1

次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が原点，半径が5　　(2)　中心が点$(-2,\ 3)$，半径が$\sqrt{7}$

(3)　点$(1,\ 0)$を中心とし，点$(-2,\ 4)$を通る

(4)　点$(4,\ -3)$を中心とし，y軸に接する

(5)　2点$(2,\ 3)$，$(4,\ -5)$を直径の両端とする

2

次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2+8x-4y+11=0$　　(2)　$x^2+y^2+x+3y-2=0$

(3)　$x^2+y^2-2x+6y+10=0$　　(4)　$x^2+y^2+6x-8y+27=0$

3

3点A$(2,\ 1)$，B$(6,\ 3)$，C$(-1,\ 2)$がある。

(1)　3点A，B，Cを通る円の方程式を求めよ。

(2)　△ABCの外心の座標と，外接円の半径を求めよ。

4

円$x^2+y^2=5$ ……〔A〕と次の直線に共有点はあるか。あるときはその座標を求めよ。

(1)　$y=2x-5$　　(2)　$x+y-5=0$　　(3)　$x+2y=3$

5

方程式$x^2+y^2+2mx-2(m-1)y+5m^2=0$が円を表すとき，定数$m$の値の範囲を求めよ。また，この円の半径を最大にするmの値を求めよ。

6

次の円の，円上の点Pにおける接線の方程式を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=10$，P$(1,\ 3)$　　(2)　$x^2+y^2=16$，P$(3,\ -\sqrt{7})$

(3)　$x^2+y^2=36$，P$(0,\ -6)$

7

次の図形の方程式を求めよ。

(1)　点$(3,\ 0)$を中心とし，直線$4x-3y-2=0$に接する円

(2)　円$x^2+y^2=4$に接する傾き2の接線

8

次の点を通り，与えられた円に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ。

(1)　点$(1,\ -2)$，$x^2+y^2=1$　　(2)　点$(5,\ 1)$，$x^2+y^2=13$

9

円$(x-1)^2+(y-3)^2=25$上の点$(4,\ 7)$における接線の方程式を求めよ。

10

円$x^2+y^2-4x-2y=0$と直線$ax+y+a=0$が異なる2点A，Bで交わる。

(1)　$a=-1$のとき，弦ABの長さを求めよ。

(2)　弦ABの長さが最大となるとき，定数aの値を求めよ。

11

2円$x^2+y^2=5$，$x^2+y^2+4x-4y+7=0$について

(1)　2円の2つの交点と点$(4,\ 3)$を通る円の方程式を求めよ。

(2)　2円の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

(3)　2円の2つの交点の座標を求めよ。

12

次の2円が接するとき，定数rの値を求めよ。ただし，$r>0$とする。

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4,\quad (x-3)^2+(y+1)^2=r^2$$

解説

$\boxed{1}$

(解説)

(1)　$x^2+y^2=5^2$　　すなわち　　$x^2+y^2=25$

(2)　$(x+2)^2+(y-3)^2=(\sqrt{7})^2$　　すなわち　　$(x+2)^2+(y-3)^2=7$

(3)　点 $(-2,\ 4)$ を通るから，半径は中心 $(1,\ 0)$ と点 $(-2,\ 4)$ との距離に等しい。

よって，半径は　　$\sqrt{(-2-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{25}=5$

ゆえに，求める円の方程式は　　$(x-1)^2+y^2=25$

(4)　y 軸に接するとき，中心 $(4,\ -3)$ と y 軸の距離 4 が半径に等しい。

よって，求める円の方程式は　　$(x-4)^2+(y+3)^2=16$

(5)　中心は，2 点 $(2,\ 3)$，$(4,\ -5)$ を結ぶ線分の中点である。その座標は

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{3-5}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad (3,\ -1)$$

また，半径は　　$\dfrac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(-5-3)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}=\sqrt{17}$

よって，求める円の方程式は　　$(x-3)^2+(y+1)^2=17$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　方程式を変形すると　　$(x^2+8x+4^2)+(y^2-4y+2^2)=-11+4^2+2^2$

すなわち　　$(x+4)^2+(y-2)^2=3^2$

これは，点 $(-4,\ 2)$ を中心とし，半径が 3 の円を表す。

(2)　方程式を変形すると　　$\left\{x^2+x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}+\left\{y^2+3y+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}=2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

すなわち　　$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}$

これは，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$ を中心とし，半径が $\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ の円を表す。

(3)　方程式を変形すると　　$(x^2-2x+1^2)+(y^2+6y+3^2)=-10+1^2+3^2$

すなわち　　$(x-1)^2+(y+3)^2=0$

よって　　$x-1=0,\ y+3=0$　　　ゆえに　　$x=1,\ y=-3$

したがって，方程式は点 $(1,\ -3)$ を表す。

参考　A，B が実数のとき　　$A^2+B^2=0 \iff A=0,\ B=0$

(4)　方程式を変形すると　　$(x^2+6x+3^2)+(y^2-8y+4^2)=-27+3^2+4^2$

すなわち　　$(x+3)^2+(y-4)^2=-2$

よって，方程式が表す図形はない。

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　求める円の方程式を　$x^2+y^2+lx+my+n=0$　とおく。

この円が A $(2,\ 1)$ を通るから　　$2^2+1^2+l\cdot 2+m\cdot 1+n=0$

よって　　$2l+m+n=-5$　…… ①

B $(6,\ 3)$ を通るから　　$6^2+3^2+l\cdot 6+m\cdot 3+n=0$

よって　　$6l+3m+n=-45$　…… ②

C $(-1,\ 2)$ を通るから　　$(-1)^2+2^2+l\cdot(-1)+m\cdot 2+n=0$

よって　　$-l+2m+n=-5$　…… ③

② − ① から　　$4l+2m=-40$　　　ゆえに　　$2l+m=-20$　…… ④

② − ③ から　　$7l+m=-40$　…… ⑤

④，⑤ から　　$l=-4,\ m=-12$

これらを ① に代入して　　$2\cdot(-4)-12+n=-5$　　　よって　　$n=15$

したがって，求める円の方程式は　　$x^2+y^2-4x-12y+15=0$

(2)　(1) で求めた円が △ABC の外接円であり，その方程式 $x^2+y^2-4x-12y+15=0$ を変形すると　　$(x^2-4x+2^2)+(y^2-12y+6^2)=-15+2^2+6^2$

すなわち　　$(x-2)^2+(y-6)^2=5^2$

よって，△ABC の外心の座標は $(2,\ 6)$，外接円の半径は 5 である。

4

解説

(1)　$y=2x-5$ ……① を〔A〕に代入すると

$$x^2+(2x-5)^2=5$$

整理して　　$x^2-4x+4=0$

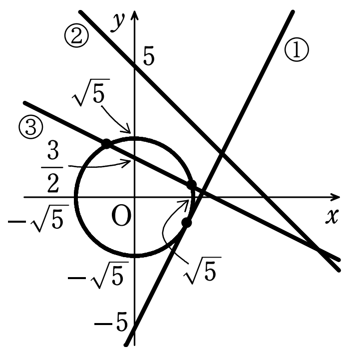
ゆえに　　$(x-2)^2=0$

よって　　$x=2$

① から　　$x=2$ のとき　$y=-1$

したがって，共有点の座標は

$(2,\ -1)$



(2)　$x+y-5=0$ から　　$y=-x+5$　……②

② を〔A〕に代入すると　　$x^2+(-x+5)^2=5$

整理して　　$x^2-5x+10=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　　$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot10=-15<0$

したがって，円〔A〕と直線 ② は共有点をもたない。

(3)　$x+2y=3$ から　　$x=-2y+3$　……③

③ を〔A〕に代入すると　　$(-2y+3)^2+y^2=5$

整理して　　$5y^2-12y+4=0$

ゆえに　　$(y-2)(5y-2)=0$　　　よって　　$y=2,\ \dfrac{2}{5}$

③ から　　$y=2$ のとき　$x=-1$，$y=\dfrac{2}{5}$ のとき　$x=\dfrac{11}{5}$

したがって，共有点の座標は　　$(-1,\ 2)$，$\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

5

解説

方程式を変形すると

$$(x^2+2mx+m^2)+\{y^2-2(m-1)y+(m-1)^2\}=-5m^2+m^2+(m-1)^2$$

すなわち　　$(x+m)^2+\{y-(m-1)\}^2=-3m^2-2m+1$

この方程式が円を表すための必要十分条件は　　$-3m^2-2m+1>0$

よって　　$(m+1)(3m-1)<0$　　　ゆえに　　$-1<m<\dfrac{1}{3}$　……①

円の半径を r とすると　　$r^2=-3m^2-2m+1=-3\left(m+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$

① の範囲で，r^2 は $m=-\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。

$r>0$ であるから，このとき r も最大となる。

よって，半径を最大にする m の値は　　$m=-\dfrac{1}{3}$

参考　半径の最大値は　　$\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

6

解説

(1)　$1\cdot x+3\cdot y=10$　　すなわち　　$x+3y=10$

(2)　$3\cdot x+(-\sqrt{7})\cdot y=16$　　すなわち　　$3x-\sqrt{7}\,y=16$

(3)　$0\cdot x+(-6)\cdot y=36$　　すなわち　　$y=-6$

$\boxed{7}$

(解説)

(1)　求める円の半径を r とする。

r は円の中心 $(3,\ 0)$ と直線 $4x-3y-2=0$ の距離に等しい。

よって　$r=\dfrac{|4\cdot 3-3\cdot 0-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{10}{5}=2$

したがって，求める円の方程式は　$(x-3)^2+y^2=4$

(2)　傾きが 2 であるから，求める接線の方程式は $y=2x+n$ とおける。

$y=2x+n$ から　$2x-y+n=0$

円の中心 $(0,\ 0)$ と接線の距離が，円の半径 2 に等しいから

$$\frac{|n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$$

よって　$|n|=2\sqrt{5}$　ゆえに　$n=\pm 2\sqrt{5}$

したがって，求める接線の方程式は　$y=2x+2\sqrt{5}$，$y=2x-2\sqrt{5}$

別解　$x^2+y^2=4$　……①

接線の方程式を $y=2x+n$ ……② とする。

② を ① に代入して　$x^2+(2x+n)^2=4$

よって　$5x^2+4nx+n^2-4=0$

この 2 次方程式の判別式を D とすると　$\dfrac{D}{4}=(2n)^2-5(n^2-4)=-n^2+20$

① と ② が接するから　$D=0$　すなわち　$-n^2+20=0$

これを解いて　$n=\pm 2\sqrt{5}$

したがって，求める接線の方程式は　$y=2x+2\sqrt{5}$，$y=2x-2\sqrt{5}$

$\boxed{8}$

(解説)

(1)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とする。

点 P は円 $x^2+y^2=1$ 上にあるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=1$　……①

また，点 P におけるこの円の接線の方程式は　$x_1x+y_1y=1$　……②

これが点 $(1,\ -2)$ を通るから　$x_1-2y_1=1$

よって　$x_1=2y_1+1$　……③

これを ① に代入して　$(2y_1+1)^2+y_1{}^2=1$

ゆえに　$5y_1{}^2+4y_1=0$　これを解いて　$y_1=0,\ -\dfrac{4}{5}$

[1]　$y_1=0$ のとき，③ から　$x_1=1$

よって，接点の座標は　$(1,\ 0)$

接線の方程式は，② から　$1\cdot x+0\cdot y=1$　すなわち　$x=1$

[2]　$y_1=-\dfrac{4}{5}$ のとき，③ から　$x_1=-\dfrac{3}{5}$

よって，接点の座標は　$\left(-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right)$

接線の方程式は，② から　$\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot x+\left(-\dfrac{4}{5}\right)\cdot y=1$

すなわち　$3x+4y=-5$

(2)　接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とする。

点 P は円 $x^2+y^2=13$ 上にあるから　$x_1{}^2+y_1{}^2=13$　……①

また，点 P におけるこの円の接線の方程式は　$x_1x+y_1y=13$　……②

これが点 $(5,\ 1)$ を通るから　$5x_1+y_1=13$

よって　$y_1=-5x_1+13$　……③

これを ① に代入して　$x_1{}^2+(-5x_1+13)^2=13$

ゆえに　$26(x_1{}^2-5x_1+6)=0$　これを解いて　$x_1=2,\ 3$

[1]　$x_1=2$ のとき，③ から　$y_1=3$

よって，接点の座標は　$(2,\ 3)$

接線の方程式は，② から　$2\cdot x+3\cdot y=13$　すなわち　$2x+3y=13$

[2]　$x_1=3$ のとき，③ から　$y_1=-2$

よって，接点の座標は　$(3,\ -2)$

接線の方程式は，② から　$3\cdot x+(-2)\cdot y=13$　すなわち　$3x-2y=13$

$\boxed{9}$

（解説）

円の中心 (1，3) を C とし，点 (4，7) を P とする。

直線 CP の傾きは　$\dfrac{7-3}{4-1}=\dfrac{4}{3}$

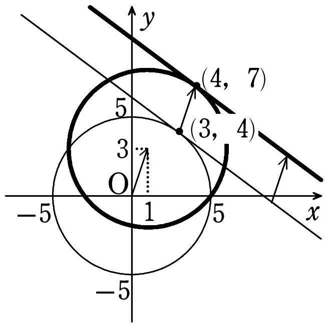
求める接線は，点 P を通り直線 CP に垂直であるから，その方程式は

$$y-7=-\frac{3}{4}(x-4)\qquad \text{すなわち}\qquad 3x+4y-40=0$$

別解　円 $(x-1)^2+(y-3)^2=25$ ……① を中心 (1，3) が原点 (0，0) にくるように平行移動すると

$$\text{円}\ x^2+y^2=25\quad\cdots\cdots②$$

になる。



この平行移動により，円 ① 上の点 (4，7) は点 (3，4) に移る。

点 (3，4) における円 ② の接線の方程式は

$$3x+4y=25\quad\cdots\cdots③$$

求める接線は，③ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，その方程式は

$$3(x-1)+4(y-3)=25\qquad \text{すなわち}\qquad 3x+4y=40$$

参考　円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

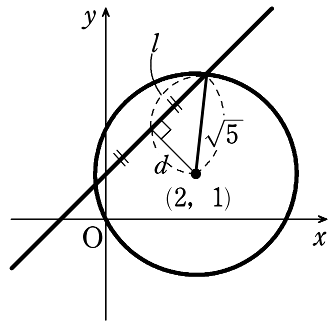
これを利用すると，本問の接線の方程式は

$$(4-1)(x-1)+(7-3)(y-3)=25$$

から求められる。

$\boxed{10}$

（解説）



(1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ を変形すると

$$(x-2)^2+(y-1)^2=5\quad\cdots\cdots①$$

$a=-1$ のとき，直線の方程式は

$$x-y+1=0\quad\cdots\cdots②$$

円 ① の中心 (2，1) と直線 ② の距離 d は

$$d=\frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

円 ① の半径は $\sqrt{5}$ であるから，弦 AB の長さを $2l$ とすると　$l^2=(\sqrt{5})^2-d^2=5-2=3$

$l>0$ であるから　$l=\sqrt{3}$　　よって　$\mathrm{AB}=2l=2\sqrt{3}$

別解　② から　$y=x+1$

これを $x^2+y^2-4x-2y=0$ に代入して　$x^2+(x+1)^2-4x-2(x+1)=0$

よって　$2x^2-4x-1=0$　……③

円と直線の交点 A，B の座標を $(\alpha,\ \alpha+1)$，$(\beta,\ \beta+1)$ とすると，α，β は 2 次方程式 ③ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{4}{2}=2,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

よって　$\mathrm{AB}^2=(\beta-\alpha)^2+\{(\beta+1)-(\alpha+1)\}^2=2(\beta-\alpha)^2=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

$$=2\left\{2^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=12$$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　$\mathrm{AB}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

(2)　弦 AB の長さが最大になるのは，弦 AB が円の直径になるときである。

このとき，直線 $ax+y+a=0$ は円の中心 (2，1) を通るから

$$2\cdot a+1+a=0\qquad \text{よって}\qquad a=-\frac{1}{3}$$

$\boxed{11}$

(解説)

k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2+4x-4y+7)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考えると，① の表す図形は 2 円の 2 つの交点を通る。

(1)　図形 ① が点 $(4,\ 3)$ を通るとき　　$k(16+9-5)+(16+9+16-12+7)=0$

よって　　$20k+36=0$　　　　ゆえに　　$k=-\dfrac{9}{5}$

これを ① に代入して整理すると　　$x^2+y^2-5x+5y-20=0$

(2)　図形 ① が直線であるとき，x^2，y^2 の項の係数が 0 になるから　　$k=-1$

これを ① に代入して整理すると　　$x-y+3=0$

(3)　2 円の交点は，円 $x^2+y^2=5$ …… ② と (2) で求めた直線 $x-y+3=0$ …… ③ との交点である。

③ から　　$y=x+3$　…… ④

④ を ② に代入して　　$x^2+(x+3)^2=5$

よって　　$x^2+3x+2=0$　　　　これを解いて　　$x=-1,\ -2$

④ から　　$x=-1$ のとき　$y=2$,　　$x=-2$ のとき　$y=1$

したがって，求める交点の座標は　　$(-1,\ 2)$，$(-2,\ 1)$

$\boxed{12}$

(解説)

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$　…… ①

$(x-3)^2+(y+1)^2=r^2$　…… ②　とする。

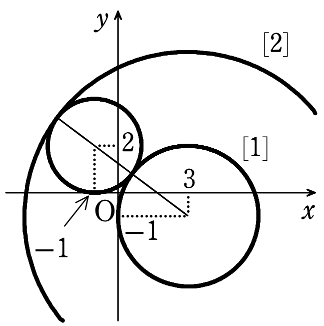
円 ① の中心は点 $(-1,\ 2)$，半径は 2

円 ② の中心は点 $(3,\ -1)$，半径は r

2 円の中心間の距離は

$$\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{25}=5$$

2 円が接するのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。



[1]　2 円が外接するとき

$5=2+r$　　　　よって　　$r=3$

[2]　円 ① が円 ② に内接するとき

$5=r-2$　　　　よって　　$r=7$

したがって　　$r=3,\ 7$

注意　円 ② の中心は，円 ① の外部にあるから，円 ② が円 ① に内接することはない。