{\mathit{\Delta}x}{x}\right)\right\}(l+kx)}\mathit{\Delta}x\fallingdotseq\frac{klCV^2}{2(l+kx)^2}\mathit{\Delta}x$$

$$\therefore F=\frac{klCV^2}{2(l+kx)^2}$$

コ：$\frac{kC}{2l}\left(\frac{q^2}{C(x)}\right)=\frac{klq^2}{2(l+kx)^2C}$